Transmisión y almacenamiento de información asistidos por ruido

Tesis
entregada al
Instituto Tecnológico de Buenos Aires
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ingeniería Informática
Departamento de Postgrado

por

Santiago Agustín Ibáñez

Junio, 2010

Directores de Tesis: **Dr. Diego F. Grosz**
Dr. Pablo I. Fierens

INSTITUTO TECNOLOGICO DE BUENOS AIRES

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Comisión de Doctorado del Instituto Tecnológico de Buenos Aires que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

Santiago Agustín Ibáñez

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ingeniería Informática, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 15 de Junio de 2010.

Directores de Tesis

Dr. Diego F. Grosz _____

Dr. Pablo I. Fierens _____

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Dante Chialvo _____

Dr. Carlos Muravchik _____

Dra. Lilia Romanelli _____

AGRADECIMIENTOS

Al finalizar esta tesis doctoral, siento que ha requerido un gran esfuerzo y dedicación de mi parte, sin embargo, nunca hubiese podido terminarla sin la colaboración de muchas personas, algunas de las cuales citaré a continuación.

A mis directores, los doctores Diego Grosz y Pablo Fierens, por el tiempo que invirtieron, por haberme proporcionado las herramientas y los medios necesarios para concluir esta tesis con la convicción de haber hecho un buen trabajo y porque ambos compartieron sus conocimientos conmigo. Con ambos compartí valiosas reuniones de trabajo en las que también participaron los doctores Roberto Perazzo y Alejandro Fendrik, como así también Germán Patterson. Como fruto de la mayoría de estas reuniones, surgieron los artículos que corresponden a esta tesis. Al doctor José Ignacio Alvarez-Hamelin por aguantar una verdadera lluvia de preguntas cuando empezaba a manejarme con el Linux.

A mis compañeros doctorandos y posdocs, Santiago Hernandez, Victor Bettachini, Pablo König, Andrés Rieznik, José Orlicki y Maxi Bertacchini les agradezco el tiempo que compartimos y el que perdimos, las charlas de café, las horas que nos pasamos garabateando el pizarrón. Estoy seguro que de acá me llevo un montón de amigos.

A mis padres, Ricardo y Marita, porque siempre me apoyaron incondicionalmente en todas las aventuras que decidí emprender y, cuando tuve que afrontar momentos difíciles, me contuvieron emocionalmente y me brindaron la fortaleza necesaria para seguir adelante. A mi hermana Guillermina. A Miriam, mi compañera, que me escuchó con paciencia, que se quedó hasta altas horas de la madrugada esperándome y que leyó incanzablemente cada versión del manuscrito, aportandome valiosas recomendaciones y corrigiendo muchos de mis errores. Quiero agradecerte el apoyo y amor que me das todos los días.

A mis amigos de siempre Damo, Inés, Pablito, Hernán, Diego, Luciana, Belén y Fabricio. A mis compañeros de la infancia Tucho, Damián y Martín , hoy entrañables amigos.

A los nuevos Euge y Paulo, Cesira y Violeta. A mi primo Chulo, a los muchachos de los viernes, Puchero, Eduardo, Fede, Ezequiel, El Niño, El Tordo y por supuesto, Mi Viejo. A todos ustedes muchas gracias por hacer que mi vida sea algo más que un doctorado.

Quiero finalizar agradeciendo especialmente a la familia donante que hace 7 años ayudó a salvar mi vida, a todo el personal de la Fundación Favaloro comenzando por la Dra. Romina Carpineta por darme esperanzas y por aquel llamado telefónico anunciandome que había llegado el órgano.

RESUMEN

El hilo conductor de este trabajo es el fenómeno de la resonancia estocástica en sistemas formados por osciladores biestables acoplados y, sus equivalentes electrónicos, los Schmitt triggers.

En el capítulo 1 presentamos una introducción a la resonancia estocástica, describimos la motivación, el estado del arte y las principales contribuciones de esta tesis.

En el capítulo 2 definimos los conceptos básicos de sistemas dinámicos, necesarios para comprender los desarrollos de los siguientes capítulos. Abordamos el problema elemental de la resonancia estocástica sobre un oscilador biestable sobreamortiguado forzado por una señal subumbral. Y, por último, presentamos las herramientas cuantitativas utilizadas para caracterizar la resonancia estocástica.

En el capítulo 3 analizamos el fenómeno de la resonancia estocástica en un cadena de osciladores biestables acoplados, forzada simultáneamente por ruido blanco y una señal digital aperiódica que transporta información. Caracterizamos el fenómeno utilizando herramientas del ámbito de las comunicaciones digitales, tales como la relación señal-ruido y la tasa de error. En particular, mostramos que es posible utilizar al sistema como una línea de retardo sintonizable por ruido. Comparando los resultados de desempeño con los de una línea que se degrada en forma lineal con el ruido encontramos que la cadena aquí analizada se degrada a un ritmo mucho más lento que en un escenario de ruido blanco gaussiano aditivo. Finalmente, verificamos experimentalmente las características de la línea utilizando una cadena compuesta por cinco Schmitt triggers conectados en serie, como modelo discreto de la cadena de osciladores.

En el capítulo 4 nos concentramos en un anillo compuesto por dos osciladores realimentados en presencia de ruido. Mostramos que este anillo puede funcionar como una memoria que almacena un bit de información y encontramos que existe un rango de ruido

que garantiza, simultáneamente, la máxima persistencia, la mínima probabilidad de detección errónea del bit almacenado y la de sincronización entre ambos osciladores. A su vez, el sistema se comporta como una memoria "asincrónica", dado que es posible capturar su estado en cualquier instante sin necesidad de recurrir a una señal de reloj externa. Realizamos una verificación experimental de los resultados de este capítulo construyendo un dispositivo de almacenamiento de 1-bit basado en dos Schmitt triggers en una configuración de bucle. Mostramos que el sistema es capaz de almacenar un único bit y que lo hace de manera más eficiente para una intensidad de ruido óptima.

Por último, en el capítulo 5, presentamos las conclusiones obtenidas de la tesis doctoral y proponemos futuras líneas de investigación que servirán de complemento al presente trabajo.

LISTA DE PUBLICACIONES

Artículos en revistas indexadas:

1. Ibáñez, S. A., Fendrik, A., Fierens, P. I., Perazzo, R. P. J. y Grosz, D. F. (2008). **Time-delay properties of a stochastic-resonance infmormation transmission line**. *Fluctuation and Noise Letters*, 8(3-4) pp. L315-L321.

2. Ibáñez, S. A., Fierens, P.I., Perazzo, R.P.J. y Grosz, D.F. (2009). **Performance robustness of a noise-assisted transmission line**. *Physica D.* 238(21) pp. 2138-2141.

3. Patterson, G. A., Goya, A. F., Fierens, P. I., Ibáñez, S. A. y Grosz, D.F. (2010). **Experimental investigation of noise-assisted information transmission and storage via stochastic resonance**. *Physica A.* 389(9) pp. 1965-1970.

4. Fierens, P. I., Ibáñez, S. A., Perazzo, R. P. J., Patterson, G. A. y Grosz, D. F. (2010). **A memory device sustained by noise**. *Physics Letters A*, 374(22) pp. 2207-2209.

5. Ibáñez, S. A., Fierens, P. I. , Patterson, G. A. , Perazzo, R. P. J. y Grosz D. F. (2010). **On the dynamics of a single-bit stochastic-resonance memory device**. *The European Physical Journal B*, Aceptado.

Presentaciones en conferencias:

1. Ibáñez, S. A., Fendrik, A., Fierens, P. I., Perazzo, R. P. J. y Grosz, D. F. **Time-Delay Properties of a Stochastic-Resonance Information Transmission Line**. *Stochastic Resonance 2008*, Perugia, Italia (2008).

2. Ibáñez, S. A., Fierens, P. I., Perazzo, R. P. J. y Grosz, D. F. **Performance of a Stochastic-Resonance Transmission Line**. *Stochastic Resonance 2008*, Perugia, Italia (2008).

3. Ibáñez, S. A., Fierens, P. I., Perazzo, R. P. J. y Grosz, D. F. Propagation Analysis of Noise Supported Transmission. *MEDYFINOL 2008*, Punta del Este, Uruguay (2008).

4. Goya, A. F., Patterson, G. A., Fierens, P. I., Ibáñez, S. A. y Grosz, D. F. **Observación de resonancia estocástica en un sistema de transmisión de información**. *Reunión Anual de la Asociación Física Argentina, AFA2008*, Buenos Aires (2008).

5. Patterson, G. A., Goya, A. F., Fierens, P. I., Ibáñez, S. A. y Grosz, D. F. **Memoria digital sostenida por ruido**. *Reunión Anual de la Asociación Física Argentina, AFA2009*, Rosario (2009).

Artículos en revistas de divulgación:

1. **New device can use noise to store one bit**, *ScienceNews*, web edition, 13 de Noviembre (2009). www.sciencenews.org.

Índice

1. INTRODUCCION **1**

1.1. Resonancia estocástica 1

1.2. Resultados de la tesis 6

2. CONCEPTOS DE SISTEMAS DINAMICOS **9**

2.1. Introducción 9

2.2. Definiciones 10

2.3. Espacio de fases 10

2.4. Puntos críticos 11

2.4.1. Clasificación de los puntos críticos 12

2.5. Bifurcaciones 14

2.5.1. Bifurcación "saddle-node" 15

2.5.2. Bifurcación "pitchfork" 16

2.6. Oscilador biestable 18

2.6.1. Análisis de estabilidad 19

2.7. Resonancia estocástica en un potencial biestable 21

2.8. Herramientas cuantitativas para caracterizar la resonancia estocástica . . . 24

2.8.1. Relación señal-ruido de una señal periódica 24

2.8.2. Amplificación espectral de potencia 26

2.8.3. Correlación cruzada 27
2.8.4. Tasa de error 28
2.8.5. Estimación de la relación señal-ruido de una señal no periódica . . . 31
2.8.6. Factor Q 35
2.8.7. Canal lineal 36

3. TRANSMISION DE LA INFORMACION ASISTIDA POR RUIDO 37

3.1. Introducción 37
3.2. El sistema: una cadena de osciladores acoplados 40
3.3. Determinación de la relación señal-ruido 44
3.3.1. Dependencia de la SNR con el acoplamiento 46
3.4. Cálculo de la tasa de error 49
3.5. Retardos 51
3.6. Comparación del desempeño con un canal de transmisión lineal 56
3.6.1. Penalización 59
3.7. Modelo experimental 60

4. MEMORIA SOSTENIDA POR RUIDO 67

4.1. Introducción 67
4.2. El sistema: un anillo de dos osciladores 70
4.2.1. Sistema Potencial 71
4.2.2. Determinación de los puntos críticos y su estabilidad 72
4.2.3. Diagrama de bifurcaciones 76
4.3. Modelo de cuatro estados 79
4.4. Simulaciones numéricas 81
4.5. Sincronización y tiempo de persistencia 88

4.6. Modelo experimental 91

5. CONCLUSIONES **95**

5.1. Transmisión de información en presencia de ruido 95

5.2. Almacenamiento de información asistido por ruido 99

Capítulo 1

INTRODUCCION

1.1. Resonancia estocástica

En esta tesis abordamos el estudio de algunos sistemas dinámicos en presencia de ruido en el régimen conocido como *resonancia estocástica*.

Históricamente, el ruido ha representado un importante problema para el hombre dado que se encuentra presente en cualquier dispositivo y usualmente deteriora su desempeño, parcial o totalmente. En general, todo proceso está acompañado por una determinada cantidad de ruido. En particular, los sistemas de comunicación deben transmitir información de un lugar a otro a la mayor velocidad posible y, en la medida de lo posible, sin cometer errores. El ruido presente en el transmisor, el canal de comunicación y el receptor provoca la degradación de los símbolos que eventualmente llegan a confundirse durante la detección, limitando la capacidad del canal de comunicación. Por este motivo, durante años, gran parte del trabajo de los ingenieros ha sido el de tratar de minimizar su efecto en los sistemas de comunicación.

En contraste, desde hace ya varias décadas, se sabe que el ruido en ciertos conjuntos de sistemas dinámicos (DS, del inglés *Dynamical Systems*) no-lineales puede ser útil, permitiendo explorar regímenes completamente nuevos que, de otro modo, sería imposible

de observar. Estos fenómenos fueron denominados "transiciones inducidas por ruido" [1]. Más específicamente, la "resonancia estocástica" (SR, del inglés *Stochastic Resonance*) constituye un nuevo fenómeno abordado desde un principio con el fin de obtener una comprensión de los mecanismos físicos involucrados, pero que actualmente también concita gran interés en la biología [2–4] e ingeniería [5–10] y, en especial, en el área de las comunicaciones digitales, tal como se puede verificar consultando el número de patentes registradas con la palabra clave *stochastic resonance* [11]. Para que pueda ocurrir la SR se deben combinar tres importantes aspectos: (a) una barrera energética o un umbral, (b) una fuente de ruido y (c) una señal externa. En un comienzo las señales externas consideradas eran subumbrales, i. e. el sistema es incapaz de realizar transiciones entre los estados de equilibrio estables sin la presencia del ruido externo. Sin embargo, tal condición se relajó con el surgimiento de la llamada "resonancia estocástica supraumbral" (SSR, del inglés *Suprathreshold Stochastic Resonance*) [6, 12].

Consideremos ahora el caso de señales subumbrales. En este caso la respuesta del sistema depende fuertemente del ruido que, cuando posee una intensidad moderada, asiste a la señal para superar la barrera energética. Para intensidades inferiores la señal es incapaz de alcanzar la barrera de potencial, mientras que en el otro extremo, para intensidades elevadas, la salida está dominada principalmente por la presencia de ruido, por lo que la señal queda oculta. De este modo, el ruido desempeña un papel constructivo, lo cual representa la principal característica de la SR.

El término "resonancia estocástica" fue introducido en 1981 por Benzi et al. [13, 14] cuando se trataban de explicar las causas de la periodicidad de las glaciaciones. Observando las variaciones estadísticas en el volumen del hielo continental hallaron que el período de cada era de alrededor de 10^5 años. El único fenómeno astronómico con una escala de tiempos comparable lo constituye las desviaciones en la excentricidad de la órbita terres-

tre, aunque por sí solas estas desviaciones no son lo suficientemente intensas como para causar transiciones entre las eras "de hielo" y "templada". De acuerdo al modelo propuesto por Benzi et al. (ver Sección 2.7), el clima global está representado por un potencial biestable donde los mínimos corresponden a cada una de las dos eras. Las desviaciones en la excentricidad de la órbita terrestre son interpretadas como una perturbación periódica débil, mientras que las fluctuaciones en la radiación solar son modeladas como ruido blanco gaussiano. Si el ruido se encuentra correctamente sintonizado, la superposición de éste con la débil señal periódica provoca las transiciones características de la SR. Sin embargo, la cuestión de las glaciaciones sigue siendo un tema de debate dado que el modelo no ofrece respuestas cerradas. No obstante, el estudio de fenómenos de SR adquirió interés en sí mismo independientemente de la suerte corrida por el modelo del clima.

Dos años más tarde, Fauve et al. [15] observaron experimentalmente la SR utilizando un Schmitt trigger [16] (un dispositivo electrónico biestable con histéresis, utilizado como modelo discreto del potencial biestable), un generador de ruido electrónico y una señal periódica como forzante. Para cuantificar el efecto midieron la relación señal-ruido (SNR, del inglés *Signal-to-Noise Ratio*) a la salida del sistema. A pesar de este importante experimento, transcurrieron otros cinco años hasta que McNamara et al. [17] observaron el fenómeno de la SR en un láser de anillo. Este estudio atrajo el interés de un gran número de investigadores permitiendo descubrir que la SR ocurre en una amplia variedad de sistemas físicos.

Además de los láseres de anillo y los Schmitt triggers, el fenómeno de la SR ha sido estudiado en circuitos electrónicos como el oscilador caótico de Chua [18–21], el diodo de efecto túnel [22, 23] y el diodo de juntura [24]. También los SQUIDs (del inglés *Superconducting Quantum Interference Devices*) [21, 25] utilizados para medir pequeñas fluctuaciones en el campo magnético pueden mejorar su desempeño con el agregado de

una dosis moderada de ruido.

En el área de la neurociencia también se ha observado el fenómeno de la SR. Por ejemplo, Moss et al. [26] modelaron las células mecano-receptoras de la cola del *Procambarus Clarkii*, un cangrejo de agua dulce, como un detector de umbral no-lineal. Al llegar una señal supraumbral, la célula dispara un pulso. En los experimentos realizados se utilizó una débil señal periódica para imitar el movimiento de los posibles predadores, mientras que el ruido está constituido por las corrientes en las zonas rocosas donde viven estos cangrejos. Otros trabajos de SR en sistemas neuronales pueden encontrarse en [21, 27–32].

Motivados por la creciente demanda de sistemas de comunicación cada vez más rápidos y dispositivos de cálculo cada vez más pequeños (de acuerdo a la ley de Moore [33] el número de transistores en un circuito se duplica aproximadamente cada dos años), donde el ruido de fondo no puede ser eliminado, surge espontáneamente la pregunta sobre la posibilidad de extender el concepto de SR reemplazando las señales armónicas por otras más generales, en particular, por señales que transporten información y, de ser posible, diseñar sistemas de comunicación que no solo sean tolerantes al ruido, sino que su funcionamiento sea sostenido por el propio ruido presente.

El surgimiento de sistemas que funcionan más eficientemente con una dosis moderada de ruido podría revolucionar la forma en que se diseñan las computadoras, los sensores y los sistemas de comunicación. En este sentido, investigaciones recientes han introducido conceptos como el de la resonancia estocástica lógica (LSR, del inglés *Logical Stochastic Resonance*) [34–36] donde un dispositivo biestable funciona como compuerta lógica (AND u OR) solo en presencia de ruido. Previamente, fue analizada la posibilidad de utilizar el fenómeno de la SR en el almacenamiento de información. En las referencias [37, 38] se demostró que un anillo de osciladores idénticos es capaz de sostener una onda viajera con la ayuda de ruido aun mucho tiempo después de que la señal armónica externa fue

apagada. Sin embargo, hasta aquí, no se ha intentado utilizar este sistema para almacenar información.

La transición del ámbito analógico al mundo digital no es trivial, y se necesitaron catorce años desde el surgimiento de la SR hasta que se publicó el primer trabajo sobre este tema con una señal no periódica [39]. Poco tiempo después aparecieron trabajos que consideraban una señal binaria pseudoaleatoria (PRBS, del inglés *Pseudo-Random Bit Sequence*) en sistemas que exhiben el fenómeno de la SR [39, 40]. Una importante limitación para avanzar hacia señales no periódicas es que la densidad espectral de potencia (PSD, del inglés *Power Spectral Density*) (ver Sección (2.8)) adquiere una estructura compleja y, por lo tanto, el estudio de SR a través de la SNR se hace más difícil. Como primera respuesta a este problema, Collins et al. [41,42] midieron la correlación cruzada entre la señal de entrada y la respuesta del sistema, mientras que Godivier y Chapeau-Blondeau [40] utilizaron el concepto de 'capacidad de canal", que consiste en determinar la cantidad máxima de información que puede transportar un canal con una probabilidad de error arbitrariamente pequeña.

En una serie de trabajos Barbay et al. [43–45] utilizan una secuencia de bits pseudoaleatoria como forzante de un VCSEL (del inglés *Vertical-Cavity Surface-Emitting Laser*) y cuantifican la SR con un parámetro propio del ámbito de las comunicaciones digitales -la tasa de error (BER, del inglés *Bit Error Rate*)- definido como el cociente entre el número de bits recibidos incorrectamente y el número total de bits transmitidos. La BER es una de las herramientas más importantes para medir el desempeño de un sistema de comunicación digital ya que permite estimar cual es la probabilidad de recibir un bit erróneo.

1.2. Resultados de la tesis

En el capítulo 3 analizamos el comportamientde una cadena de osciladores biestables acoplados unidireccionalmente utilizada como una línea de transmisión de información. Forzamos al primer oscilador de la cadena con una secuencia PRBS de bits y perturbamos a cada oscilador con ruido blanco gaussiano. Hallamos diferentes comportamientos en función del acoplamiento entre osciladores, que identificamos como "transmisión sostenida por acoplamiento" y "transmisión sostenida por ruido". El desempeño de la línea es caracterizado utilizando parámetros tales como la tasa de error y la relación señal-ruido. Mostramos que ambas métricas mejoran con una moderada intensidad de ruido. Encontramos, además, que los dos parámetros permanecen aproximadamente constantes para un amplio rango de intensidades de ruido en todos los regímenes de transmisión. En particular, encontramos que este sistema exhibe un comportamiento robusto comparado con un canal de transmisión sometido a ruido blanco gaussiano aditivo.

A continuación analizamos las propiedades de retardo de la línea. Mostramos que es posible ajustar los retardos "sintonizando" la intensidad de ruido o el acoplamiento entre osciladores. Hallamos que el sistema puede ser visto como una línea de retardos sintonizables para un amplio rango de ruidos y acoplamientos, una característica que puede encontrar aplicaciones en el procesamiento de información y en la regeneración de la información transmitida.

Finalmente, presentamos resultados experimentales de la línea de transmisión. Investigamos el desempeño de una línea de transmisión compuesta por cinco Schmitt triggers y mostramos que exhibe resonancia estocástica. Cada ST en la línea es perturbado con ruido blanco gaussiano y el primer ST es excitado por una secuencia pseudoaleatoria de bits. Para caracterizar el desempeño de la línea utilizamos la tasa de error y el factor

Q, una métrica que caracteriza la calidad de la señal en el receptor (ver Sección 2.8.6). Ambas magnitudes exhiben un comportamiento del tipo de la resonancia estocástica. Curiosamente, encontramos que la degradación del desempeño del sistema con el número de ST es equivalente a la de un sistema lineal que se degrada únicamente con ruido gaussiano aditivo.

Los resultados del capítulo 3, fueron publicados en:

- Ibáñez, S. A., Fendrik, A., Fierens, P. I., Perazzo, R. P. J. y Grosz, D. F. (2008). **Time-delay properties of a stochastic-resonance infmormation transmission line**. *Fluctuation and Noise Letters*, 8(3-4) pp. L315-L321.

- Ibáñez, S. A., Fierens, P.I., Perazzo, R.P.J. y Grosz, D.F. (2009). **Performance robustness of a noise-assisted transmission line**. *Physica D.* 238(21) pp. 2138-2141.

- Patterson, G. A., Goya, A. F., Fierens, P. I., Ibáñez, S. A. y Grosz, D.F. (2010). **Experimental investigation of noise-assisted information transmission and storage via stochastic resonance**. *Physica A.* 389(9) pp. 1965-1970.

En el capítulo 4 proponemos una memoria compuesta por un anillo de dos osciladores biestables sobreamortiguados, capaz de almacenar un único bit. Mostramos que el desempeño de la memoria mejora en presencia de ruido blanco gaussiano. Este sistema puede convertirse en un elemento de un dispositivo a mayor escala que permita almacenar una gran cantidad de información.

El dispositivo propuesto es asincrónico dado que la información almacenada puede ser recuperada en cualquier instante y, luego de cierto tiempo de "sincronización", la probabilidad de recuperación errónea no depende del oscilador interrogado.

Caracterizamos el tiempo de persistencia y mostramos que es máximo para el mismo rango que ruido que minimiza la probabilidad de error y simultáneamente asegura la rápida sincronización. También presentamos resultados experimentales de una versión electrónica de la memoria propuesta compuesta por un bucle de dos Schmitt triggers. Demostramos que este dispositivo es capaz de almacenar un bit y lo hace de manera más eficiente en presencia de ruido.

Los resultados del capítulo 4, fueron publicados en:

- Fierens, P. I., Ibáñez, S. A., Perazzo, R. P. J., Patterson, G. A. y Grosz, D. F. (2010). **A memory device sustained by noise**. *Physics Letters A*, 374(22) pp. 2207-2209.

- Ibáñez, S. A., Fierens, P. I., Patterson, G. A., Perazzo, R. P. J. y Grosz D. F. (2010). **On the dynamics of a single-bit stochastic-resonance memory device**. *The European Physical Journal B*, Aceptado.

Capítulo 2

CONCEPTOS DE SISTEMAS DINAMICOS Y RESONANCIA ESTOCASTICA

2.1. Introducción

A lo largo de este capítulo enumeraremos las características más relevantes de los sistemas dinámicos. En la actualidad, la noción de DS es muy amplia y abarca sistemas de cualquier naturaleza: física, química, biológica, económica, etc., con la particularidad de que no sólo se consideran sistemas deterministas sino también sistemas estocásticos. En particular, a los fines de esta tesis, nos interesarán los sistemas dinámicos no-lineales estocásticos.

No pretendemos hacer un análisis exhaustivo de los DS solo presentaremos las herramientas necesarias para la comprensión de los siguientes capítulos. El lector que desee profundizar en alguno de los temas mencionados puede consultar la bibliografía propuesta al final de la tesis.

2.2. Definiciones

Los sistemas dinámicos poseen un modelo matemático asociado [20] compuesto por un conjunto de funciones que describen el estado del sistema y un operador de evolución temporal que permite hallarlo en cualquier instante de tiempo a partir del estado inicial. La evolución temporal puede ser discreta o continua. Estamos interesados, en particular, en los DS de evolución temporal continua.

Una de las formas de representar al operador de evolución temporal es a partir de un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs):

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}\right), \tag{2.1}$$

donde $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ son la variables de estado del sistema y $\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}, t\right)$ es un campo vectorial arbitrario dado por

$$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}, t\right) = \left(f_1\left(\boldsymbol{x}, t\right), f_2\left(\boldsymbol{x}, t\right), \ldots, f_N\left(\boldsymbol{x}, t\right)\right). \tag{2.2}$$

La solución de este conjunto de ecuaciones diferenciales, $\boldsymbol{x}\left(t, \boldsymbol{x}_0\right)$, permite hallar la evolución temporal del sistema dada la condición inicial $\boldsymbol{x}_0$. Un caso particular de DS ocurre cuando existe una función escalar $U\left(\boldsymbol{x}\right)$ tal que $\boldsymbol{F} = -\nabla U$. En este caso se dice que el sistema es potencial y $U(\boldsymbol{x})$ es el potencial del sistema.

2.3. Espacio de fases

El espacio N-dimensional en el que el sistema evoluciona se conoce como 'espacio de fases'. El espacio de fases representa todos los estados del sistema. Las coordenadas de un punto arbitrario nos dan toda la información sobre el estado del sistema. Una trayectoria en el espacio de fases se conoce como órbita. Las órbitas se encuentran caracterizadas por

$$\frac{dx_1}{f_1\left(\boldsymbol{x}\right)} = \frac{dx_2}{f_2\left(\boldsymbol{x}\right)} = \frac{dx_3}{f_3\left(\boldsymbol{x}\right)} = \ldots = \frac{dx_N}{f_N\left(\boldsymbol{x}\right)},$$

donde hemos eliminado la dependencia con el tiempo. A partir de aquí podemos hallar las ecuaciones de las órbitas:

$$\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{f_i}{f_j} = \Phi\left(\boldsymbol{x}\right).$$

Es importante mencionar que las órbitas ofrecen menor cantidad de información que las soluciones del sistema original (Ec. (2.1)).

En la mayoría de los DS no es posible encontrar una solución analítica al conjunto de EDOs con las herramientas matemáticas actuales. Por lo tanto surge la necesidad de implementar eficientes algoritmos numéricos. Muchas veces resulta útil y permite ahorrar tiempo de cálculo conocer la mayor cantidad de información cualitativa posible, como puede ser la ubicación de ciertos puntos fijos (o puntos críticos) y la evolución temporal del sistema en una pequeña región en torno a ellos.

2.4. Puntos críticos

En el análisis de un sistema dinámico no-lineal, el punto de partida consiste en ubicar los puntos críticos $\boldsymbol{x}^*$, los cuales son puntos del espacio de fases en los que se anula el campo de la Ec. (2.2),

$$f_i\left(\boldsymbol{x^*}\right) = 0, \quad \forall \ 1 \leq i \leq N.$$

Una trayectoria que en algún instante de tiempo t_1 alcanza un punto crítico continuará allí perpetuamente ya que su velocidad (lado izquierdo de la Ec. (2.1)) se anula. Por lo tanto, se puede decir que los puntos críticos son puntos de equilibrio. A los fines de esta tesis, supondremos que los puntos críticos son aislados, es decir, que existe un entorno de cada uno de ellos en el que no hay más puntos críticos.

Estos puntos de equilibrio pueden clasificarse como “estables”, “inestables” o “puntos de ensilladura” [46].

2.4.1. Clasificación de los puntos críticos

Para determinar la estabilidad de un punto crítico, $\boldsymbol{x}_0$, es necesario linealizar el sistema de EDOs,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0) + \mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + O\left(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|^2\right),$$

donde $\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}$ es la matriz jacobiana del sistema evaluada en el punto crítico. A su vez, como $\boldsymbol{x}_0$ es un punto crítico, el primer término se anula, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$.

Definiendo $\delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$, podemos escribir la ecuación diferencial (2.1) en un pequeño entorno de $\boldsymbol{x}_0$ como:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_N \end{pmatrix} + O\left(\|\delta\boldsymbol{x}\|^2\right).$$

La estabilidad del punto fijo está determinada por los autovalores de la matriz $\mathbb{J}$, al menos en un entorno de radio $\epsilon > 0$.

Si todos los autovalores, λ_i, tienen su parte real no nula se dice que el equilibrio es hiperbólico. Siendo estable si $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$, para todos los autovalores. En cambio, si al menos un autovalor tiene parte real positiva, el equilibrio se vuelve inestable.

Un ejemplo típico de equilibrio hiperbólico es el del oscilador armónico (ver figura 2.1d),

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \tag{2.3a}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\omega^2 x_1. \tag{2.3b}$$

En este caso el único punto crítico es el origen. Como el sistema es lineal, el jacobiano coincide con la matriz del sistema. Los autovalores son imaginarios puros $\lambda_{1,2} = \pm\omega$, y las trayectorias son cerradas. Este tipo de equilibrio es muy poco frecuente ya que una

pequeña perturbación provoca una bifurcación (ver Sección 2.5) que desemboca en alguno de los dos tipos de equilibrios mencionados.

Si el sistema es bidimensional es posible realizar el análisis de estabilidad calculando el determinante y la traza de jacobiano. Los dos autovalores son

$$\lambda_1 = \frac{\mathrm{Tr}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right)}{2}\left[1+\sqrt{1-4\frac{\mathrm{Det}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right)}{\mathrm{Tr}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right)^2}}\right], \tag{2.4}$$

$$\lambda_2 = \frac{\mathrm{Tr}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right)}{2}\left[1-\sqrt{1-4\frac{\mathrm{Det}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right)}{\mathrm{Tr}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right)^2}}\right]. \tag{2.5}$$

Y por lo tanto los puntos críticos pueden ser:

- NODO: los dos autovalores son reales y del mismo signo. Esto ocurre si $4\mathrm{Det}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right) < \mathrm{Tr}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right)^2$.
  - El nodo es estable si $\lambda_{1,2} < 0$; lo cual ocurre si $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right) < 0$ y $\mathrm{Det}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right) > 0$.
  - El nodo es inestable si los autovalores son positivos ($\mathrm{Tr}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right) > 0$ y $\mathrm{Det}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right) > 0$).
- PUNTO DE ENSILLADURA: en este caso los autovalores son reales y de signo contrario. El punto de ensilladura es siempre inestable. En este caso el $\mathrm{Det}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right) < 0$.
- FOCO: cuando los autovalores son complejos conjugados, el punto de equilibrio es un foco, donde las trayectorias se acercan al (o alejan del) punto crítico en forma de espiral. Los focos aparecen para $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right)^2 < 4\mathrm{Det}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right)$.
  - Si $\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right) < 0$ es estable ($\mathrm{Tr}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right) < 0$).
  - Si $\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right) > 0$ es inestable ($\mathrm{Tr}\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{x}_0}\right) > 0$).
- CENTRO: los autovalores son complejos conjugados de parte real nula. En este caso, la traza es nula y el determinante positivo.

En la figura 2.1 se muestran los puntos críticos que describimos más arriba. A lo largo de la tesis suscribiremos a la convención de utilizar puntos rellenos cuando los puntos críticos sean estables, y puntos abiertos para identificar puntos inestables.

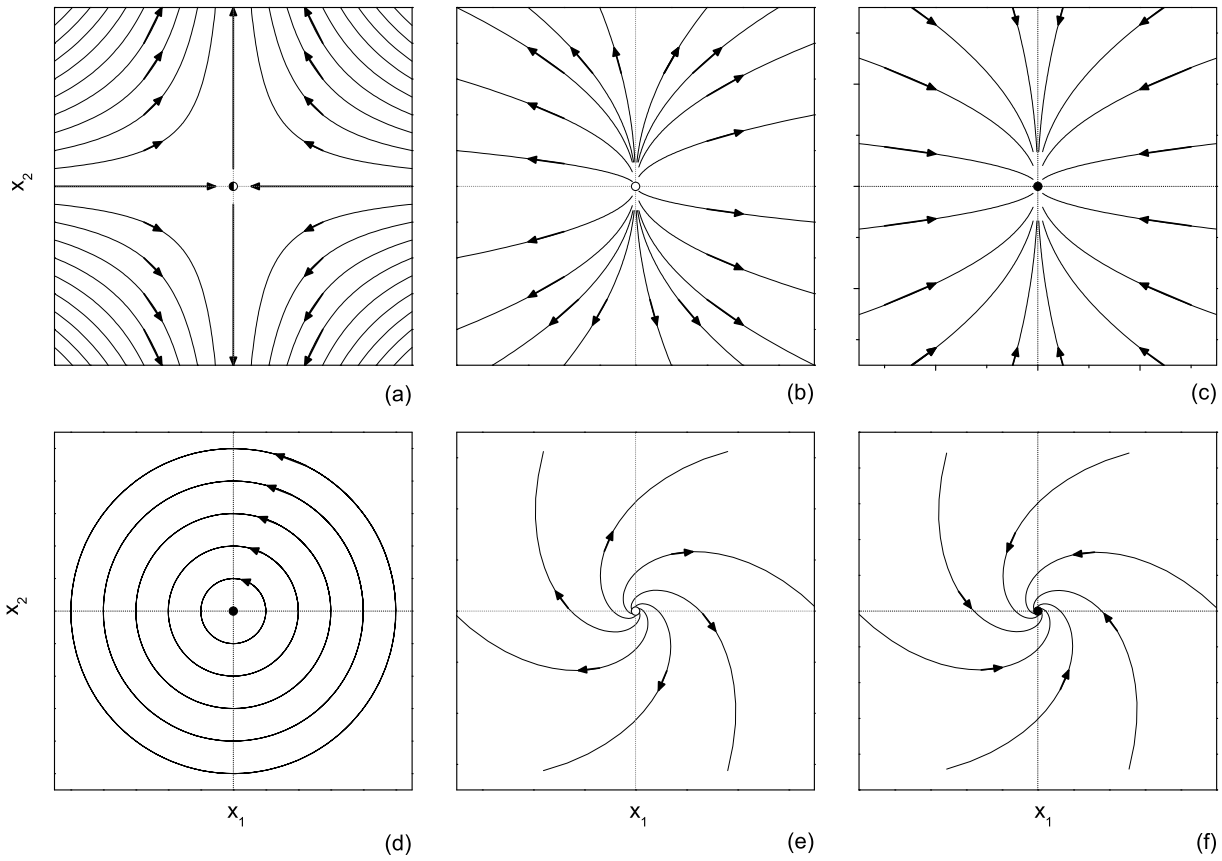


Figura 2.1: Clasificación de puntos críticos. (a) Punto de ensilladura. (b) Nodo inestable. (c) Nodo estable. (d) Centro. (e) Foco inestable. (f) Foco estable.

2.5. Bifurcaciones

En general el sistema físico que representa la Ec. (2.1) depende de ciertos parámetros $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M)$. Muchas veces, la dinámica del DS cambia cualitativamente debido a una pequeña variación en alguno de los parámetros α_i. Las bifurcaciones del sistema dinámico corresponden a estos cambios en la dinámica.

Consideremos nuevamente un sistema de EDOs,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \epsilon),$$

donde ϵ es un parámetro del sistema. Una bifurcación se produce en $\epsilon = \epsilon_0$ si para $\epsilon_1 > \epsilon_0$ y $\epsilon_2 < \epsilon_0$ la dinámica es topológicamente diferente a uno y otro lado. La dinámica puede modificarse de diversas formas, por ejemplo, puede cambiar el número de puntos de equilibrio, la estabilidad de los mismos o ambas cosas a la vez. El estudio de las bifurcaciones busca construir diagramas que dividan al espacio de parámetros ϵ en regiones de dinámica equivalente.

2.5.1. Bifurcación "saddle-node"

Este tipo de bifurcación se caracteriza por la creación y destrucción de puntos fijos al variar el parametro de control, ϵ. La sencilla ecuación diferencial

$$\dot{x} = x^2 + \epsilon,$$

permite comprender la característica esencial de este tipo de bifurcaciones. En esta ecuación hay dos regiones:

- Si $\epsilon < 0$, los puntos de equilibrio (nodos) son $x_1 = -\sqrt{-\epsilon}$ y $x_2 = \sqrt{-\epsilon}$. Siendo x_1 un nodo estable, y x_2 uno inestable.
- Si $\epsilon > 0$, no hay puntos críticos.
- Para $\epsilon = 0$ ocurre la bifurcación. En este caso el único punto de equilibrio, $x = 0$, es un nodo inestable.

En la figura 2.2 se muestra el diagrama de bifurcaciones correspondiente a la bifurcación saddle.

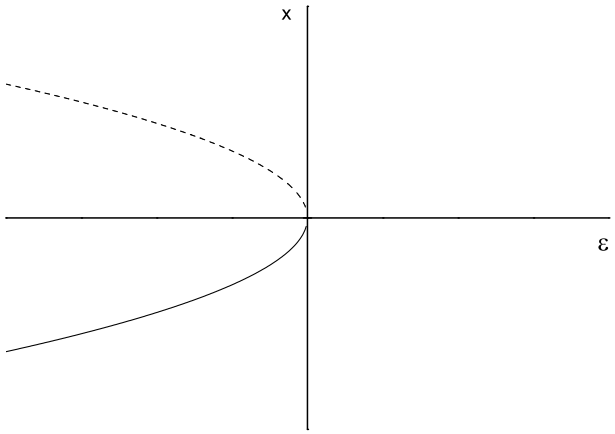


Figura 2.2: Bifurcación Saddle-Node. La línea llena corresponde al equilibrio estable y la punteada corresponde al equilibrio inestable.

2.5.2. Bifurcación "pitchfork"

Existen dos tipos de bifurcaciones pitchfork, las supercríticas y las subcríticas. Ambas pueden aparecen en sistemas con simetría ante transformaciones $x \to -x$. La forma normal asociada a la bifurcación pitchfork supercrítica es

$$\dot{x} = x\left(\epsilon - x^2\right). \tag{2.6}$$

En este caso, como veremos, la presencia del término cúbico permite estabilizar a los puntos de equilibrio. Igualando el lado derecho a cero obtenemos los puntos críticos, $x_0 = 0$ y $x_{1,2} = \pm\sqrt{\epsilon}$. Analizamos el comportamiento de los puntos críticos al variar ϵ:

- Si $\epsilon < 0$, el origen es el único punto crítico, siendo un nodo estable.
- Si $\epsilon > 0$, el origen se vuelve inestable y aparecen x_1 y x_2, ambos estables.
- Para $\epsilon = 0$ ocurre la bifurcación. En este caso el único punto de equilibrio, $x = 0$, es un nodo estable.

En la figura 2.3 se muestra el diagrama de bifurcaciones asociado a la Ec. (2.6).

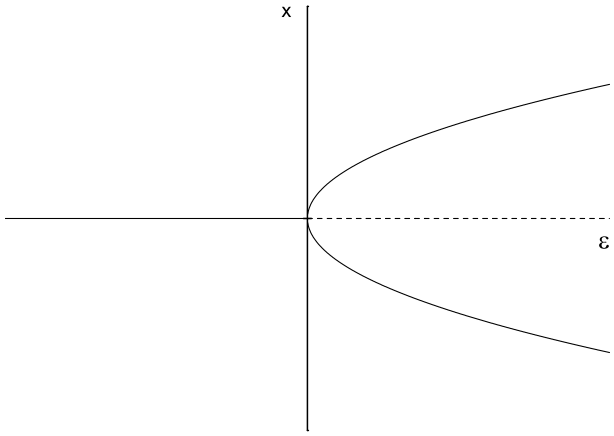


Figura 2.3: Bifurcación asociada a la forma normal dada por la Ec. (2.6). La línea llena corresponde a equilibrio estable y la punteada corresponde a equilibrio inestable.

En cuanto a la bifurcación pitchfork subcrítica, la EDO correspondiente es

$$\dot{x} = x\left(\epsilon + x^2\right).$$

En este caso el término de orden 3 es positivo y por lo tanto desestabiliza (a la inversa de lo que ocurría en el caso supercrítico). En la figura 2.4 se muestra el diagrama de bifurcaciones pitchfork subcrítica.

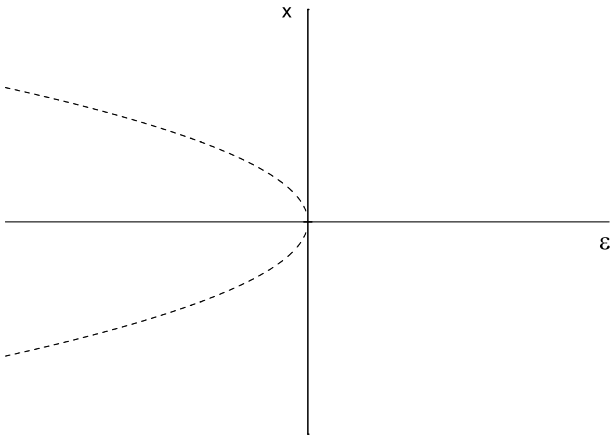


Figura 2.4: Bifurcación pitchfork subcrítica. La línea llena corresponde a equilibrio estable y la punteada corresponde a equilibrio inestable.

2.6. Oscilador biestable

La base de nuestro estudio es el oscilador biestable estocástico. Comencemos analizando el comportamiento de este sistema en ausencia de ruido, i.e., el caso determinista. Sea una partícula de masa m cuya dinámica está gobernada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\left[\gamma\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x}\right], \tag{2.7}$$

donde $\gamma dx/dt$ representa una fuerza de rozamiento viscoso, y $\partial U/\partial x$ es la fuerza externa que actúa sobre la partícula y que se deriva del potencial biestable

$$U(x) = U_0\left(\frac{x}{x_c}\right)^2\left[\left(\frac{x}{x_c}\right)^2 - 2\right]. \tag{2.8}$$

Como se puede ver en la figura 2.5, el potencial posee dos mínimos, $x_{1,3} = \pm x_c$ y un máximo $x_2 = 0$.

Para llevar a cabo el análisis de estabilidad es conveniente convertir la Ec. (2.7) en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\frac{dx}{dt} = v, \tag{2.9a}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(-1)}{m}\left[\gamma v + \frac{\partial U}{\partial x}\right]. \tag{2.9b}$$

Los puntos críticos se obtienen de la intersección de las curvas

$$f_1(x,v) = v = 0, \qquad f_2(x,v) = \gamma v + \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Resulta simple ver que los únicos puntos críticos son

$$(-x_c, 0)\,,\ (0,0)\ \text{ y }\ (x_c, 0)\,.$$

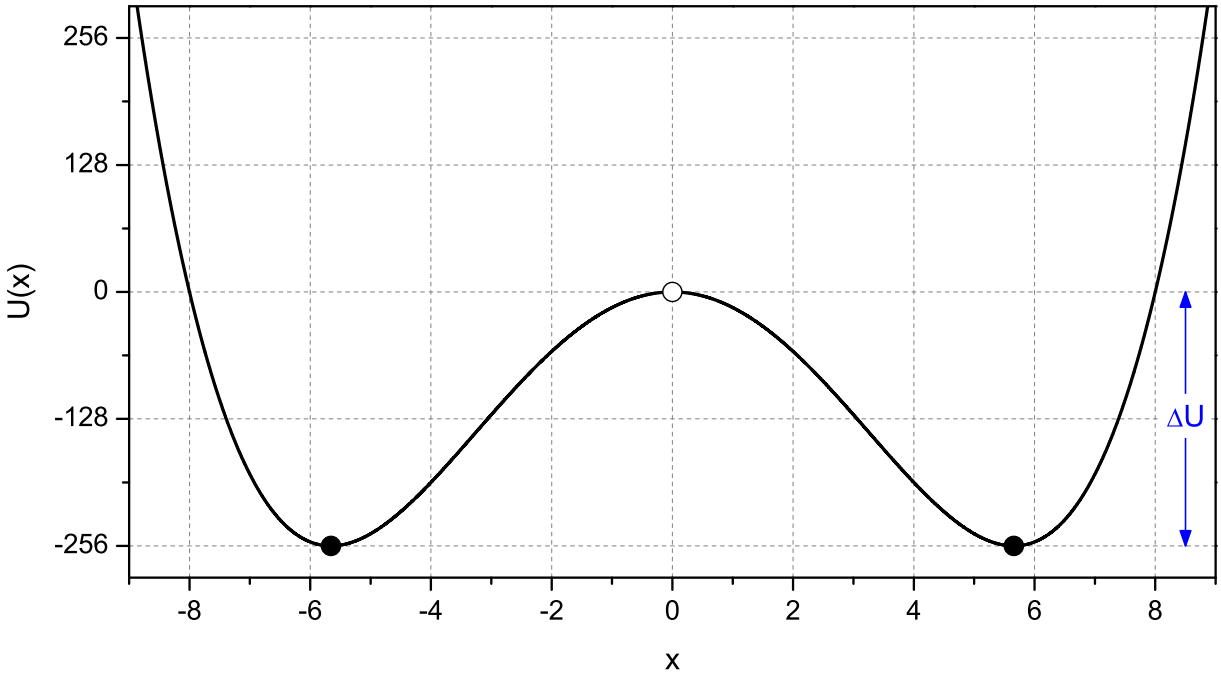


Figura 2.5: Potencial biestable definido por la Ec. (2.8) con los parámetros $U_0 = 256$ y $x_c = \sqrt{32}$. Posee dos mínimos ubicados simétricamente en $x_{1,3} = \pm x_c$ y un máximo en el origen. La profundidad del potencial es $\Delta U = U(0) - U(x_c) = -U_0 = -256$.

2.6.1. Análisis de estabilidad

- Estabilidad del punto $(0, 0)$: Comenzamos el análisis desarrollando la Ec. (2.9) a primer orden obteniendo

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4U_0/mx_c^2 & -\gamma/m \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta v \end{pmatrix},$$

donde hemos definido $\delta x = x$ y $\delta v = v$. Los autovalores son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{\gamma}{2m}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{16mU_0}{(\gamma x_c)^2}}\right], \\ \lambda_2 &= -\frac{\gamma}{2m}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{16mU_0}{(\gamma x_c)^2}}\right]. \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$, concluimos que el origen es un punto de ensilladura.

- Estabilidad de los puntos $(\pm x_c, 0)$: Desarrollando nuevamente la Ec. (2.9) a primer orden obtenemos

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8U_0/mx_c^2 & -\gamma/m \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta v \end{pmatrix}.$$

En este caso $\delta x = x - (\pm x_c)$ y $\delta v = v$ y los autovalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{\gamma}{2m}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{32U_0 m}{(\gamma x_c)^2}}\right], \\ \lambda_2 &= -\frac{\gamma}{2m}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{32U_0 m}{(\gamma x_c)^2}}\right], \end{aligned}$$

son los mismos para los dos puntos críticos.

Dependiendo del valor relativo del coeficiente de amortiguamiento podemos distinguir dos comportamientos diferentes. Si γ es pequeño,

$$\gamma < \gamma_0 = \frac{\sqrt{32U_0 m}}{x_c},$$

ambos autovalores son complejos conjugados, con su parte real negativa. De aquí que el punto crítico es un foco estable (en el límite $\gamma \to 0$ el foco se convierte en un centro). En cambio, si $\gamma \geq \gamma_0$ los autovalores pasan a ser reales negativos y, por lo tanto, el punto crítico se convierte en un nodo. En el extremo $\gamma \to \infty$ la partícula queda sobreamortiguada y todas las trayectorias rápidamente convergen al eje $v = 0$. Para γ grande la Ec. (2.7) se reduce, por lo tanto, a una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{2.10}$$

En la figura 2.6 se muestran las trayectorias en el espacio de fases del oscilador biestable definido por el sistema (2.9) para $\gamma = 0$, $\gamma = \gamma_0/8$ y $\gamma = 7\gamma_0$. Las líneas azules corresponden al autovalor negativo del desarrollo en torno al origen y, como

se puede ver, son convergentes. Mientras que las líneas rojas corresponden al otro autovalor. En este caso, las trayectorias que comienzan en la vecindad del origen se alejan indefinidamente.

De aquí en adelante, cuando mencionemos al oscilador biestable estaremos considerando el límite sobreamortiguado, es decir, la Ec. (2.10).

2.7. Resonancia estocástica en un potencial biestable

Para ilustrar el fenómeno de la resonancia estocástica volvamos por un instante al sistema introducido en la Sección 2.6: una partícula sobreamortiguada de masa m moviéndose en un potencial biestable simétrico $U(x)$ (ver figura 2.5). El sistema se encuentra en un baño de ruido blanco gaussiano de intensidad σ^2, responsable de inducir transiciones entre los dos estados estables. La dinámica de esta partícula puede ser descripta por medio de la ecuación de Itô [47],

$$\dot{x} = -\frac{dU}{dx}(x) + F^e(t) + \sigma\xi(t), \tag{2.11}$$

donde $F^e(t)$ es una fuerza que puede o no ser periódica. Consideremos por ahora el caso armónico, $F^e(t) = F_0 \cos(\Omega t)$, dejando para más adelante el caso no periódico. Resulta más útil considerar a la fuerza como un modulador del potencial,

$$U_{\text{eff}}(x,t) = U(x) - xF_0 \cos(\Omega t). \tag{2.12}$$

Este nuevo potencial dependiente del tiempo se inclinará primero hacia la izquierda y luego hacia la derecha (figura 2.7), de modo que siempre uno de los pozos quede más abajo. Esto ocurre ya que la amplitud de la fuerza, F_0, no es lo suficientemente grande como para hacer que la partícula viaje de un pozo al otro.

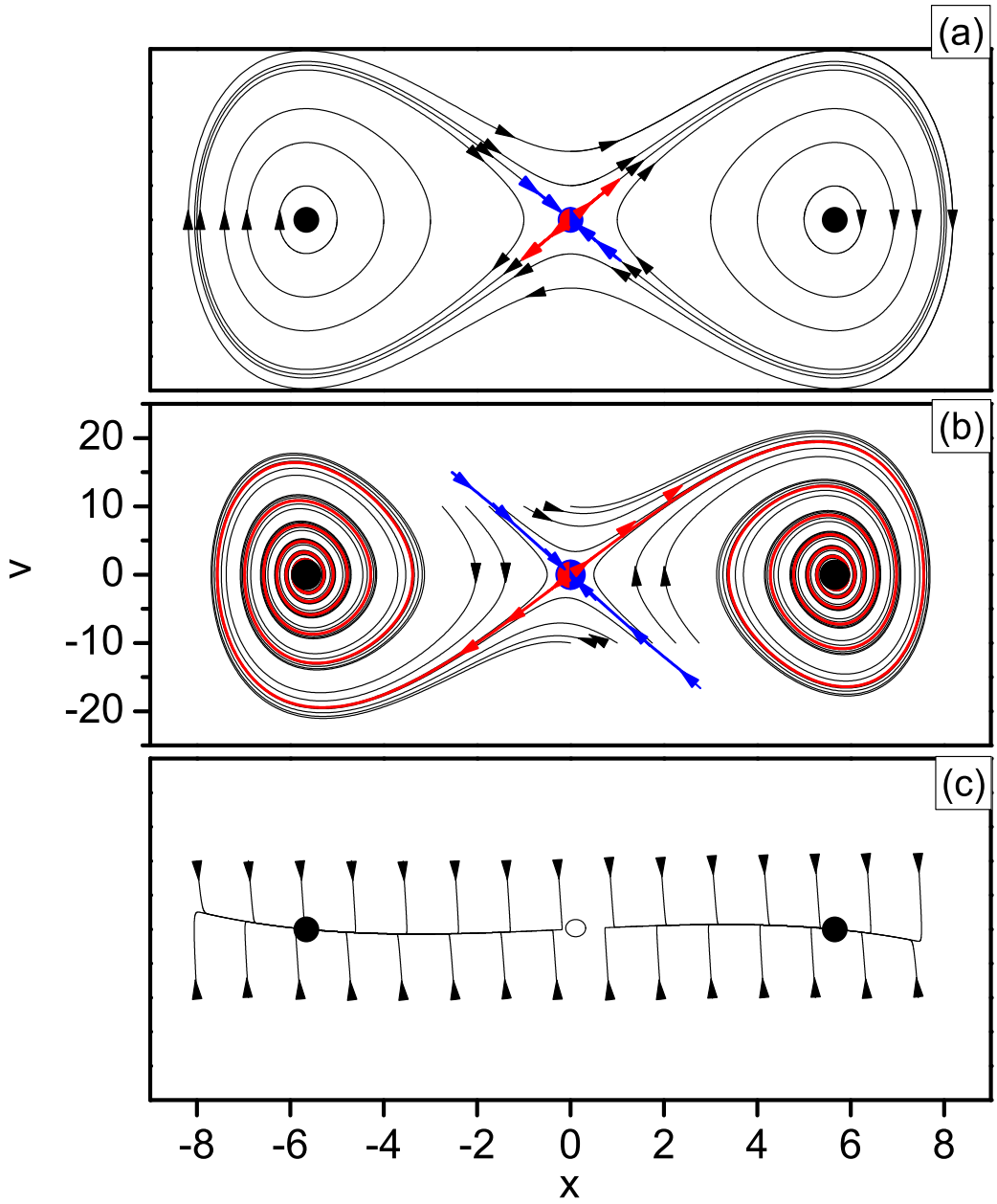


Figura 2.6: Diferentes clases de trayectorias en el espacio de fases del oscilador biestable como resultado de diferentes condiciones iniciales y parámetros de amortiguamiento. (a) $\gamma = 0$, el oscilador no está amortiguado y las trayectorias son cerradas. (b) $\gamma = \gamma_0/8$, las trayectorias convergen hacia los focos en forma espiral debido al amortiguamiento. (c) $\gamma = 7\gamma_0$.

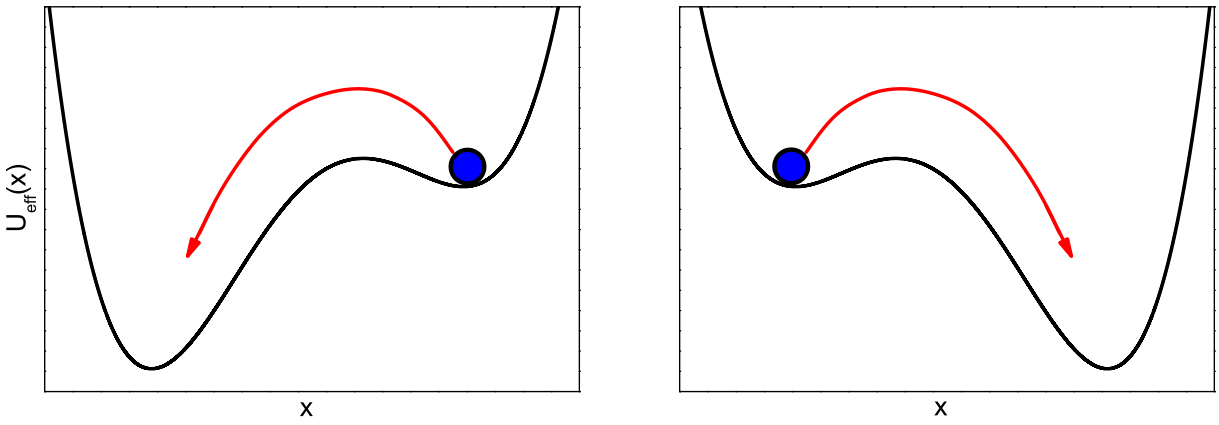


Figura 2.7: Potencial efectivo definido por la Ec. (2.12).

Si $F_0 = 0$, el tiempo necesario para que la partícula atraviese la barrera de potencial (conocido como "tiempo de escape") coincide con la inversa de la tasa de Kramers (es decir, la inversa de la tasa de transición media inducida únicamente por el ruido) [48]:

$$\tau_\kappa = \frac{1}{r_\kappa} = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(x_c)\,U''(x_0)}} \exp\left(\frac{\Delta U}{\sigma^2}\right). \tag{2.13}$$

Como se puede ver, τ_κ es una función monótona decreciente de σ. A su vez, depende de la altura de la barrera, ΔU, y de las curvaturas en los puntos de equilibrio, $U''(x_c)$ y $U''(x_0)$.

Luego, para $F_0 \neq 0$, podemos reescribir la Ec. (2.13)

$$\tau_\kappa \approx \frac{2\pi}{\sqrt{U''(x_c)\,U''(x_0)}} \exp\left(\frac{\Delta U + x_c F_0}{\sigma^2}\right). \tag{2.14}$$

Así pues, el sistema cuenta con dos tiempos característicos, τ_κ y el período de la señal externa, $T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega}$. La resonancia estocástica ocurre cuando aproximadamente coinciden ambos tiempos:

$$T_\Omega = 2\tau_\kappa. \tag{2.15}$$

Reemplazando la Ec. (2.14) en (2.15) obtenemos

$$T_\Omega = \frac{4\pi}{\sqrt{U''(x_1)\,U''(x_0)}} \exp\left(\frac{\Delta U + x_c F_0}{\sigma^2}\right). \tag{2.16}$$

De la Ec. (2.16) vemos que sintonizando la intensidad del ruido externo podemos controlar el período de transición entre pozos.

En la próxima Sección veremos cómo es posible caracterizar la SR tanto para señales armónicas como arbitrarias.

2.8. Herramientas cuantitativas para caracterizar la resonancia estocástica

Llegar a cuantificar correctamente la resonancia estocástica puede ser una tarea difícil. En los trabajos iniciales, la SR estuvo asociada a un DS sumergido en un baño de ruido forzado por una determinada señal. Cuando la señal externa es armónica, una manera efectiva y habitualmente utilizada de ponderarla es en términos de la altura de un pico (a la frecuencia de la señal) en el espectro de potencias. Emerge pues, la relación señal-ruido [15, 49] como la herramienta natural para caracterizar la resonancia estocástica.

La SNR no es la única medida aceptada para cuantificar la SR de sistemas forzados con una señal armónica. Otra magnitud frecuentemente usada es la amplificación espectral de potencia (PSA del inglés *Power Spectral Amplification*) [49–52], utilizada para comparar la potencia de la señal a la salida con respecto de la entrada.

2.8.1. Relación señal-ruido de una señal periódica

Del mundo de las comunicaciones se sabe que la SNR proporciona una medida del peso relativo que tiene el ruido en la respuesta del sistema. Se la define como el cociente

entre las potencias de la señal $\mathrm{P_S}$ y del ruido $\mathrm{P_R}$,

$$\mathrm{SNR} = \frac{\mathrm{P_S}}{\mathrm{P_R}}. \tag{2.17}$$

Ambas potencias se pueden calcular en el espacio de frecuencias a partir de la PSD a la salida del sistema

$$\mathrm{S}(f) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \mathrm{e}^{-\imath 2\pi f t} dt \right|^2.$$

En la figura 2.8 mostramos una PSD típica obtenida a la salida del sistema (2.11) en condición de resonancia (Ec. (2.15)). Como se puede observar, podemos describir $\mathrm{S}(f)$ en forma cualitativa como un fondo de ruido ($\mathrm{S_R}(f)$) donde se destaca un conjunto de picos centrados a la frecuencia de la señal, $f_1 = \Omega/2\pi$, y sus armónicos impares, $f_i = (2i-1)f_1$, $i \geq 1$.

La densidad espectral de potencia de ruido se determina interpolando $\mathrm{S_R}$ en la frecuencia de la señal externa

$$\mathrm{P_R} = \mathrm{S_R}(f_1), \tag{2.18}$$

mientras que para determinar la potencia de la señal, asumimos que es periódica con la frecuencia de la señal externa. De aquí que la potencia de la señal es la potencia concentrada en la frecuencia externa a la que se le substrae la potencia de ruido

$$\mathrm{P_S} = \lim_{\Delta f \to 0} \left[\frac{1}{2\Delta f} \int_{F-\Delta f}^{F+\Delta f} \mathrm{S}(f)\, df \right] - \mathrm{S_R}(f_1). \tag{2.19}$$

Reemplazando las Ecs. (2.18) y (2.19) en la definición de SNR, Ec. (2.17),

$$\mathrm{SNR} = \frac{1}{\mathrm{S_R}(f_1)} \left[\lim_{\Delta f \to 0} \frac{1}{2\Delta f} \int_{F-\Delta f}^{F+\Delta f} S(f)\, df \right] - 1 \tag{2.20}$$

Es bien sabido que si el DS fuera lineal la SNR solo empeoraría con la adición de ruido. Por otro lado, en un sistema no-lineal que presenta SR, la SNR posee un máximo para

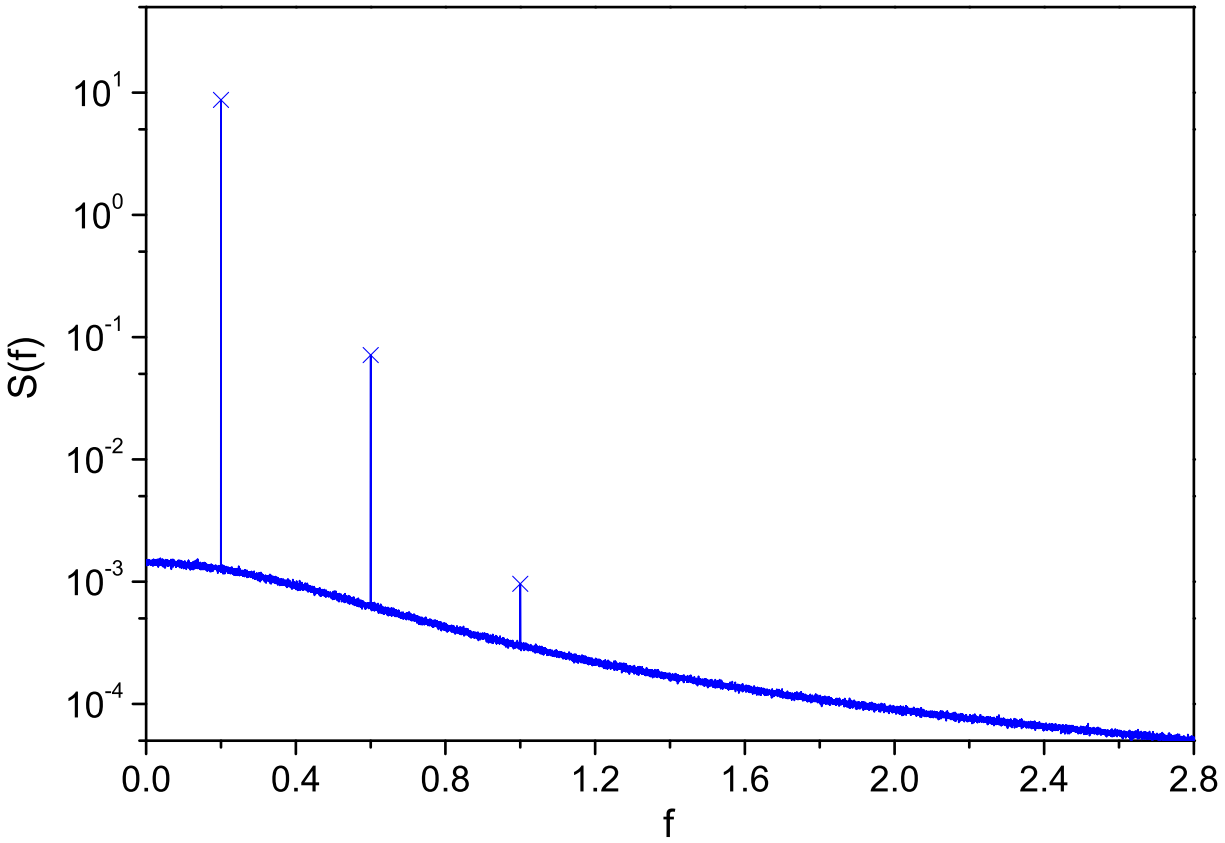


Figura 2.8: Densidad espectral de potencia del sistema definido por la Ec. (2.11) en condición de resonancia estocástica. La PSD está formada por un fondo de ruido típico (S_R) de donde se destaca un conjunto de picos centrados a la frecuencia de la señal, $f_1 = F$, y sus armónicos.

una intensidad de ruido no nula. En [49, 53] pueden encontrarse diversos cálculos llevados a cabo para determinar la SNR analíticamente. En la figura 2.9 mostramos la SNR en función de la intensidad de ruido para el oscilador de la Ec. 2.11.

2.8.2. Amplificación espectral de potencia

Alternativamente se puede medir la resonancia estocástica a través de la PSA. La misma se calcula como el cociente entre la potencia a la salida evaluada en la frecuencia

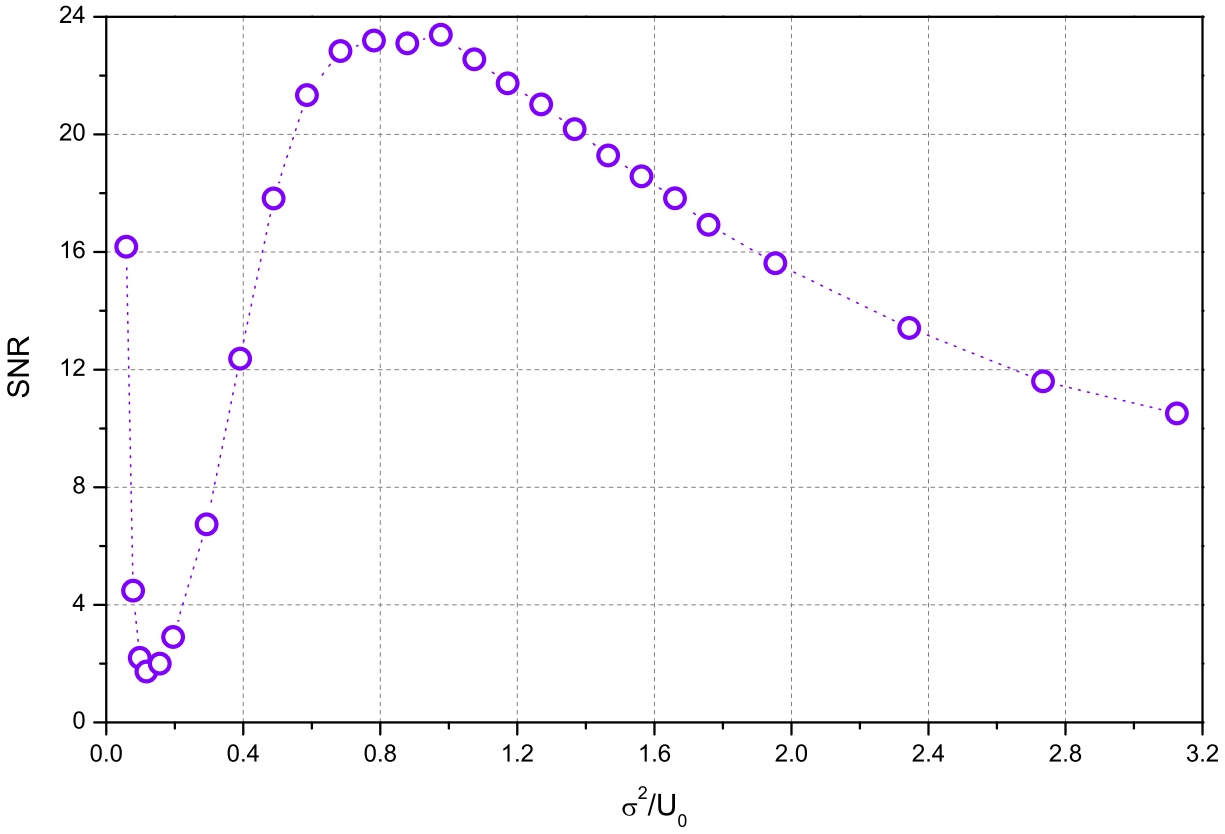


Figura 2.9: Relación señal-ruido en función de la intensidad de ruido para un oscilador biestable forzado por una señal periódica subumbral. Para $\sigma^2/U_0 > 1$ la SNR se degrada con el incremento de ruido. El aspecto relevante ocurre para $\sigma^2/U_0 < 1$ donde la SNR crece al aumentar la intensidad del ruido.

de la forzante, y la potencia de la señal de entrada [50] como

$$\eta = \frac{S(\Omega)}{\pi {F_0}^2}. \tag{2.21}$$

Obsérvese que cuando se trata de una señal armónica, la potencia de la misma es $p_{\text{en}} = \pi {F_0}^2$.

2.8.3. Correlación cruzada

Al generalizar el concepto de SR, permitiendo señales no periódicas, es necesario introducir nuevas medidas para caracterizarla. Si la señal $F^e(t)$ utilizada para forzar al DS

es completamente arbitraria (con la única condición de tener valor medio nulo) es posible medir el desempeño a través de la correlación cruzada entre la señal de entrada y la respuesta del sistema [39, 41, 42]. Esta medida, además, permite determinar el retardo medio de la respuesta del sistema con respecto a la señal de entrada.

La correlación cruzada se define como:

$$X_{Corr}(\tau) = E\left[F^e(t)\, x^*(t+\tau)\right].$$

En el caso particular que las señales sean conjuntamente ergódicas, la expresión anterior se reduce a:

$$X_{Corr}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F^e(t)\, x(t+\tau)\, dt, \tag{2.22}$$

donde $F^e(t)$ es la señal de entrada y $x(t)$ es la respuesta del DS. $X_{Corr}(\tau)$ alcanza su máximo para cierto tiempo t_M que, siempre que el sistema sea ergódico, corresponde al retraso medio que se produce al atravesar el sistema.

El fenómeno de la SR con señal arbitraria dio origen al concepto de resonancia estocástica aperiódica (ASR, del inglés *Aperiodic Stochastic Resonance*).

2.8.4. Tasa de error

Otra herramienta utilizada para caracterizar el desempeño de la ASR es la tasa de error. Este parámetro es uno de los más utilizados para medir la calidad de un sistema de comunicación digital [54]. La BER representa la forma más simple de evaluar la eficiencia de una transmisión binaria, cuantifica la probabilidad de error de cada bit transmitido por el canal.

La BER depende de una gran cantidad de factores, entre ellos el formato de modulación utilizado para transmitir (RZ del inglés *Return-to-Zero*, NRZ del inglés *Non-Return-to-Zero*, Bipolar, Manchester, etc.), la respuesta en frecuencia de la línea, el "jitter", la

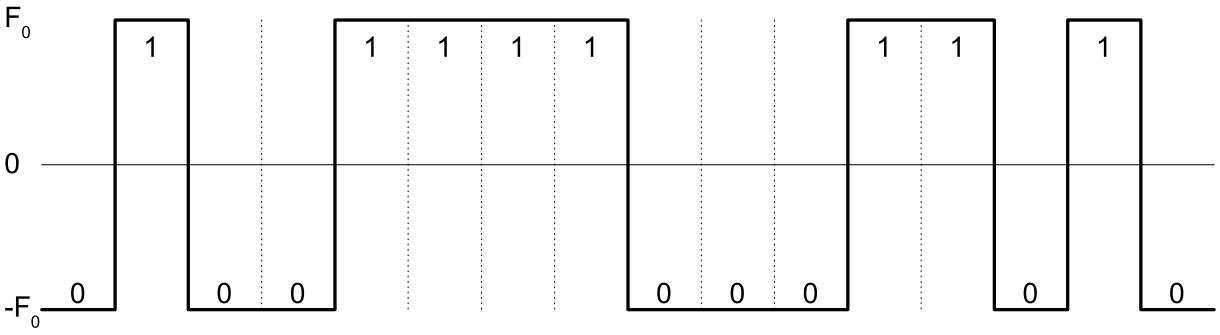


Figura 2.10: Esquema de la señal F^e compuesta por una secuencia de bits pseudoaletoria a la entrada del sistema. Los 1s están caracterizados por un nivel F_0 y los 0s por un nivel $-F_0$.

dispersión, la potencia del emisor, del nivel de ruido, etc. Por ejemplo, una tasa de error BER $= 10^{-4}$ corresponde en promedio a un bit incorrectamente detectado por cada diez mil transmitidos.

La forma más simple de transmitir una señal digital es modulándola en formato NRZ, donde a cada símbolo binario se le asigna un único valor (alto o bajo) durante todo el intervalo del bit (T_B). Al hacer un uso eficaz del ancho de banda, se lo suele utilizar en sistemas en los cuales existen limitaciones de ancho de banda. Sin embargo, en la transmisión de una secuencia de bits codificadas en formato NRZ es necesario tratar de evitar largas secuencias de bits idénticos porque, en tal caso, puede perderse la sincronización [55].

El jitter corresponde, básicamente, a las variaciones de fase aleatorias que experimenta una señal digital. Entre sus efectos adversos podemos mencionar la degradación en la BER producto de la pérdida de sincronismo, provocando eventualmente interferencia intersimbólica (ISI, del inglés *Intersymbol interference*) [54].

Una secuencia PRBS puede ser descrita por la siguiente expresión (ver figura 2.10)

$$F^e(t) = F_0 \sum_{j=0}^{\infty} B_j S\left(t - jT_B\right), \tag{2.23}$$

donde F_0 es la intensidad de la fuerza externa, T_B es la duración de cada bit, B_j es un

número elegido en forma pseudoaleatoria entre $\{-1, +1\}$, $S(t)$ es 1 para $0 \leq t \leq T_B$ y 0 en cualquier otra región.

La base de las señales digitales son los bits [55]. Cada bit representa un "0" o un "1" lógicos. Es decir que un error puede ocurrir si el detector interpreta un "1" cuando a través de la línea se transmitó un "0" y viceversa. Definamos $P(i/j)$, con $\{i, j\} = 0, 1$, como la probabilidad de interpretar i habiendo transmitido un j, entonces la tasa de error en un canal binario es

$$\text{BER} = p(0) P(1/0) + p(1) P(0/1), \tag{2.24}$$

donde $p(0)$ y $p(1)$ son las probabilidades de ocurrencia de "0" y "1", respectivamente, en la secuencia de bits transmitida a través de la línea. Habitualmente la señal consta de la misma cantidad de "0"s y "1"s, por lo que $p(0) = p(1) = 1/2$. Esta situación se presenta, por ejemplo, en el caso de una señal PRBS compuesta por un número muy grande de bits. Entonces

$$\text{BER} = \frac{1}{2} [P(0/1) + P(1/0)]. \tag{2.25}$$

Una forma simple de detectar una señal en formato NRZ es mediante la integración en una región menor o igual al intervalo del bit

$$R_k = \int_{k T_B + T_1}^{k T_B + T_2} x(t)\, dt, \tag{2.26}$$

con $0 \leq T_1 < T_2 \leq T_B$. Comparando el valor de R_k con un umbral fijo, se toma una decisión sobre el valor del bit. Existen diversos esquemas para lograr la sincronización de la señal en el receptor (ver por ejemplo [55]). En nuestras simulaciones utilizaremos un esquema que no se puede usar en la práctica dado que asumiremos el conocimiento de la señal transmitida. En particular la secuencia de bits a la salida del sistema se sincroniza con la secuencia de entrada a través de la correlación cruzada entre ambas señales. La correlación cruzada permite obtener el tiempo de retardo medio (t_M) debido a la línea.

2.8.5. Estimación de la relación señal-ruido de una señal no periódica

Si bien habitualmente la SNR es utilizada para medir el desempeño de sistemas de comunicación analógicos, también puede ser utilizada para caracterizar sistemas digitales. Por ejemplo, si un canal de comunicación lineal se encuentra sometido a ruido blanco gaussiano aditivo (AWGN, del inglés *Additive White Gaussian Noise*), entonces al aumentar la SNR disminuye la BER [56]. Sin embargo, este resultado no es necesariamente válido en un canal no-lineal como el que analizamos aquí.

A diferencia de lo que ocurre con la densidad espectral de potencia de una señal armónica, que posee un pico en la frecuencia de la señal sobre un ruido de fondo, la PSD de una señal PRBS posee una estructura bastante compleja (ver figura 2.11). Por lo tanto, el procedimento descripto en la Sección 2.8 utilizado para calcular la SNR es claramente inapropiado para sistemas forzados por señales aperiódicas.

Según la teoría de señales aleatorias [55], la expresión analítica que describe la densidad espectral de potencia de una secuencia aleatoria de bits sin ruido, codificada en formato NRZ, es (ver figura 2.11)

$$\mathrm{S}\left(f\right) = T_B \left[\frac{\sin\left(\pi f T_B\right)}{\pi f T_B}\right]^2, \tag{2.27}$$

donde f es la frecuencia de la señal. Los ceros de esta función se ubican en los múltiplos de la tasa de la señal ($f_n = \frac{n}{T_B}$, con $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$). Al ser una función simétrica alcanza con observar la mitad del espectro (por simplicidad hemos elegido la región de frecuencias positivas $0 \leq f < \infty$).

Un cálculo elemental permite establecer que el 95 % de la potencia se encuentra en la

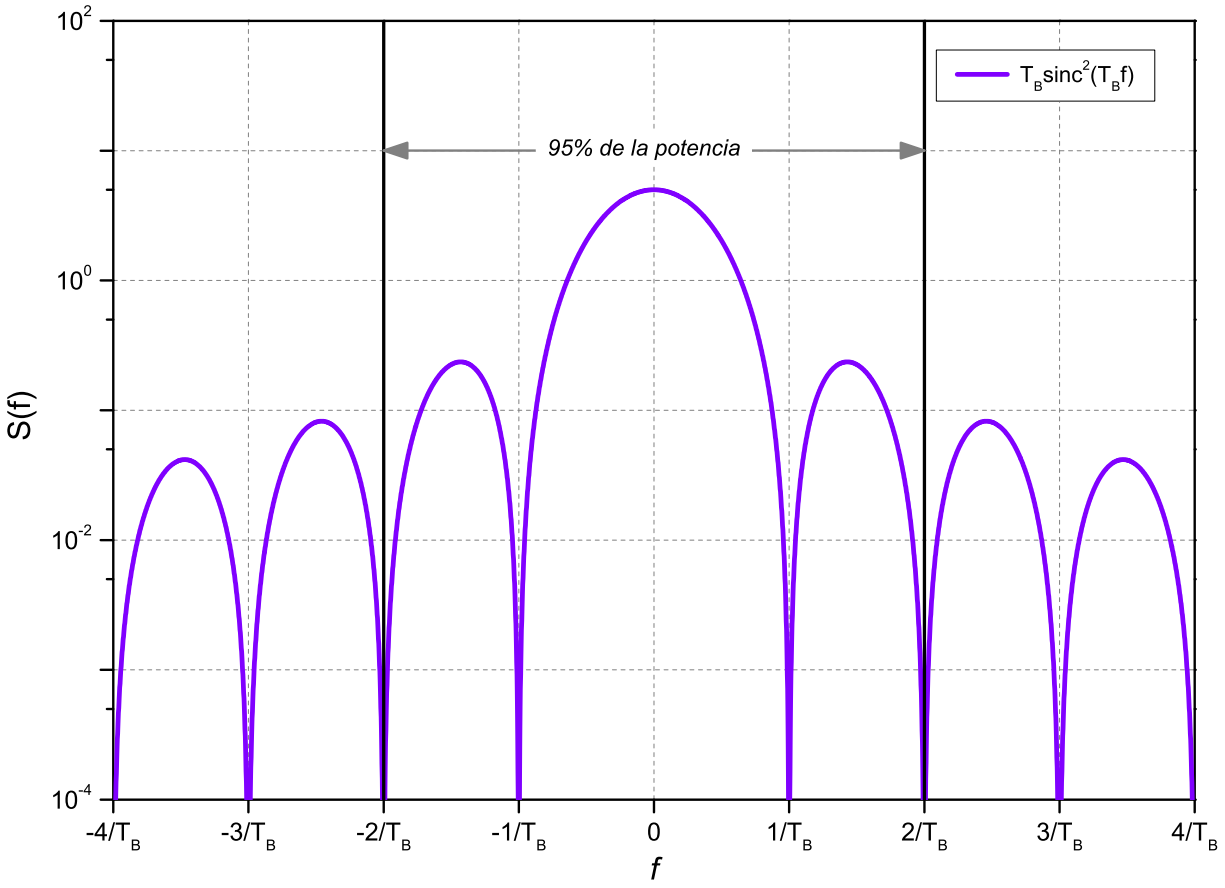


Figura 2.11: Densidad espectral de potencias de una señal PRBS codificada en formato NRZ, dada por la Ec. (2.27), en la banda de $-f_4$ - f_4. El 95 % de la potencia se encuentra comprendido en los primeros dos lóbulos.

región comprendida entre $f_0 = 0$ y $2f_1 = \frac{2}{T_B}$ (correspondiente al segundo cero),

$$\mathrm{F} = \frac{\int_{-2f_1}^{2f_1} \mathrm{S}\left(f\right) df}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{S}\left(f\right) df} = 0.95.$$

Por lo tanto podemos establecer que la potencia total se determina como

$$\mathrm{P_T} = \int_{-2f_1}^{2f_1} \mathrm{S}\left(f\right) df.$$

En una situación más realista la señal PRBS está afectada por ruido, por lo que necesitamos establecer un criterio que nos permita discriminar entre la señal y el ruido. En la

figura 2.12 comparamos la densidad espectral de una señal PRBS pura con la de una señal PRBS con ruido blanco gaussiano, generado numéricamente a partir de una secuencia de 2^{20} bits.

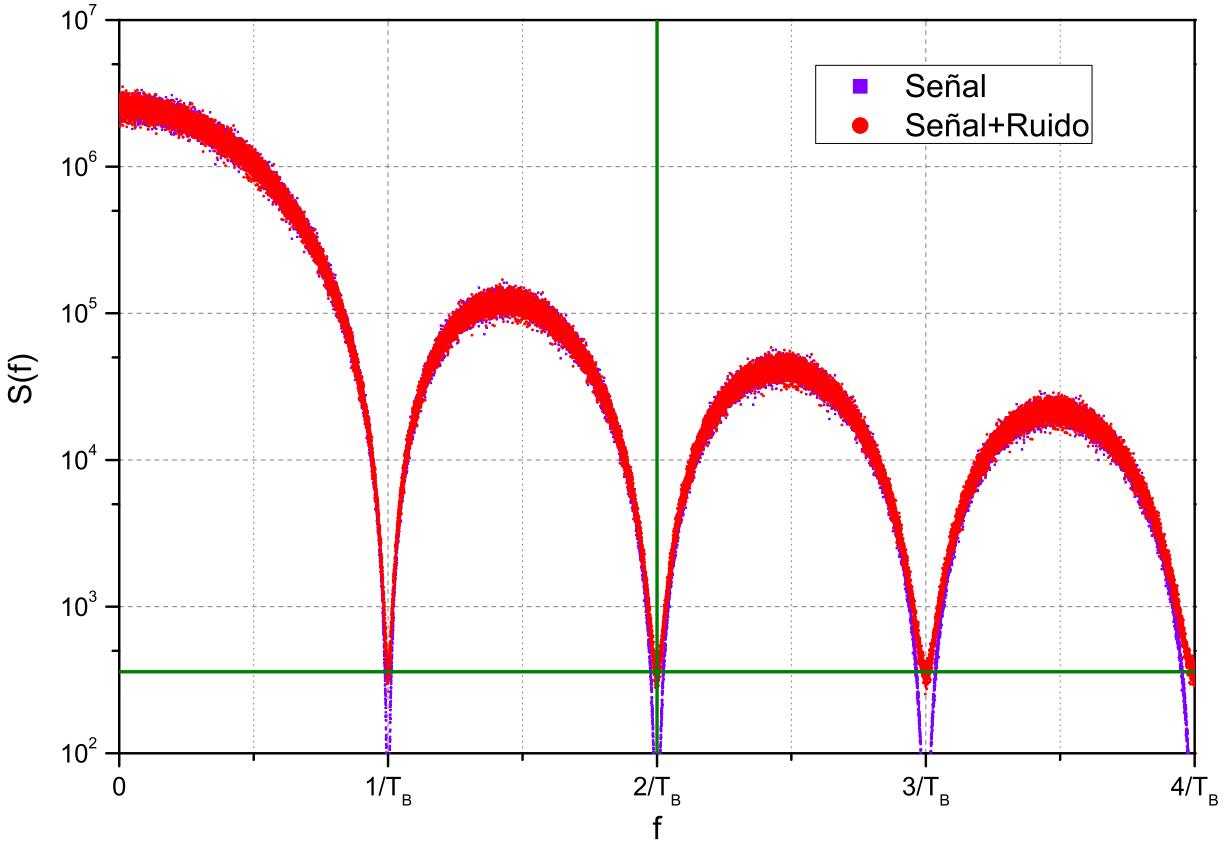


Figura 2.12: Comparación entre la densidad espectral de potencia de una señal PRBS pura y una sometida a ruido blanco gaussiano (con un 14 % de la potencia de la señal). Las raíces de la PSD de la señal pura desaparecen a medida que se agrega el ruido. La altura de la PSD de la señal ruidosa es constante para todas las frecuencias f_n, lo que permite estimar la potencia de ruido.

Como se puede ver, los ceros de la señal pura se transforman en mínimos locales. Esto nos da la pauta de cómo implementar un procedimiento para estimar la potencia de la señal.

La potencia de ruido se estima, en este caso, integrando la potencia espectral total en

una banda angosta centrada en la tasa de la señal f_1

$$\mathrm{P_R} = 2f_1 \left[\frac{1}{2\delta} \int_{f_1-\delta}^{f_1+\delta} \mathrm{S}\left(f\right) df \right]. \tag{2.28}$$

En esta expresión, el término encerrado entre corchetes representa la densidad de potencia de ruido. Al multiplicar por $2f_1$ estamos estimando que la potencia de ruido es uniforme en todo el rango $[0, 2f_1]$. En nuestras simulaciones escogimos $\delta = 2 \cdot 10^{-3} f_1$.

La potencia de señal se consigue restando

$$\mathrm{P_S} = \mathrm{P_T} - \mathrm{P_R}.$$

De aquí se desprende la siguiente definición de SNR:

$$\mathrm{SNR_1} = \frac{\displaystyle\int_0^{2f_1} \mathrm{S}\left(f\right) df - \frac{f_1}{\delta} \int_{f_1-\delta}^{f_1+\delta} \mathrm{S}\left(f\right) df.}{\displaystyle\frac{f_1}{\delta} \int_{f_1-\delta}^{f_1+\delta} \mathrm{S}\left(f\right) df}. \tag{2.29}$$

Podemos corroborar que la definición presentada en la Ec. (2.29) es una definición razonable de SNR comparándola con la que surge intuitivamente del análisis para un caso particular. Consideremos una señal PRBS de amplitud F_0 (Ec. 2.23) en ruido aditivo de potencia $\mathrm{P_R}$. Luego

$$SNR = \frac{F_0^2}{P_R}$$

Si el ruido es el resultado de filtrar ruido blanco gaussiano con un filtro ideal de ancho de banda W, la relación señal-ruido es

$$SNR_2 = \frac{F_0^2}{2\sigma^2 W}$$

donde σ^2 es la intensidad (densidad espectral de pontencia) del ruido blanco. Olvidando el escalamiento constante $1/2W$ podemos definir una relación señal-ruido que es el cociente de una potencia y una densidad espectral (Ver [53])

$$\mathrm{SNR_2} = \frac{F_0^2}{\sigma^2}, \tag{2.30}$$

La figura 2.13 muestra el gráfico de la SNR en función de la intensidad de ruido en el caso de una señal PRBS sometida a ruido blanco gaussiano aditivo utilizando los dos procedimientos enunciados. Como se puede apreciar, ambas definiciones poseen la misma dependencia funcional con la intensidad del ruido difiriendo únicamente en el factor de escala.

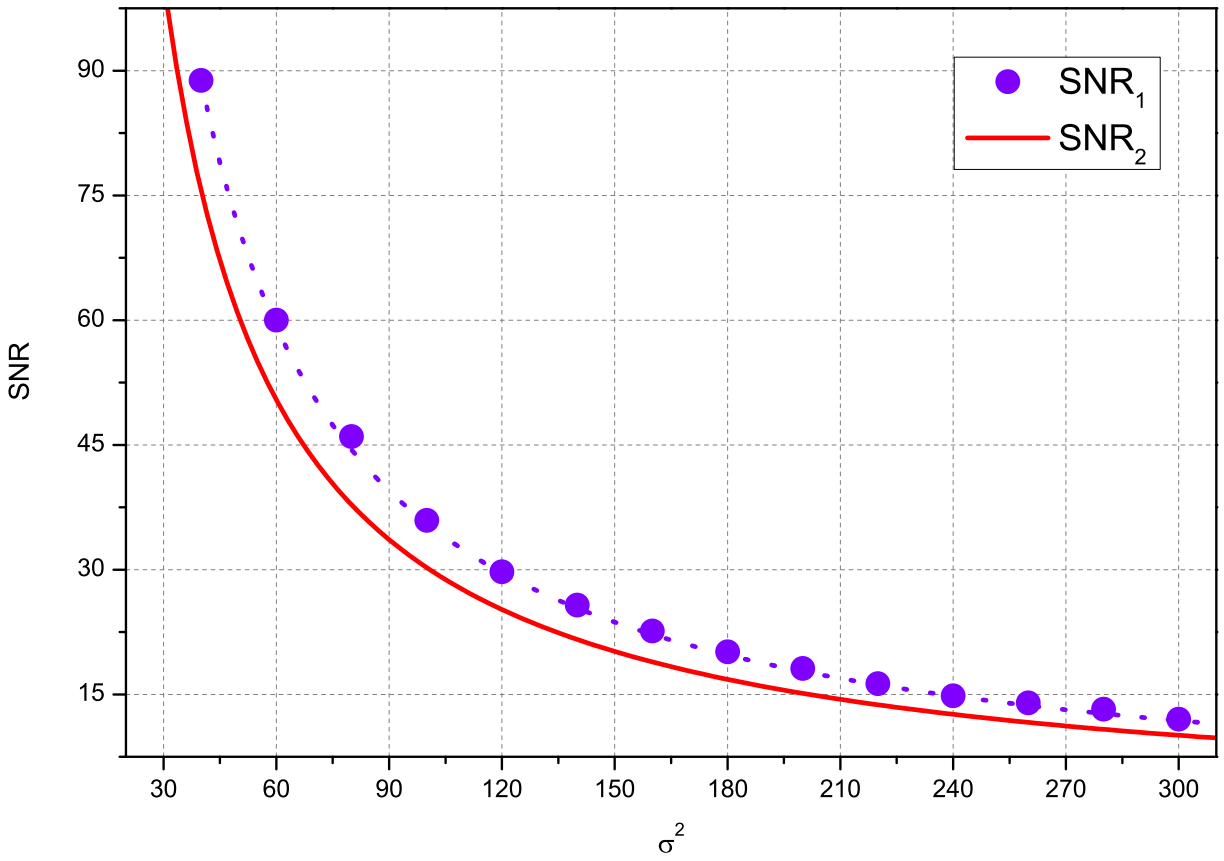


Figura 2.13: Relación señal-ruido de una señal PRBS codificada en formato NRZ obtenida a partir de las Ecs. (2.29) y (2.30) en función de la intensidad del ruido. Ambas definiciones poseen la misma dependencia funcional.

2.8.6. Factor *Q*

El factor "*Q*" o factor de calidad [54] es un parámetro que mide la calidad de una señal digital. Si se considera que el ruido presente en el canal tiene distribución gaussiana, el

factor Q se define como

$$Q \equiv \frac{I_1 - I_D}{\sigma_1} = \frac{I_D - I_0}{\sigma_0}, \tag{2.31}$$

donde I_0 e I_1 son las intensidades medias de los niveles "0" y "1" respectivamente. De igual modo σ_i con $i = 0, 1$ es la intensidad del ruido de cada nivel. Por último I_D, el umbral de decisión, se deduce de la Ec. (2.31),

$$I_D = \frac{\sigma_0 I_1 + \sigma_1 I_0}{\sigma_0 + \sigma_1}, \tag{2.32}$$

Cuando $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma$, el umbral se ubica en la mitad entre los niveles bajo y alto,

$$I_D = \frac{I_1 + I_0}{2} \tag{2.33}$$

y, por lo tanto, el factor Q se reduce a

$$Q = \frac{I_1 - I_0}{2\sigma}. \tag{2.34}$$

2.8.7. Canal lineal

Un caso particular ocurre cuando la señal se degrada con ruido blanco gaussiano aditivo. En este caso, se puede ver que las probabilidades $P(i/j)$ en la Ec. (2.25) están dadas por [54]

$$P(1/0) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{I_D - I_0}{\sqrt{2}\sigma_0}\right), \tag{2.35}$$

$$P(0/1) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{I_1 - I_D}{\sqrt{2}\sigma_1}\right), \tag{2.36}$$

donde $\text{erfc}(x)$ es la la función error complementaria, I_D está definido por la Ec. (2.33). Al reemplazar estas expresiones en la Ec. (2.24) obtenemos la tasa de error de un canal de comunicaciones discreto binario en un escenario de ruido blanco gaussiano aditivo,

$$\text{BER} = \frac{1}{4}\left[\text{erfc}\frac{(I_1 - I_D)}{\sqrt{2}\sigma_1} + \text{erfc}\frac{(I_D - I_0)}{\sqrt{2}\sigma_0}\right], \tag{2.37}$$

$$= \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{Q}{\sqrt{2}}\right). \tag{2.38}$$

Capítulo 3

TRANSMISION DE LA INFORMACION ASISTIDA POR RUIDO

3.1. Introducción

En los capítulos anteriores introdujimos el concepto de resonancia estocástica, presentamos el mecanismo elemental a partir del modelo de una partícula sobreamortiguada en un potencial biestable y, finalmente, enumeramos algunas de las herramientas que habitualmente se utilizan para cuantificar el fenómeno. No obstante, la resonancia estocástica no solo se ha observado en osciladores biestables aislados. Un aspecto interesante del fenómeno ocurre cuando el oscilador biestable forma parte de una cadena de elementos acoplados, donde la señal externa se aplica ya sea a un único oscilador o a todos los elementos simultáneamente. En ambos casos, el desempeño colectivo de la cadena puede ser optimizado ajustando tanto la intensidad de ruido como el acoplamiento.

Los primeros estudios realizados sobre la SR en una cadena de elementos acoplados fueron llevados a cabo por Jung et al. [57]. La cadena considerada estaba compuesta por osciladores biestables acoplados globalmente (cada oscilador interactúa con todos los demás), estadísticamente independientes, sometidos a ruido blanco gaussiano . Bajo

estas condiciones forzaban con una señal armónica a un único oscilador. Utilizando la SNR como herramienta de cuantificación hallaron que el fenómeno de la SR de cada oscilador es mayor cuando forma parte de la cadena que cuando está aislado. En [58] puede encontrarse la verificación experimental de este fenómeno utilizando un conjunto de diodos. Posteriormente, Bulsara et al. [59] analizaron el mismo sistema como modelo de red neuronal. Siewert et al. [60] hallaron expresiones analíticas para la SNR y la PSA de la cadena estudiando el comportamiento de cada oscilador con un modelo simplificado de dos estados.

Lindner et al. [61] consideraron una cadena de osciladores con acoplamiento entre vecinos únicamente y forzada de manera armónica en uno de sus extremos. En condición de resonancia estocástica, esta cadena presenta orden espacial y periodicidad temporal. Los resultados de este trabajo motivaron la aparición del término resonancia estocástica amplificada por el "conjunto" (AESR, del inglés *Array Enhanced Stochastic Resonance*).

Por otro lado, Y. Zhang et al. [62] investigaron el comportamiento de una cadena de osciladores acoplados unidireccionalmente (es decir que cada oscilador está sometido exclusivamente a la fuerza del oscilador precedente) excitada por una señal armónica, encontrando que es posible sintonizar el ruido para mejorar tanto la amplitud como la distancia recorrira por la señal, midiendo un parámetro similar a la SNR.

La cadena analizada por Chapeau-Blondeau et al. [63, 64] está formada por diez elementos no-lineales de dos estados, con umbral, acoplados unidireccionalmente. Forzando al primer elemento de la cadena con diferentes tipos de señales (periódicas y no-periódicas) midieron el desempeño a la salida a través de la SNR en el caso de la señal periódica, y de la correlación cruzada o de la "capacidad del canal" para señales arbitrarias. Demostraron también que es posible sostener la propagación de una señal amplificada por ruido.

De un modo semejante, Perazzo et al. [65] observaron en una línea de osciladores

biestables acoplados unidireccionalmente la propagación tolerante a fallas de una señal armónica, es decir que la señal continúa propagándose aun cuando se interrumpe la alimentación de ruido a un oscilador del centro de la cadena. A su vez, Carusela et al. [66] construyeron una cadena de cuatro STs como emuladores del potencial biestable para verificar experimentalmente que la cadena exhibe SR y que es capaz de sostener la propagación de una señal armónica.

Báscones et al. analizaron experimentalmente la propagación de pulsos en una cadena de osciladores de Chua operando en la región de biestablidad [67, 68]. En este trabajo el ruido es multiplicativo y controla las transiciones entre la región biestable y monoestable de cada oscilador individualmente.

En base a estos antecedentes resulta natural investigar la posible aplicación del fenómeno de la SR a las líneas de transmisión digital; un sistema operando en este régimen no solo sería más resistente a la degradación por ruido, sino que la transmisión de información en sí misma podría ser sostenida por el ruido. En esta temática García-Ojalvo et al. [69] analizaron la propagación de un tren de pulsos sostenida por ruido multiplicativo en un medio biestable.

En este capítulo analizaremos la dinámica de una cadena de N osciladores biestables acoplados unidireccionalmente funcionando como una línea de transmisión. El desempeño de la cadena será analizado utilizando herramientas propias del ámbito de las comunicaciones. Para ello enviaremos información (bits codificados en formato NRZ) a través de la línea y mediremos la relación señal-ruido (SNR adaptada al caso de una señal binaria) y la tasa de error (BER) (ver Sección 3.4). Los resultados de desempeño serán comparados con el desempeño de una línea que se degrada como producto de las sucesivas fuentes de ruido blanco gaussiano en cada elemento de la cadena (ver Sección 3.6).

En un canal de comunicación lineal la penalización está íntimamente relacionada con

la relación señal-ruido y con la tasa de error. La penalización establece, en un sistema lineal, cuánto hay que incrementar la potencia de la señal en el transmisor, de modo que la SNR se mantenga en una magnitud requerida, y así obtener la BER deseada. Este incremento se denomina "penalización de potencia". De manera similar, definiremos una penalización para la línea de transmisión no-lineal estudiada, que intenta medir que tan cercana a la intensidad de ruido óptima se debe estar para poder obtener una tasade error determinada a una distancia dada del transmisor.

Otro aspecto propio del mundo de las comunicaciones digitales que abordaremos es el de la utilización de la cadena de osciladores como una línea de retraso "sintonizable". Esta aplicación se ha vuelto muy relevante en los sistemas ópticos que emplean codificación en fase en lugar de codificación en amplitud [70]. Esta característica puede también encontrar aplicaciones en el campo de la regeneración óptica, ya que algunos sistemas para la amplificación y la conformación de pulsos ópticos (conocidos como "regeneradores 2R") emulan absorbentes saturables [71], los cuales se sabe, exhiben un comportamiento tipo SR [53].

Finalmente, ejemplificaremos los resultados de desempeño implementando experimentalmente una cadena de Schmitt triggers acoplados en forma unidireccional y sometidos individualmente a ruido blanco gaussiano. Al igual que con la cadena de osciladores, el primer elemento es forzado con una señal PRBS codificada en formato NRZ. El desempeño es medido a partir de la BER y del factor Q.

3.2. El sistema: una cadena de osciladores acoplados

El sistema en cuestión (ver figura 3.1) consiste en una cadena de, arbitrariamente, diez osciladores biestables acoplados unidireccionalmente tales como los descritos en [49, 62].

La dinámica del sistema que se muestra en la figura 3.1 está descripta por el siguiente

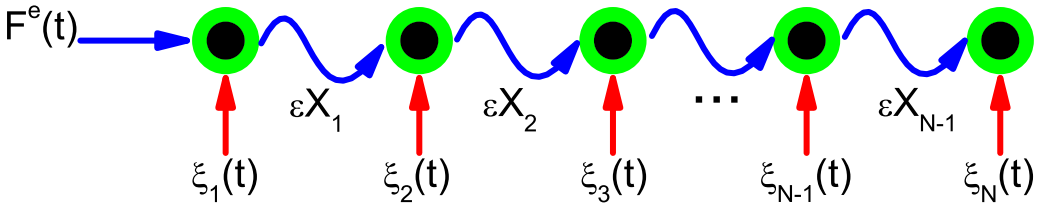


Figura 3.1: Esquema de la línea de transmisión.

sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas

$$\frac{dX_1}{dt} = \left[-\frac{\partial U\left(X_1\right)}{\partial x} + F^e(t)\right] + \sigma\xi_1\left(t\right), \tag{3.1a}$$

$$\frac{dX_n}{dt} = \left[-\frac{\partial U\left(X_n\right)}{\partial x} + \epsilon\frac{X_{n-1}}{x_c}\right] + \sigma\xi_n\left(t\right), \qquad \text{para } n \geq 2 \tag{3.1b}$$

donde consideramos que todos los osciladores están sometidos a ruido blanco gaussiano descorrelacionado espacialmente, de igual intensidad σ^2 ($\langle\xi_i\left(t\right)\rangle = 0$, y $\langle\xi_i\left(t\right)\xi_j\left(s\right)\rangle = \sigma^2\delta_{ij}\delta\left(s-t\right)$). El primer oscilador se encuentra excitado por una señal externa $F^e\left(t\right)$, los siguientes $N-1$ por una fuerza proporcional a la amplitud del oscilador anterior, donde la constante de proporcionalidad es el parámetro de acoplamiento ϵ. El potencial $U\left(x\right)$ es el mismo que definimos en la Sección 2.6,

$$U\left(x\right) = U_0\left(\frac{x}{x_c}\right)^2\left[\left(\frac{x}{x_c}\right)^2 - 2\right], \tag{3.2}$$

donde los dos parámetros del potencial son la profundidad de los pozos U_0 y la ubicación de los puntos de equilibrio, $\pm x_c$. En las simulaciones de este capítulo fijaremos $U_0 = 256$ y $x_c = \sqrt{32}$, siguiendo los valores usados en [65].

Dado que nuestra intención es utilizar esta cadena de osciladores para transmitir datos, la señal externa $F^e\left(t\right)$ que usamos para alimentar al primer oscilador es una secuencia PRBS con los bits codificados en formato NRZ [55]. Este formato de codificación es utilizado en la mayoría de las aplicaciones de transmisión de alta velocidad, especialmente en sistemas de comunicación por fibras ópticas [55].

Habitualmente es conveniente reescribir el sistema (3.1) como

$$\frac{dX_n}{dt} = -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial x}\left(X_n\right) + \sigma\xi_n\left(t\right), \qquad n = 1, 2, \ldots, N \tag{3.3}$$

con el potencial U_{eff} dado por

$$U_{\text{eff}}\left(x\right) = U\left(x\right) - \epsilon X_{n-1}\frac{x}{x_c}. \tag{3.4}$$

En el caso particular del primer oscilador establecemos $\epsilon X_0 = x_c F^e(t)$.

Podemos distinguir dos regímenes de funcionamiento de la línea, "subcrítico" y "supercrítico". El primero de estos modos de funcionamiento se caracteriza por ser "sostenido por ruido" es decir, para garantizar la transmisión se requiere que en cada oscilador esté encendida la fuente de ruido blanco. Mientras que en la transmisión supercrítica, el acoplamiento es suficientemente grande como para garantizar la transmisión en ausencia de ruido. Ambos regímenes están separados por un acoplamiento crítico que se puede estimar buscando el acoplamiento mínimo que hace que en el potencial de la Ec. (3.4) desaparezca uno de los mínimos, obteniéndose

$$\epsilon_c \approx 1.54\frac{U_0}{x_c}, \tag{3.5}$$

En nuestro caso, $\epsilon_c \sim 70.0$.

Resolvimos la Ec. 3.1 utilizando el método de Euler-Maruyama (ver, e. g., [72]) eligiendo los parámetros para la simulación, $U_0 = 256$, $F_0 = 40$ y $T_B = 5$. Una práctica habitual es subdividir el intervalo del bit en 1024 puntos. A su vez, en cada realización, la secuencia de entrada contiene 2048 bits. Por lo que cada realización demandó un total de 2^{21} puntos. Por cada intensidad de ruido llevamos a cabo un total de 100 realizaciones. El rango de intensidades de ruido explorado varía entre $\sigma^2 \approx 50$ y $\sigma^2 \approx 512$. En término de la profundidad del potencial, $0.2U_0 \leq \sigma^2 \leq 2U_0$.

Dado que estamos simulando un sistema de comunicación real al calcular la BER se incluye un filtro pasabajos que modela a un detector limitado en ancho de banda. Una práctica común es utilizar un filtro Butterworth de 2^{do} orden [73, 74] con ancho a media altura igual a la tasa de bits ($1/T_B$), un valor usualmente adoptado en señales moduladas en formato NRZ.

En la figura 3.2 mostramos una secuencia de bits filtrada a la salida de la cadena para diferentes intensidades de ruido en el régimen de funcionamiento sostenido por ruido.

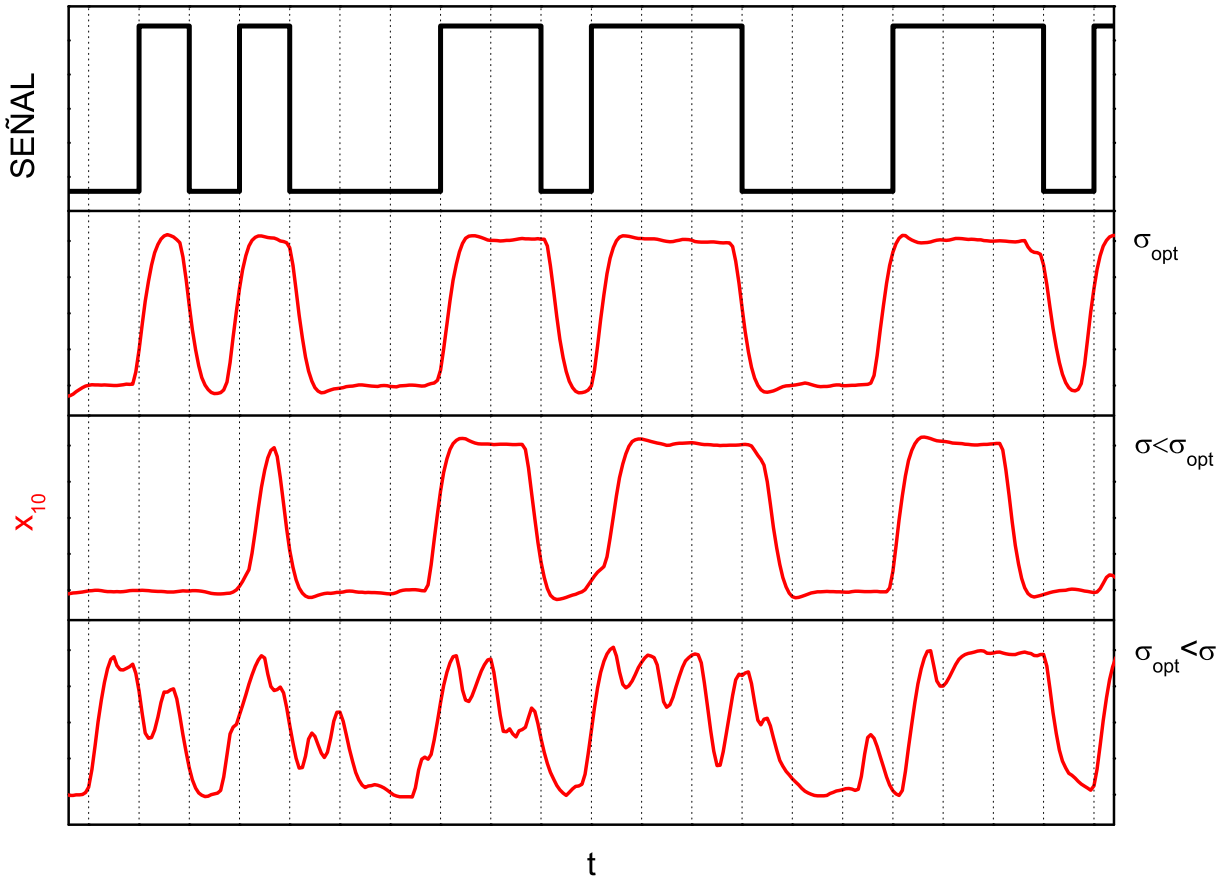


Figura 3.2: Salida típica (filtrada) de la línea para intensidades de ruido $\sigma^2 = 80,\ 180,\ 280$. El parámetro de acoplamiento es $\epsilon = 70$ (Régimen de propagación sostenida por ruido, cerca del acoplamiento crítico).

3.3. Determinación de la relación señal-ruido

Para caracterizar el fenómeno de la resonancia estocástica la herramienta más frecuentemente utilizada es la SNR, ya que su interpretación es simple y, en el caso de señales armónicas, es un parámetro fácil de medir.

En los sistemas de comunicación real el desempeño del sistema depende generalmente de la relación señal-ruido [54]. Una mayor SNR reduce el efecto relativo del ruido de canal y por lo tanto, la información es detectada con menor incertidumbre. Sin embargo al mejorar la SNR debe pagarse una "penalización" en potencia de señal.

En base a estas dos consideraciones creemos importante poder medir el desempeño de la cadena de osciladores dada en la Ec. (3.1) a partir de la SNR.

En la figura 3.3 mostramos el espectro obtenido a la salida del primer oscilador de la cadena. Como se puede observar, la contribución proveniente del ruido no es uniforme, sin embargo, como primera aproximación supondremos que el espectro de ruido es plano y lo calcularemos utilizando la Ec. (2.28). Podemos determinar numéricamente que en este caso el 93 % de la potencia se encuentra concentrado en los primeros dos lóbulos.

De los resultados de la figura 3.4 verificamos el fenómeno de SR a partir de la medición de SNR cuando la forzante es una señal PRBS. Se identifica un rango relevante de ruidos, que maximiza la SNR, centrado alrededor de $\sigma^2_{\mathrm{PRBS}} \approx 155$.

La figura 3.5 muestra la evolución de la SNR a lo largo de una cadena compuesta por 10 osciladores en función de la intensidad del ruido para distintos acoplamientos que corresponde a los regímenes de propagación subcrítico, crítico y supercríitico. Como puede apreciarse, el máximo observado en la figura 3.4 para el primer oscilador persiste a lo largo de toda la línea para la misma intensidad de ruido. Dicho máximo, a medida que aumenta el número de oscilador, va disminuyendo, lo que corresponde a la degradación de

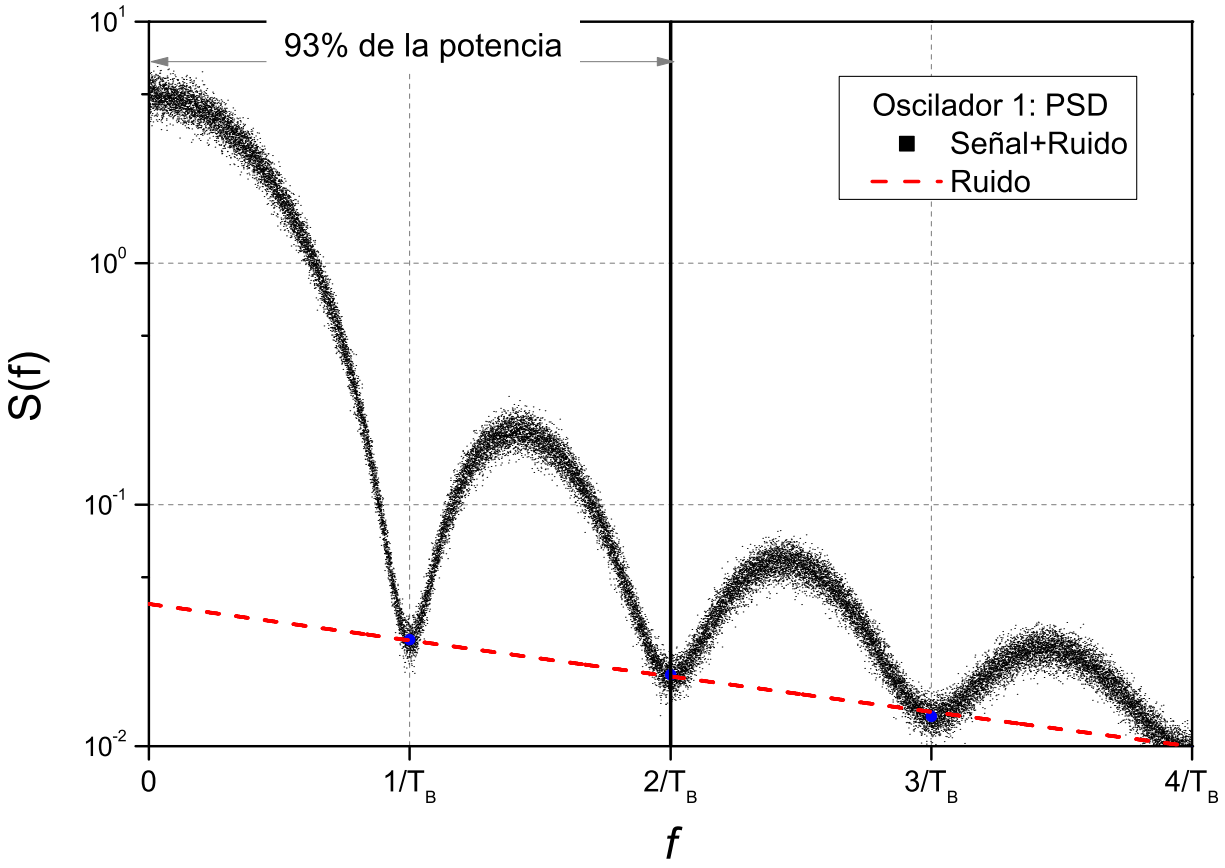


Figura 3.3: Densidad espectral de potencia obtenida a la salida del primer oscilador de la cadena de la Ec. (3.1) forzada por una señal PRBS codificada en formato NRZ, en la banda de 0-4f_1. El 93 % de la potencia se encuentra comprendido en los primeros dos lóbulos.

la SNR. Por lo tanto, podemos afirmar que la cadena de osciladores, funcionando como línea de transmisión de datos, presenta el fenómeno de resonancia estocástica a partir de la medición de SNR. Al mismo tiempo se observa que el ancho a media altura, a medida que nos desplazamos a lo largo de la línea, se va reduciendo, por lo que el rango de ruido que garantiza una SNR cercana a la máxima es menor para el décimo oscilador que para el primero.

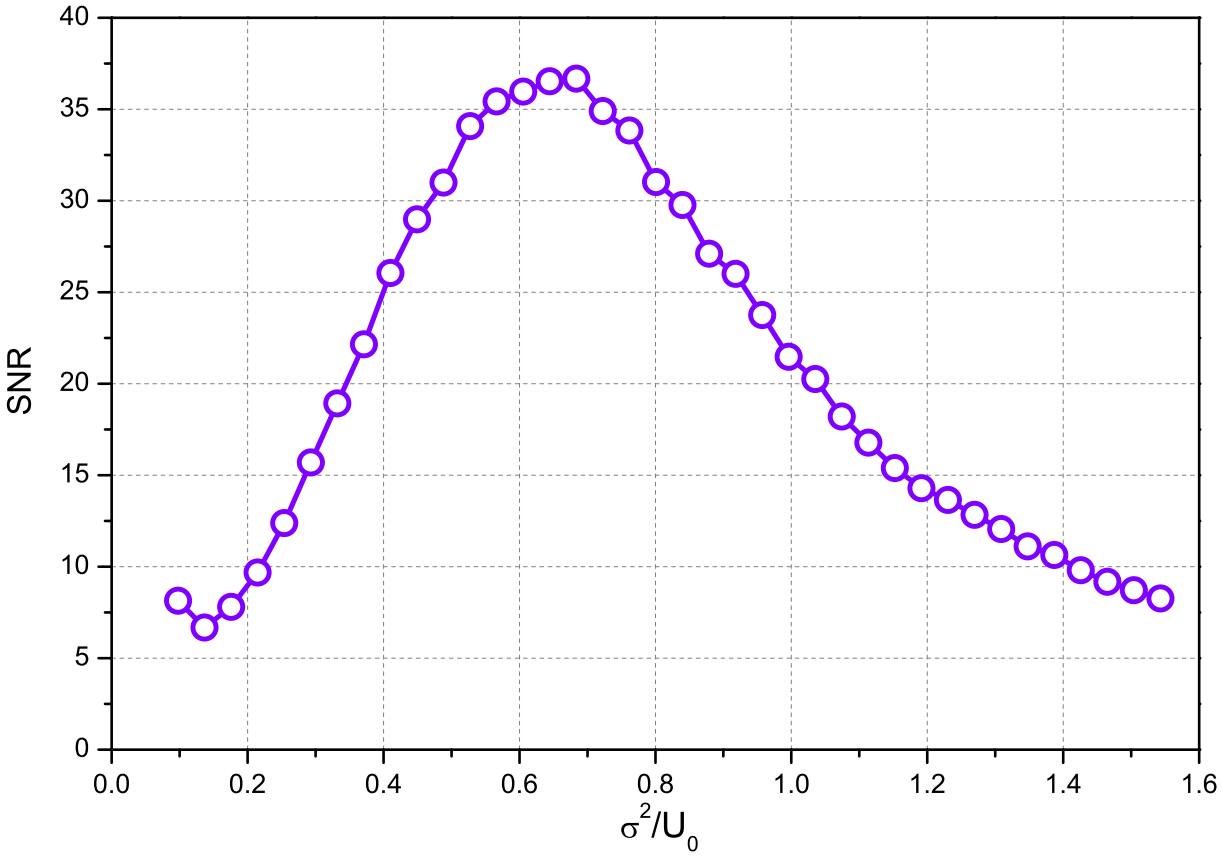
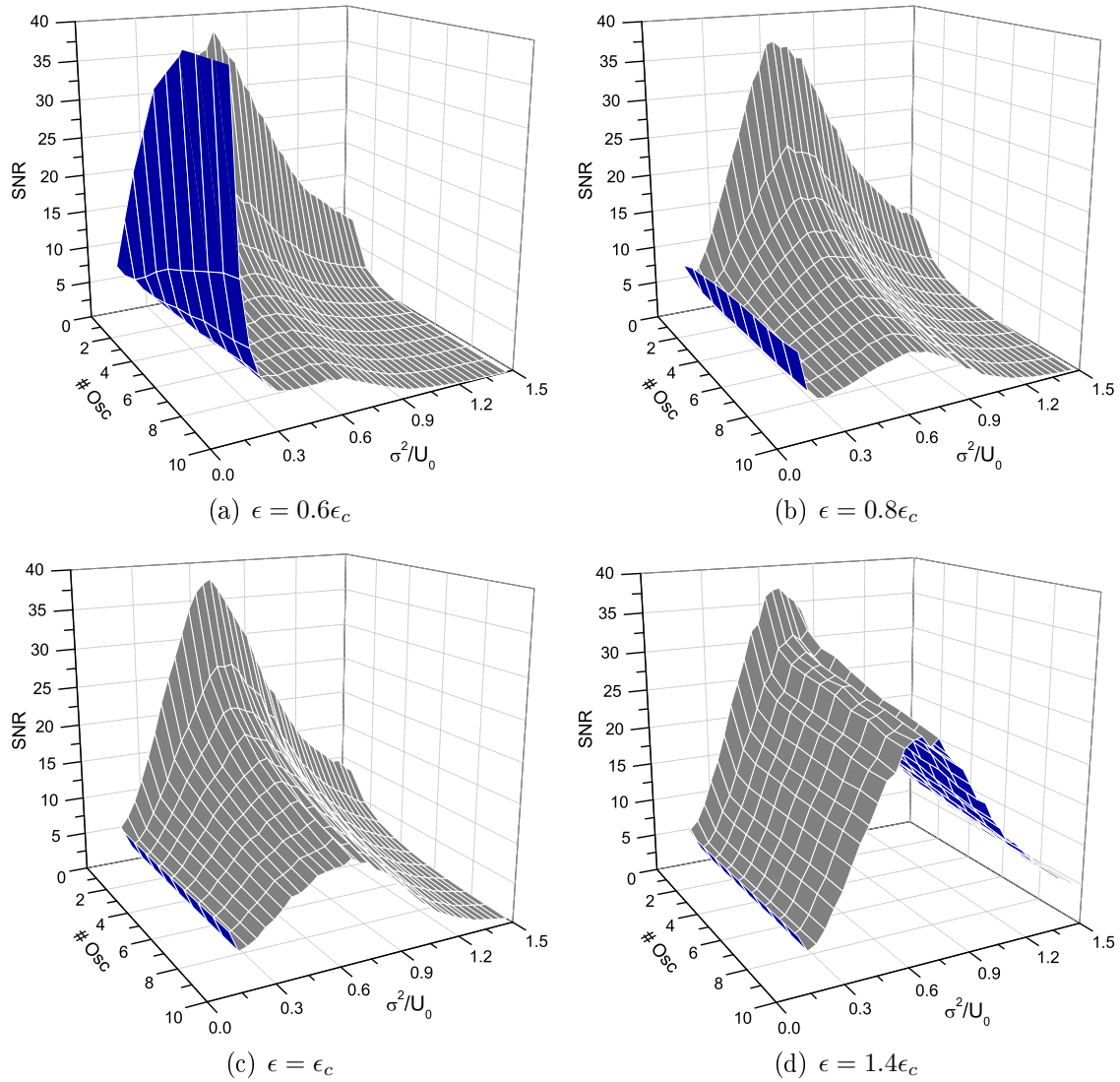


Figura 3.4: Relación señal-ruido obtenida a la salida del primer oscilador de la cadena de la Ec. (3.1).

3.3.1. Dependencia de la SNR con el acoplamiento

A continuación abordaremos el análisis de la SNR de la cadena de osciladores como función del acoplamiento entre sí. De este modo, el acoplamiento surge como un nuevo parámetro de control, independiente de la intensidad del ruido. Un aspecto importante es el de investigar de qué manera el acoplamiento afecta a la resonancia estocástica.

En la figura 3.6 mostramos la SNR obtenida a la salida de la cadena de 10 osciladores como función de la intensidad del ruido y del acoplamiento. En el gráfico se puede ver claramente que la SNR, en función de la intensidad de ruido, es máxima para $\sigma_M^2 \approx 155$ mientras que, en función del acoplamiento, es creciente hasta que se alcanza un comporta-



(a) $\epsilon = 0.6\epsilon_c$ (b) $\epsilon = 0.8\epsilon_c$

(c) $\epsilon = \epsilon_c$ (d) $\epsilon = 1.4\epsilon_c$

Figura 3.5: Relación señal-ruido a lo largo de la línea en función de la intensidad de ruido para distintos acoplamientos.

miento asintótico para $\epsilon > 120$. Este comportamiento puede ser comprendido en términos de la dinámica de la cadena: a medida que aumenta el acoplamiento, mayor es la fuerza externa que se ejerce sobre cada oscilador y, por lo tanto, más parecida es la dinámica de todos los osciladores. Además, superado el acoplamiento crítico, $\epsilon_c \approx 70$, no es necesaria la presencia de ruido para garantizar la transmisión [65].

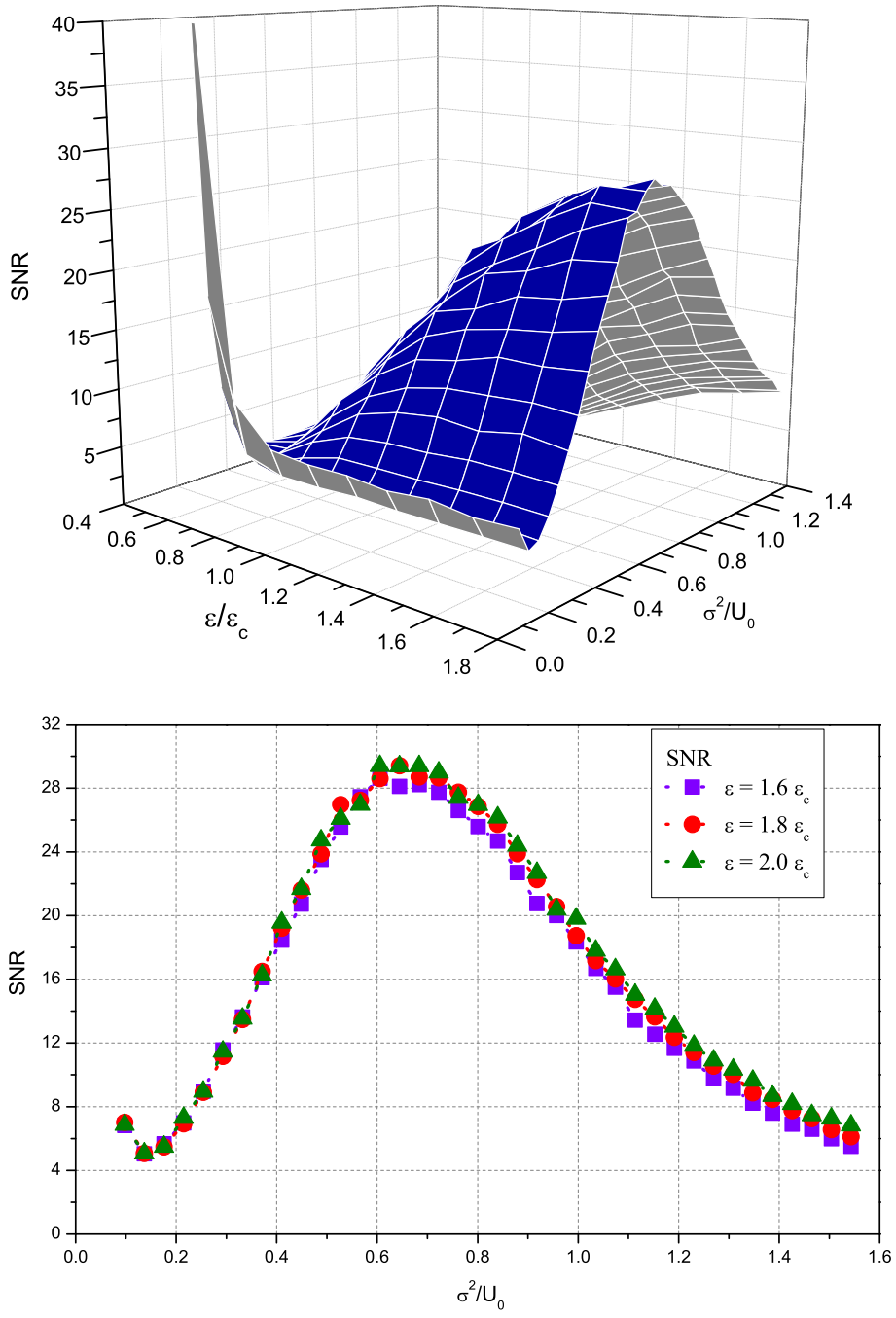


Figura 3.6: SNR a la salida de la línea (luego del décimo oscilador) en función de la intensidad de ruido y del acoplamiento.

3.4. Cálculo de la tasa de error

Para calcular la tasa de error se filtra la señal de salida de la línea. El filtro implementado es del tipo Butterworth [73, 74] pasabajos de segundo orden. La frecuencia de corte del filtro es típica del formato NRZ, $f_c = 1/T_B$. La secuencia de bits a la salida del sistema se sincroniza con la secuencia de entrada a través de la correlación cruzada entre ambas señales. La correlación cruzada permite obtener el tiempo de retardo medio debido a la línea (ver Secciones 2.8.3 y 3.5). Para cada intervalo de bit, se calcula un valor medio de la señal de salida y se lo compara con un umbral fijo a fin de tomar una decisión sobre el valor del bit. El valor medio de cada bit se calcula integrando en una fracción del intervalo del bit $2/5T_B - T_B$, ya que hemos encontrado que es la región que reduce al mínimo el efecto jitter [75].

En la figura 3.7 mostramos la tasa de error a la salida de la línea en función de la intensidad del ruido y para los tres regímenes de funcionamiento, subcrítico, crítico y supercrítico. Como se puede apreciar, para todos los osciladores y todos los regímentes de propagación, la BER exhibe un comportamiento antiresonante. A medida que aumenta el número de oscilador observamos que crece la BER y, simultáneamente, disminuye el rango de intensidades de ruido que garantiza una determinada tasa de error (en nuestro caso hemos elegido esta tasa de error en 10^{-3}). Con respecto a la intensidad de ruido óptima, observamos que ésta disminuye a medida que aumenta el número de oscilador.

En particular en el caso supercrítico, donde el acoplamiento es suficientemente intenso como para garantizar la transmisión en ausencia de ruido, se observa que el BER permanece pequeño para una amplio rango de ruidos. A medida que disminuye el acoplamiento, moviéndonos del régimen supercrítico al subcrítico, la campana de BER se angosta y simultáneamente se degrada.

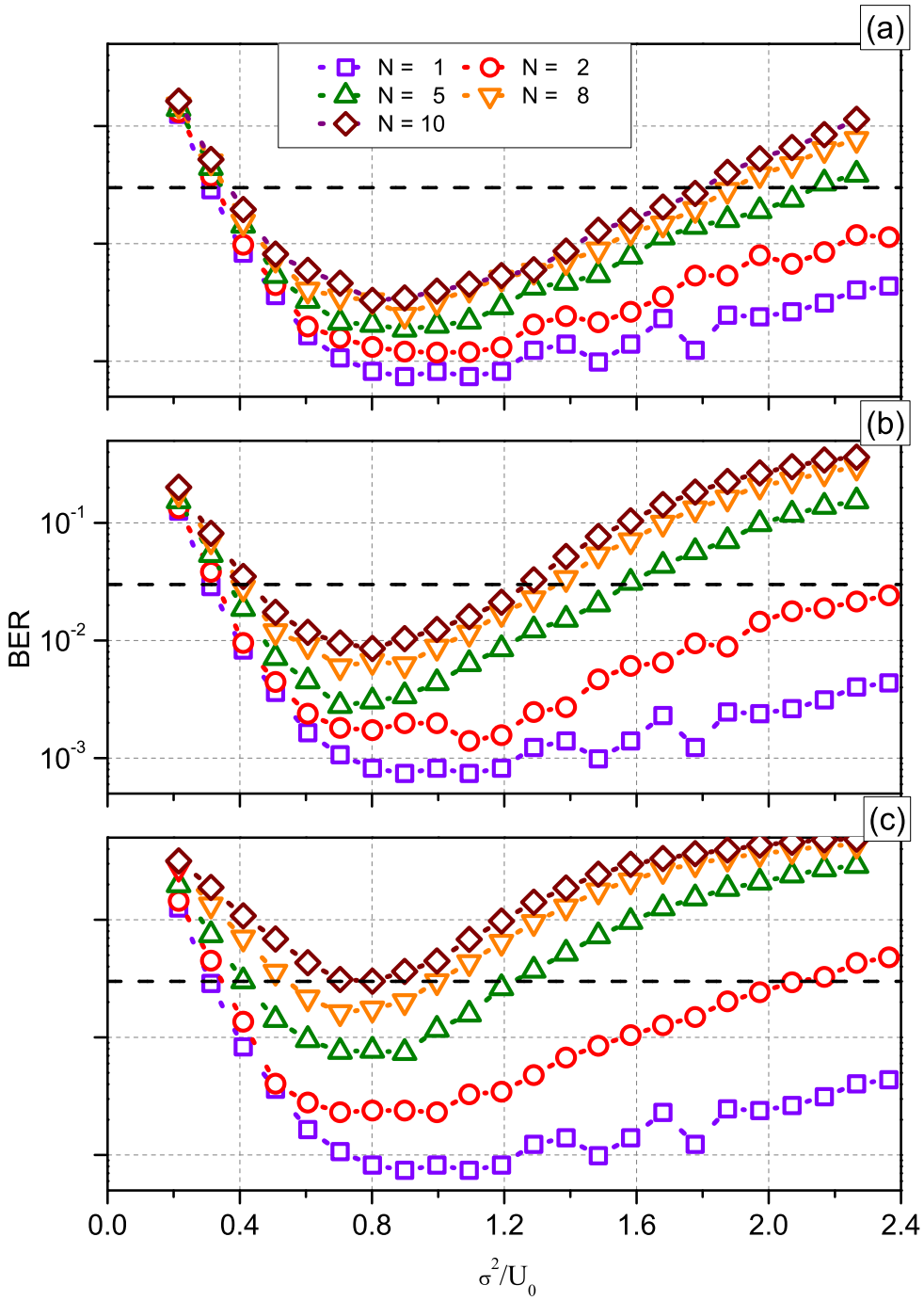


Figura 3.7: Tasa de error a lo largo de la línea en función de la intensidad de ruido, para diferentes acoplamientos. La linea punteada corresponde a una BER=$3\,10^{-2}$. (a) $\epsilon = 1.4\epsilon_c$, (b) $\epsilon = 1.0\epsilon_c$, (c) $\epsilon = 0.8\epsilon_c$.

La tasa de error a la salida del 10-ésimo oscilador en función de la intensidad del ruido, para los regímenes de acoplamiento se compara en la figura 3.8. Como se puede observar claramente, la tasa de error mejora con el acoplamiento. Simultáneamente, se observa como se angosta el rango de intensidades de ruido que garantizan una determinada tasa de error a medida que disminuye el acoplamiento.

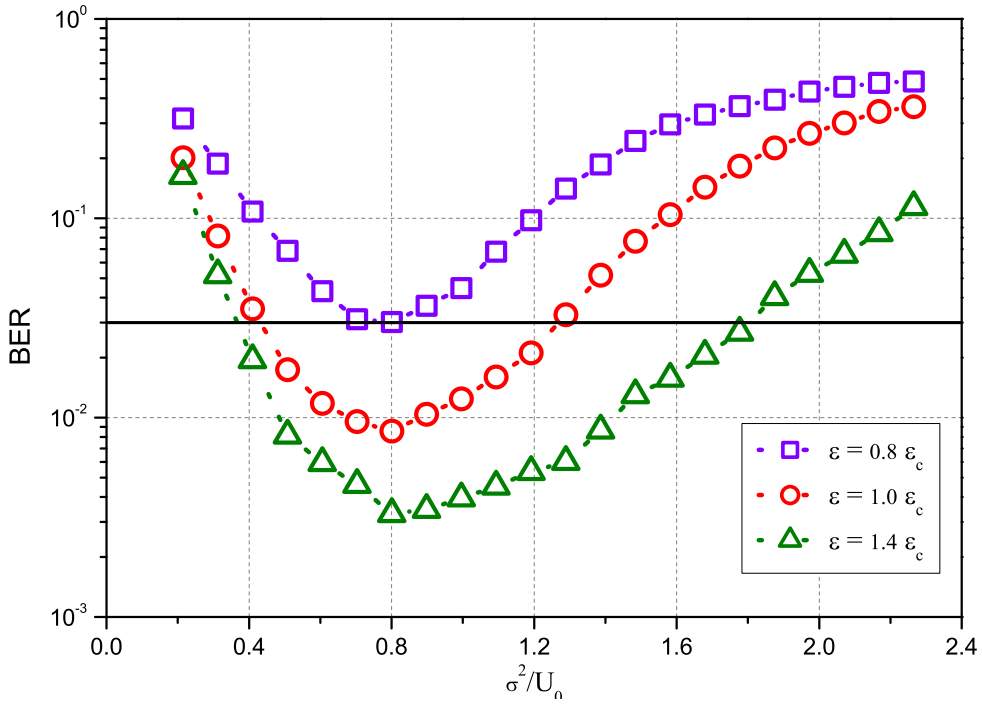


Figura 3.8: Tasa de error a la salida de la línea (luego del 10-ésimo oscilador) en función de la intensidad de ruido, para los diferentes regímenes de acoplamiento: subcrítico, crítico y supercrítico.

3.5. Retardos

La transmisión a través de un canal de comunicación posee un cierto retardo en relación con la señal de entrada. Por otra parte, el diseño de algunos sistemas de comunicación a menudo requiere la implementación de dispositivos de retardo dentro del propio sistema (por ejemplo cuando dos señales deben llegar a un determinado punto en fase entre si).

En esta Sección centramos nuestra atención en las características de retardo de la línea. Veremos de qué manera es posible emplear la cadena de osciladores biestables dada en la Ec. (3.3) como una línea de retardos "sintonizable" por ruido.

Cuando se requiere medir el tiempo de retraso en un sistema por el que se propaga una señal se aplica la correlación cruzada, en nuestro caso, entre la señal de entrada $F^e(t)$ y la señal a la salida de la línea $X_n(t)$, Ec. (2.22). La correlación cruzada expresa qué tan similares son estas 2 señales, mientras que el tiempo t_M para el que se alcanza la máxima correlación representa el retardo existente. En nuestro caso, estimaremos el retardo de cada realización y luego determinaremos el retardo medio de la línea promediando 200 diferentes realizaciones de ruido, secuencias de bits y condiciones iniciales elegidas al azar para cada oscilador. Mostramos la correlación cruzada entre la entrada y la salida de la línea en la figura 3.9. Podemos distinguir como a medida que aumenta el número de oscilador el máximo se desplaza hacia valores de tiempo mayores.

Los retardos dependen en general de la longitud de la línea de transmisión. En nuestro caso mostramos en la figura 3.10 que los retrasos en la cadena aumentan linealmente con el número de oscilador. A los fines prácticos, interesa obtener retrasos del orden del período del bit T_B, una cantidad que permite, por ejemplo, recuperar señales codificadas en fase [76]. Nuestros resultados indican que esto es fácilmente alcanzable para los parámetros del sistema elegido y para una línea un poco más larga que la considerada.

Como ya mencionamos en la Introducción, estamos interesados en investigar si es posible "sintonizar" los retrasos, ya sea variando la intensidad de ruido o la fuerza de acoplamiento entre osciladores adyacentes. En la figura 3.11 se muestran los retrasos que proporciona la línea (normalizados a la duración de un bit) en función del ruido externo. Observamos que un acoplamiento fuerte lleva a una débil dependencia de los retrasos con el ruido y, por el contrario, un acoplamiento subcrítico lleva a una posibilidad de

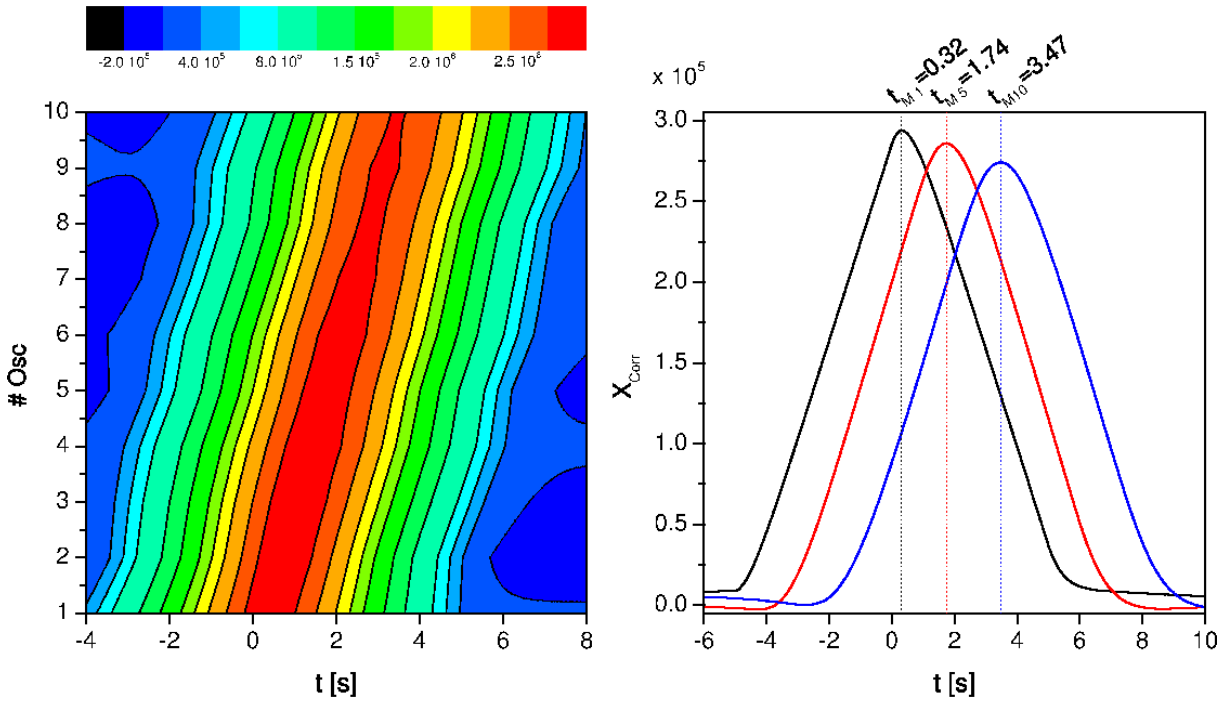


Figura 3.9: Correlación cruzada entre la secuencia de entrada (con un intervalo de bit $T_B = 5$) y la señal de salida para una línea de 10 osciladores.

sintonización mucho más amplia, en nuestro caso, hasta un 60 % del intervalo del bit luego de atravesar 10 osciladores.

Es importante señalar que hay 2 límites físicos para el ruido añadido (en el caso de acoplamiento subcrítico): por un lado, en la zona de ruidos débiles no puede existir propagación y, por otro, si la intensidad de ruido en el sistema es demasiado grande, la señal se degrada tanto que los bits transmitidos se vuelven "irreconocibles".

A continuación, investigamos la dependencia de los retardos con el acoplamiento entre osciladores adyacentes. Los resultados se muestran en la figura 3.12 donde se observa un comportamiento exponencial decreciente de los retardos como función del acoplamiento ϵ. En ella identificamos 3 regímenes diferentes: para un acoplamiento muy pequeño no es posible establecer la transmisión en la línea. Por otra parte, para un acoplamiento

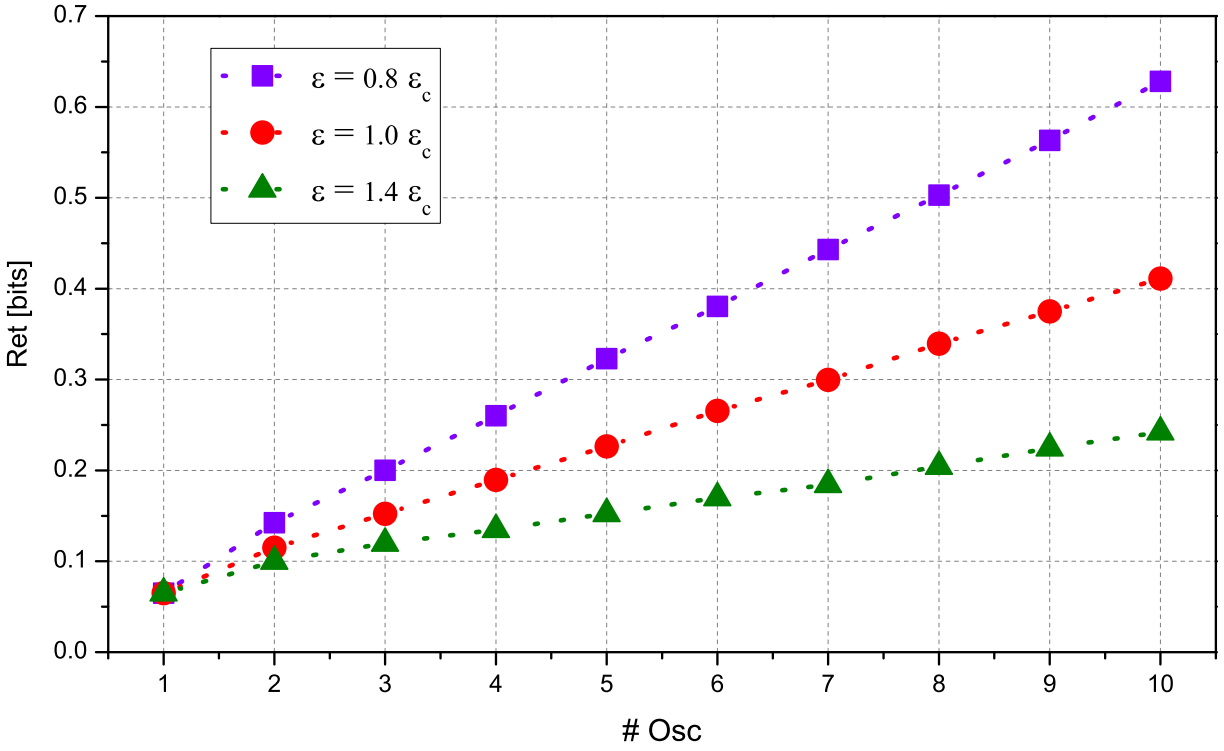


Figura 3.10: Retardo medio de la línea en función del número de oscilador para diferentes acoplamientos e intensidad de ruido óptima

suficientemente fuerte, la línea transmite aun en ausencia de ruido. El rango comprendido entre las 2 regiones anteriores corresponde a una verdadera transmisión sostenida por ruido. Obsérvese que, en todos los casos, los retrasos más grandes se obtienen para la menor cantidad de ruido añadido.

El comportamiento exponencial observado en las figuras 3.11 y 3.12 se puede entender cualitativamente de la siguiente manera. El potencial de la Ec. (3.4) cambia cada vez que la fuerza externa que actúa sobre el n-ésimo oscilador cambia entre el estado bajo y alto. Ambos estados corresponden aproximadamente a los mínimos $\pm x_c$ del potencial dado por la Ec. (3.2). Por simplicidad, supongamos que se produce una transición del estado bajo al alto a tiempo t_0, es decir, $X_{n-1}(t_0^-) \sim -x_c$ y $X_{n-1}(t_0^+) \sim +x_c$. Además, supongamos que $X_n(t_0^-) = -x_c$. Luego, el retraso medio del n-ésimo oscilador viene dado por la

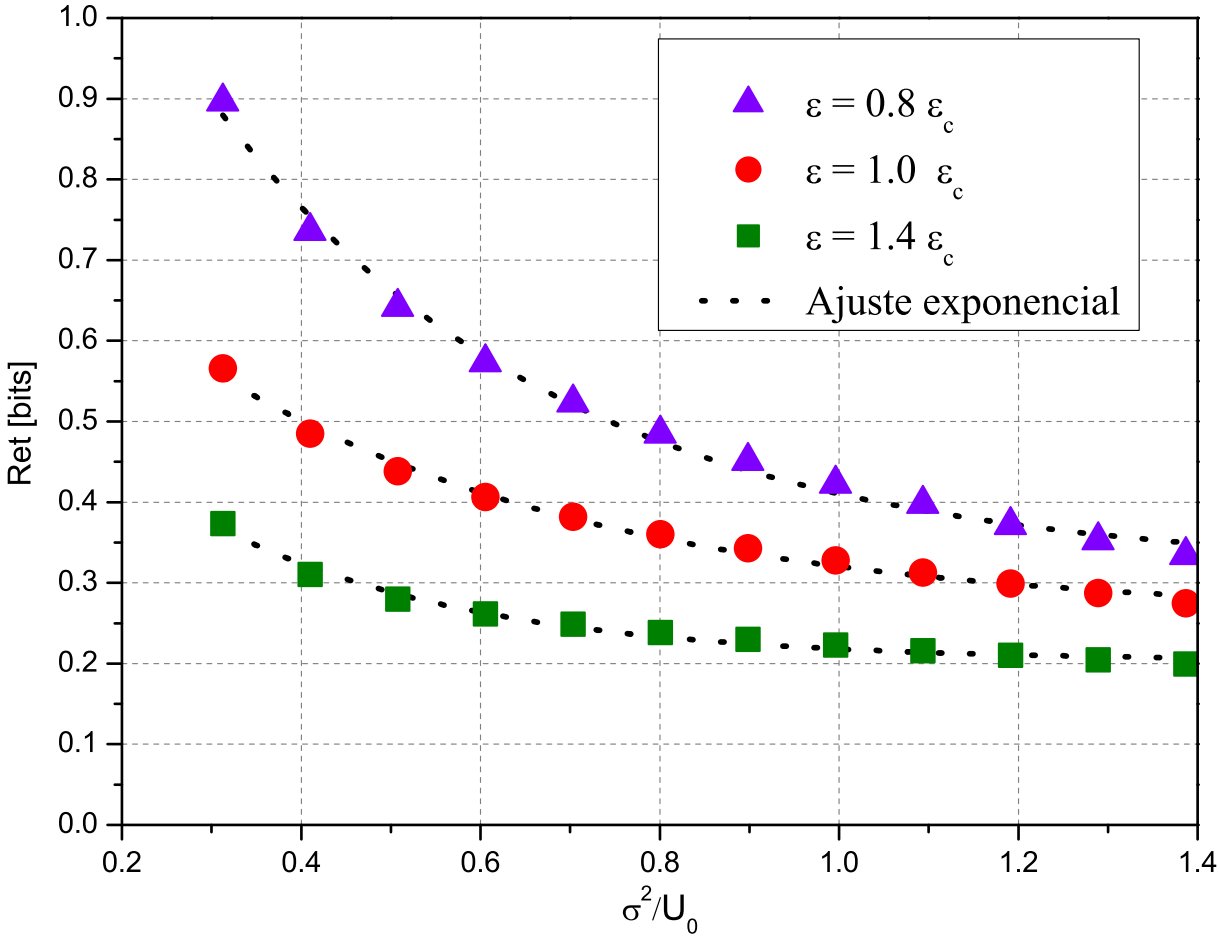


Figura 3.11: Retardo medio (normalizado a la unidad de un bit) en función de la intensidad de ruido para acoplamiento supercrítico, subcrítico y crítico. Los retardos decaen exponencialmente con el ruido.

fórmula de tiempo de escape medio [49]

$$\overline{\tau} = \frac{\pi}{\sqrt{-U''_{\text{eff}}(x_0)\,U''_{\text{eff}}(x_1)}} \exp\left\{\frac{[U_{\text{eff}}(x_0) - U_{\text{eff}}(x_n)]}{\sigma^2/2}\right\}, \tag{3.6}$$

donde x_0 y x_1 corresponden al máximo y al mínimo de $U_{\text{eff}}(x)$. Si asumimos que $x_0 \sim 0$, $x_1 \sim -x_c$, y usamos el hecho que $U''_{\text{eff}}(x) = U''_n(x)$, obtenemos

$$\overline{\tau} = \frac{\pi}{U_0} \exp\left\{\frac{[U_{\text{eff}}(x_0) - U_{\text{eff}}(-x_c)]}{\sigma^2/2}\right\} = \frac{\pi}{U_0} \exp\left\{\frac{2\,[U_0 - \epsilon x_c^2]}{\sigma^2}\right\}. \tag{3.7}$$

Nótese que la Ec. (3.7) vale dentro de la aproximación $\epsilon \ll U_0/x_c$ y el rango de

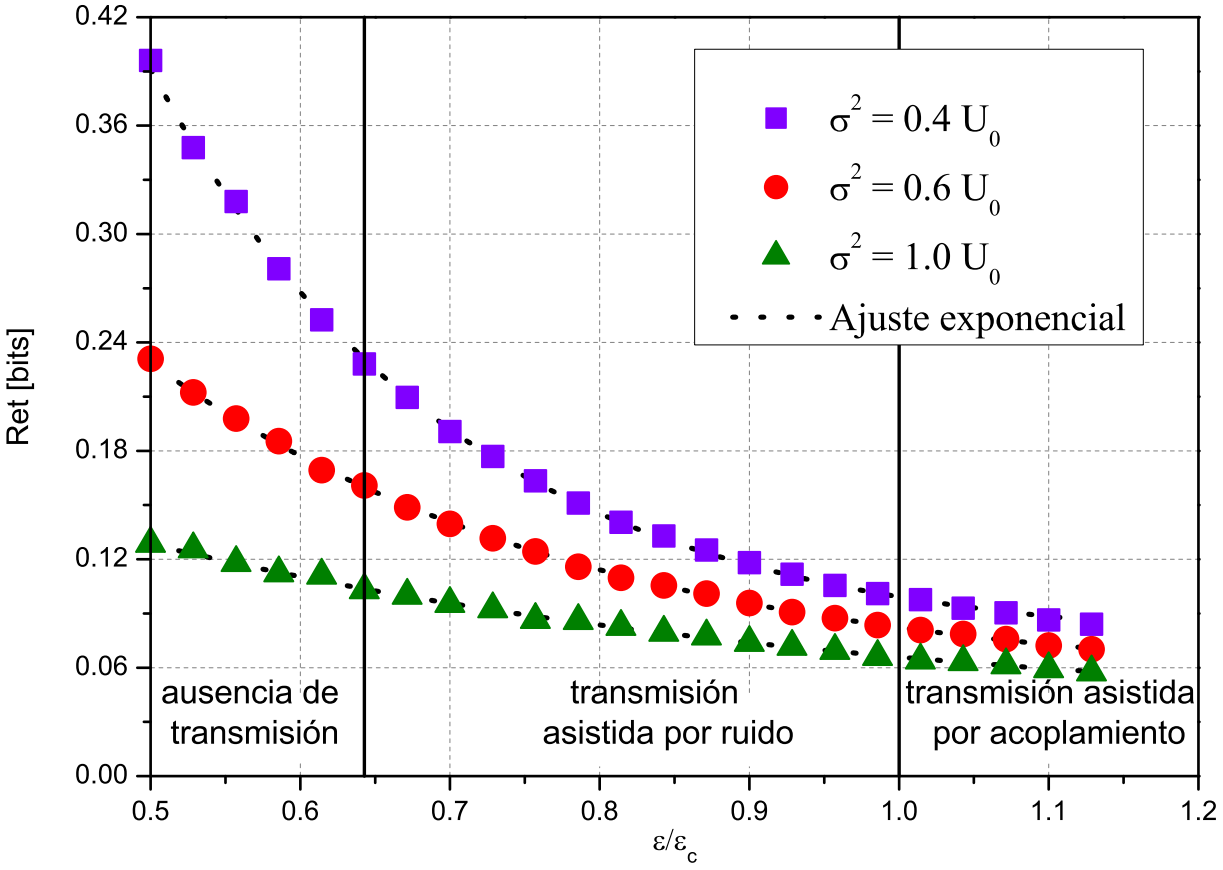


Figura 3.12: Retardo medio (normalizado a la unidad de un bit) en función del acoplamiento para diferentes intensidades de ruido. Se observan tres regímenes: ausencia de transmisión, transmisión sostenida por ruido y transmisión sostenida por acoplamiento.

acoplamientos explorado no cumple esta condición. Aun así podemos observar una tendencia, tal como se muestra en las figuras 3.11 y 3.12, donde el retardo medio decrece exponencialmente con la intensidad de ruido y el acoplamiento, respectivamente.

3.6. Comparación del desempeño con un canal de transmisión lineal

En la figura 3.13 mostramos la tasa de error, para una intensidad del ruido óptima, en función de la distancia, es decir, el número de osciladores. Es interesante observar que,

en el régimen de operación supercrítico, la BER permanece casi constante en función del número de oscilador. De hecho, un acoplamiento supercrítico lleva a un potencial $U_{\text{eff}}(x_0)$ con un solo mínimo muy profundo, por lo que la partícula queda confinada. En estas condiciones, el ruido únicamente contribuye al movimiento intra-pozo limitando, por lo tanto, variaciones de la señal $x_n(t)$.

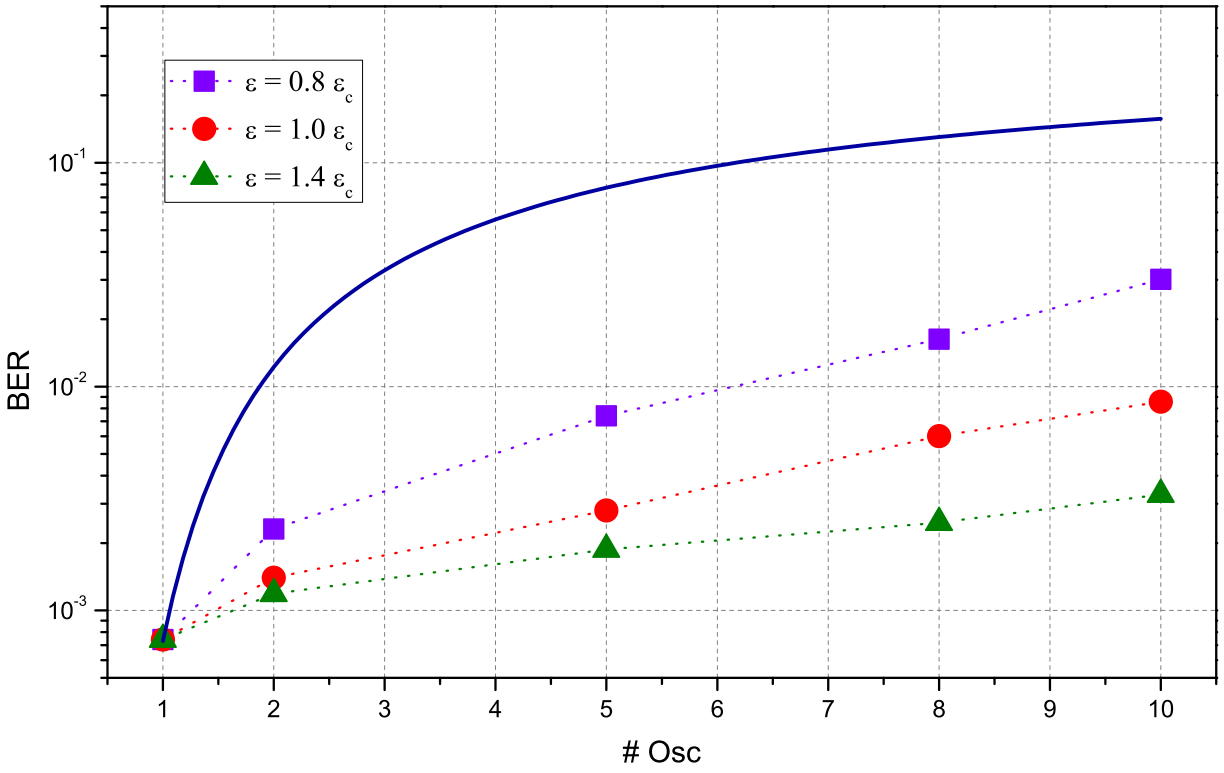


Figura 3.13: Evolución de la mínima tasa de error con la distancia (para algunos osciladores elegidos al azar). Los resultados se comparan con los de una línea de transmisión afectada por ruido blanco gaussiano aditivo, y demostramos que el sistema es robusto contra ruido añadido.

A fin de ilustrar el desempeño de la línea de transmisión propuesta comparamos los resultados numéricos con el cálculo de la tasa de error que se obtiene a la salida de un sistema lineal, que se degrada únicamente con ruido blanco gaussiano aditivo. El

desempeño de este sistema ya fue presentado en la Sección 2.8.7,

$$\mathrm{BER}\,(n) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{C}{\sqrt{n}}\right), \tag{3.8}$$

donde $\mathrm{erfc}(x)$ es la la función error complementaria, n es el número de oscilador y C es una constante elegida de forma tal de ajustar la BER dada por la expresión (3.8) con la hallada numéricamente en el primer oscilador.

Como se observa en la figura 3.13 una característica muy interesante de esta cadena de osciladores funcionando como una línea de transmisión de datos es que su desempeño es superior al de un sistema lineal en las tres regiones de funcionamiento consideradas. Es decir que en este sistema la BER se degrada a una tasa mucho menor, incluso en el caso de acoplamiento subcrítico, a lo que lo hace una línea en un escenario de ruido aditivo.

En la figura 3.14 mostramos la relación señal-ruido en función del número de oscilador, para la intensidad de ruido correspondiente al mínimo BER. En este caso la velocidad de degradación de la SNR es mayor a medida que el acoplamiento disminuye.

En la gráfica también se puede ver la SNR del sistema que se degrada linealmente con el ruido. En este caso, la SNR es inversamente proporcional a la distancia,

$$\mathrm{SNR}(n) = \frac{\mathrm{SNR}(1)}{n}, \tag{3.9}$$

donde SNR(1) es la SNR correspondiente al primer oscilador de la cadena.

Nuevamente encontramos que para todos los acoplamientos considerados, la SNR disminuye con la distancia a un ritmo mucho más lento que en un escenario de ruido blanco gaussiano aditivo, especialmente en el régimen supercrítico, donde la pendiente de la SNR con la distancia es prácticamente nula.

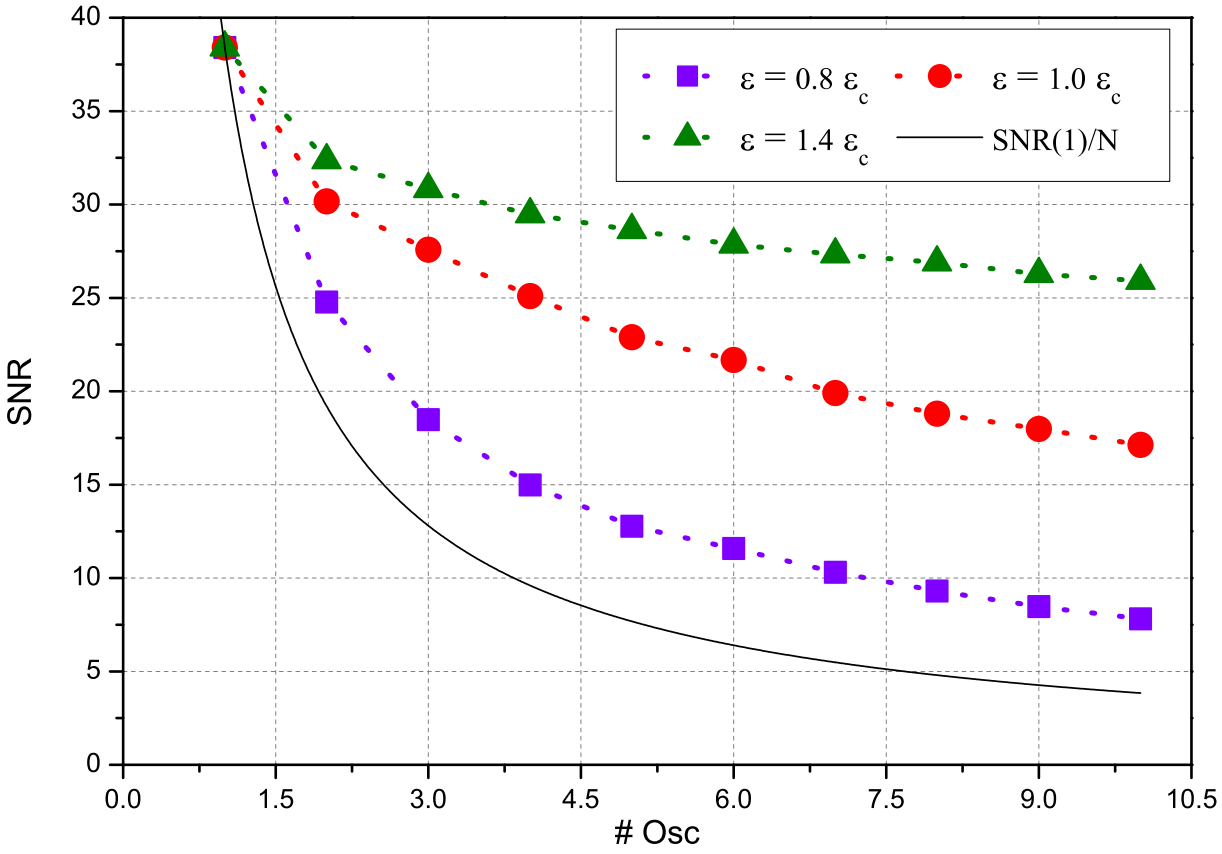


Figura 3.14: Relación señal-ruido en función de la distancia (i.e. número de oscilador). Se comparan los resultados con la SNR de un sistema de transmisión lineal que se degrada con ruido AWGN. Para todos los regímenes de acoplamiento, es superior al caso de ruido aditivo. Obsérvese como la SNR permanece esencialmente plana para el régimen de acoplamiento supercrítico.

3.6.1. Penalización

En la mayoría de los sistemas de comunicación la señal que recibe el detector se encuentra deteriorada con respecto a la que se produjo en el transmisor. Esto lleva a una disminución en la relación señal-ruido, que como vimos en la Sección 2.8.7, se encuentra relacionada con la tasa de error. Si la relación señal-ruido es inferior a la nesesaria para obtener la tasa de error deseada, en un canal de comunicación lineal, se puede aumentar la potencia de la señal, de modo que la SNR alcance el valor. Este incremento de potencia

se denomina penalización de potencia.

Sin embargo, en la línea que estamos considerando, la presencia de ruido es esencial en la transmisión en el régimen subcrítico. Por lo que proponemos definir una penalización P que cuantifica el rango dinámico de ruidos donde el sistema es capaz de garantizar una determinada tasa de error. Para cada oscilador se define como el cociente entre el ancho de ruido a una determinada BER y el ancho, a la misma BER, del primer oscilador. Medida en decibeles, la penalización puede ser escrita como

$$\mathrm{P}\,(n)\,\big|_{\mathrm{BER}} = -10\log\left(\frac{\Delta{\sigma_n}^2}{\Delta{\sigma_1}^2}\right)\Bigg|_{\mathrm{BER}} \tag{3.10}$$

En la figura 3.15 mostramos la penalización en función del número de oscilador, tomando una tasa de error de referencia $\mathrm{BER} = 3 \cdot 10^{-2}$, para los casos de acoplamiento subcrítico, supercrítico y crítico. En el caso de acoplamiento subcrítico a medida que aumenta el número de oscilador es necesario que la intensidad de ruido sea lo más exacta posible ya que rápidamente crece la penalización. En particular $\mathrm{P}\,(11) = \infty$ dado que no es posible llegar al undécimo oscilador con una tasa de error como la que tomamos de referencia. En cambio en los demás regímenes de acoplamiento, la penalización es prácticamente plana, por lo que no es necesario ajustar la intensidad de ruido para garantizar la tasa de error dada, y simultáneamente se puede aumentar la distancia de la línea.

3.7. Modelo experimental

En esta Sección realizamos una investigación experimental de las propiedades de transmisión de una línea compuesta por cinco Schmitt triggers conectados en serie, como modelo discreto del sistema presentado en la Ec. (3.1). En este sentido, nuestra línea de STs puede ser considerada como un modelo simple de un sistema de transmisión de información con regeneradores de señal en línea [77]. Para verificar que la línea exhibe SR,

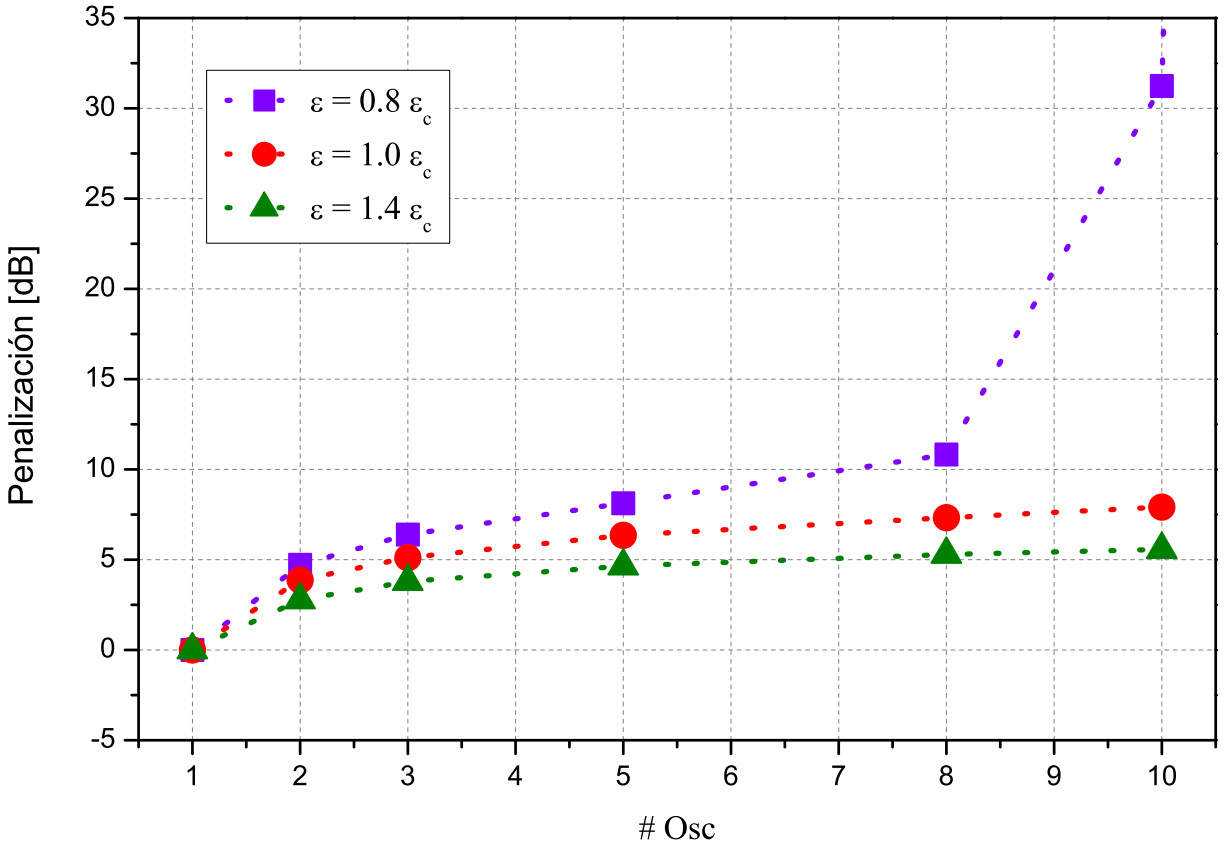


Figura 3.15: Penalización definida de acuerdo a la Ec. (3.10) a lo largo de la línea de transmisión en todos los regímenes de acoplamiento.

medimos la tasa de error y calculamos el factor Q a lo largo de la misma.

Un esquema del dispositivo construido puede verse en la figura 3.16, donde se presentan todos los componentes: un generador PRBS, los 5 STs con sus respectivos generadores de ruido y un detector al final de la cadena.

El ST es un dispositivo que presenta dos tensiones de comparación a la entrada, V_{TH} y V_{TL}, en función del estado de salida. A su vez, el estado de salida tiene dos niveles V_{OH} ('1' lógico) y V_{OL} ('0' lógico). En la figura 3.17 se muestra un esquema del ST con los valores utilizados en este trabajo, $V_{TH} = 3.4V$, $V_{TL} = -0.6V$, $V_{OH} = 2.8V$ y $V_{OL} = 0V$.

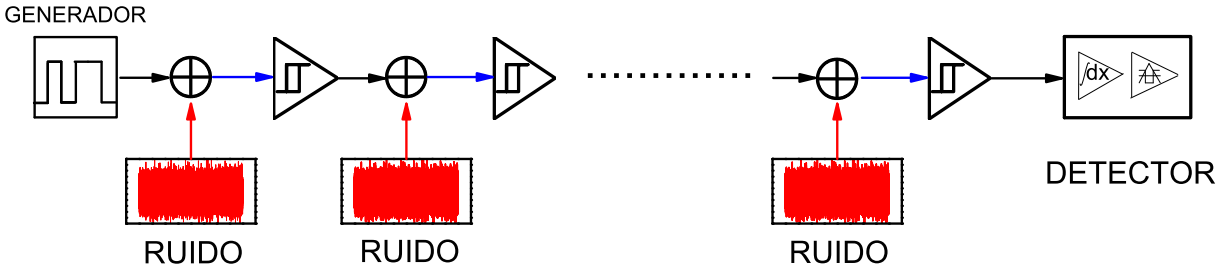


Figura 3.16: Esquema del dispositivo experimental utilizado como línea de transmisión en el régimen de resonancia estocástica.

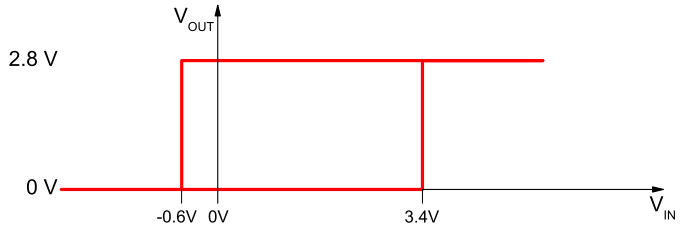


Figura 3.17: Esquema del Schmitt trigger utilizado.

El primer ST de la cadena es excitado por una secuencia de bits PRBS (generados a partir de un registro de desplazamiento con realimentación lineal- LFSR del inglés *Linear Feedback Shift Register*), codificada en formato NRZ, de amplitudes $V_{OL} = 0V$ y $V_{OH} = 2.8V$ y frecuencia 1 KHz. Los sucesivos STs son alimentados por la superposición de su fuente ruido correspondiente con la salida del ST anterior. Tal como se puede apreciar, tanto la señal de entrada como la salida de cada ST son subumbrales, por lo que los STs solo pueden cambiar de estado, y por lo tanto la línea de transmisión solo funciona, en presencia de ruido añadido.

El ruido es generado por un segundo generador de PRBS operando a una tasa de 250 kHz [16] cuya salida pasa a través de un filtro pasa bajos. Como la frecuencia de corte del filtro es superior a 10 KHz, se puede considerar que el ruido es aproximadamente blanco en la banda de frecuencias de interés.

En la figura 3.18 mostramos la tasa de error medida en función de la intensidad de ruido suministrada a cada ST. La secuencia transmitida consiste en 1000 bits codificados en formato NRZ. Hemos implementado un receptor simple que muestrea cada bit recibido alrededor de su punto medio y toma y un promedio sobre la mitad del intervalo del bit, de modo de minimizar posibles errores originados en el jitter. El umbral del receptor fue elegido para minimizar la BER.

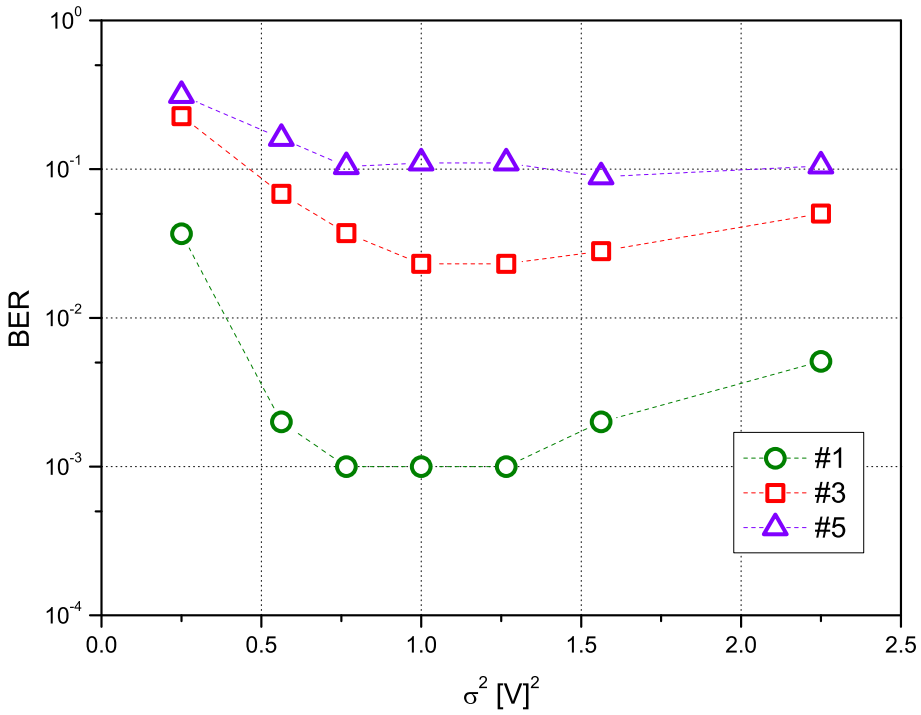


Figura 3.18: Tasa de error en función de la intensidad de ruido para el primer, tercer y quinto ST de la cadena.

Una tasa de error mínima se observa para una intensidad de ruido óptima. A la salida del primer ST, alrededor del ruido óptimo, no se registraron errores, por lo que a esos ruidos le impusimos arbitrariamente una BER $= 10^{-3}$ en las figuras. Luego del tercer ST, aun es posible observar un punto de intensidad de ruido óptima, no obstante, tal como es de esperar, el desempeño se encuentra degradado pues BER $\approx 2 \times 10^{-2}$. Al final de la

línea, la BER es plana y casi constante para un amplio rango de ruidos. De este modo, la cadena de ST se comporta como un sistema de transmisión robusto, ofreciendo una BER constante casi independientemente de la intensidad del ruido en el rango estudiado.

Tal como mencionamos en la Sección 2.8, otra magnitud que habitualmente se encuentra en la literatura de sistemas de comunicación es el factor Q (ver Ec. (2.31)). En la figura 3.19 presentamos resultados del factor Q en función de la intensidad del ruido a la salida del primer, tercer y quinto ST, respectivamente. Observamos, a la salida del primer ST un máximo para una intensidad de ruido óptima. Al final de la línea se observa una respuesta plana al ruido, al igual que lo que ocurre en el caso de la tasa de error. Cabe señalar que, en el contexto de los sistemas de comunicación, es común asociar el factor Q con la BER (ver Sección 2.8.7). Por lo general, tal relación funciona bien en el régimen de transmisión lineal. Sin embargo, el sistema considerado en este trabajo no es lineal y, por tanto, Q no tiene ninguna relación, a priori, con la BER [54], aunque todavía proporciona una medida cuantitativa de la calidad de la señal.

A fin de investigar más en profundidad las propiedades de transmisión, nos fijamos en la BER para un ruido óptimo a la salida de cada ST, i. e., el desempeño en función del número de ST. Los resultados se muestran en la figura 3.20. Al igual que lo que hicimos en la la Sección 3.6, comparamos estos resultados con la degradación esperada en un sistema afectado por ruido blanco gaussiano aditivo en cada nodo, como sería el caso de un sistema con amplificación en línea. Elegimos ajustar C en la Ec. (3.8) al segundo ST y no al primero ya que para éste únicamente contamos con una cota superior a la BER. Sorprendentemente, a pesar de ser un sistema no-lineal, su desempeño es idéntico al de un sistema afectado solo por el ruido gaussiano aditivo. A su vez este resultado es muy diferente al observado en el caso de la cadena de osciladores biestables (ver Sección 3.6).

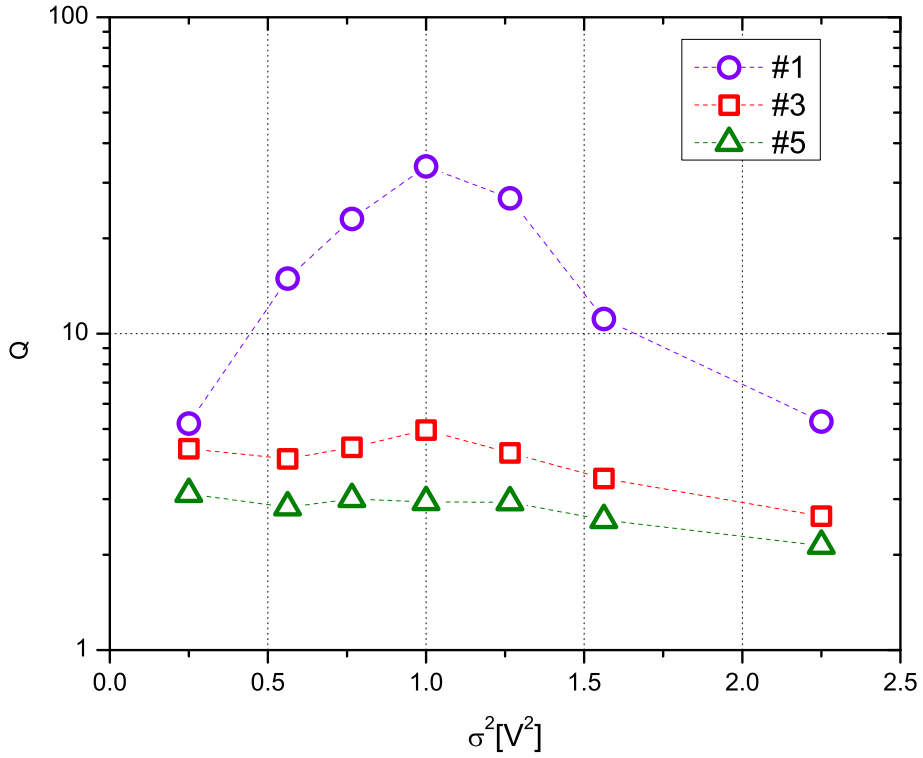


Figura 3.19: Una medida de la calidad de la señal: factor Q calculado a partir de la salida del primer, tercer y quinto ST. La línea de transmisión muestra resistencia al ruido.

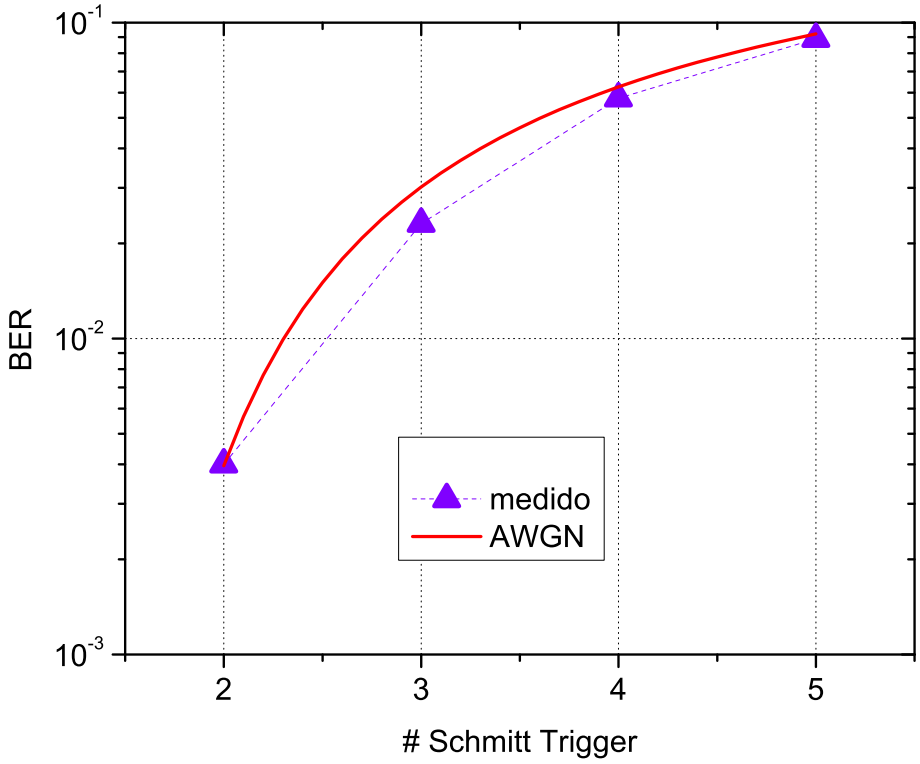


Figura 3.20: Tasa de error mínima comparada con la de un sistema que se degrada por ruido blanco gaussiano aditivo. Curiosamente, aunque el sistema no es lineal, la degradación del desempeño con el número de ST sigue a la del sistema lineal.

Capítulo 4

MEMORIA SOSTENIDA POR RUIDO

4.1. Introducción

El aumento de la capacidad de las computadoras modernas ha sido impulsado por la llamada ley de Moore, que postula que la densidad de transistores en un circuito integrado se duplica aproximadamente cada dos años. Esta observación originalmente realizada por Gordon Moore, uno de los co-fundadores de Intel, se ha cumplido de forma ininterrumpida desde hace, aproximadamente, 40 años [78, 79]. Es interesante notar que la tendencia que predice la ley de Moore se cumple en otros parámetros relacionados con el procesamiento y almacenamiento de información digital, como por ejemplo, el tamaño de las memorias, la capacidad de almacenamiento de los discos rígidos y la frecuencia de operación (o de "reloj") de los procesadores. Sin embargo, la frecuencia de trabajo de los CPUs siguió la ley de Moore hasta el año 2003, momento a partir del cual dejó de incrementarse, debido fundamentalmente a problemas de disipación de calor. Efectivamente, el aumento de la frecuencia de trabajo lleva a un aumento de la potencia consumida y, por lo tanto, de la potencia que es necesario disipar [80]. La forma en que la industria de los semiconductores consiguió que el desempeño de los CPUs continuara evolucionando de acuerdo a la ley de Moore consistió en la introducción de procesadores de varios núcleos, cada uno de

ellos operando a frecuencias más bajas. Basado en estas consideraciones, y teniendo en cuenta el ruido térmico exclusivamente, Kish (ver, por ej., [81]) ha predicho el fin de la validez de la ley de Moore en el futuro próximo. Existen varias propuestas para resolver este problema, por ejemplo Korkmaz et al. [82], Palem et al. [83] y Bahar [84] toman explícitamente en cuenta el hecho de que los resultados pueden ser correctos solo con cierta probabilidad y Kish [85] utiliza un conjunto de procesos de ruido ortogonales para representar los valores lógicos. Otra posibilidad surge de la interacción del ruido con un sistema no-lineal como en el caso de la resonancia estocástica. Recientemente Murali et al. [34–36] demostraron una forma de realizar las operaciones lógicas básicas (*OR, AND, NOR, NAND*) con un único sistema no-lineal de manera que su rendimiento mejora en presencia de ruido, una firma de la resonancia estocástica.

En el futuro también serán necesarios memorias resistentes al ruido. Perazzo et al. [37, 38] cerraron una cadena de osciladores biestables, idéntica a la que analizamos en el capítulo anterior, tal como se muestra en la figura 4.1, y observaron que el ruido es esencial para sostener una onda armónica viajera mucho tiempo después de que la señal externa ha desaparecido. El anillo más corto posible, compuesto por dos osciladores biestables acoplados, fue estudiado en las referencias [86, 87]. En particular, Neiman [86] estudió el fenómeno de sincronización estocástica a partir de la igualdad de la tasa de Kramers en cada oscilador. Neiman y Schimansky-Geier [87] le añadieron una fuerza armónica externa a ambos osciladores y, estudiando la relación señal-ruido, hallaron que mejora con el acoplamiento, debido a la sincronización estocástica. Es interesante notar que este sistema se asemeja al de dos junturas Josephson insertas simétricamente en un circuito superconductor [88, 89].

En este capítulo mostramos que un anillo como el que acabamos de describir además puede funcionar como una memoria que almacena un bit de información en presencia

de ruido. Para almacenarlo forzamos a uno de los osciladores con un breve pulso de amplitud P_0 y duración T_P. Sólo tendremos en cuenta aquellas intensidades de pulso que sean suficientemente débiles como para evitar que durante el tiempo en que el pulso se encuentra encendido, el sistema pueda escapar del estado de equilibrio más profundo. El desempeño será evaluado a partir de la probabilidad de error en la detección de un bit sobre cada oscilador ($p_{e,i}$ con $i = 1, 2$). Mostraremos que la presencia de una pequeña cantidad de ruido en el sistema es suficiente para mejorar la probabilidad de error con respecto al caso determinista (sin ruido), destacando que p_e presenta un comportamiento del tipo resonancia estocástica. No obstante, como veremos más adelante, la probabilidad de error se degrada con el tiempo, alcanzando eventualmente el valor del sistema sin ruido, lo que nos permitirá definir el *tiempo de persistencia*, es decir, el tiempo que tarda la memoria en perder la información almacenada. Por otro lado, definiremos el *tiempo de sincronización* como el tiempo necesario para obtener la misma probabilidad de error al interrogar a ambos osciladores que, como veremos, disminuye con el incremento de la intensidad de ruido.

Entre las características que ofrece la memoria podemos destacar, por un lado, que funciona como una memoria "asincrónica" ya que es posible recuperar el dato almacenado en cualquier oscilador y en cualquier instante sin necesidad de recurrir a una señal de reloj externa. Por otro lado, podemos mencionar la existencia de un rango de intensidades de ruido donde se observa simultáneamente un tiempo de sincronización casi mínimo entre ambos osciladores y, al mismo tiempo, una baja probabilidad de error. En ese mismo rango de intensidades de ruido se alcanza el máximo tiempo de persistencia.

Por último, proponemos y construimos un dispositivo de almacenamiento de un bit basado en dos Schmitt triggers en una configuración de bucle. Alimentando cada Schmitt trigger con ruido gaussiano, mostramos que el sistema es capaz de almacenar un único

bit, y que lo hace de manera más eficiente para una intensidad de ruido óptima.

4.2. El sistema: un anillo de dos osciladores

Consideremos el sistema dinámico del capítulo anterior, una cadena de N osciladores biestables acoplados unidireccionalmente en presencia de ruido blanco gaussiano de intensidad σ^2. Si cerramos la cadena de modo que el primer oscilador esté acoplado al último obtenemos un anillo, tal como se describe en [37] (ver figura 4.1).

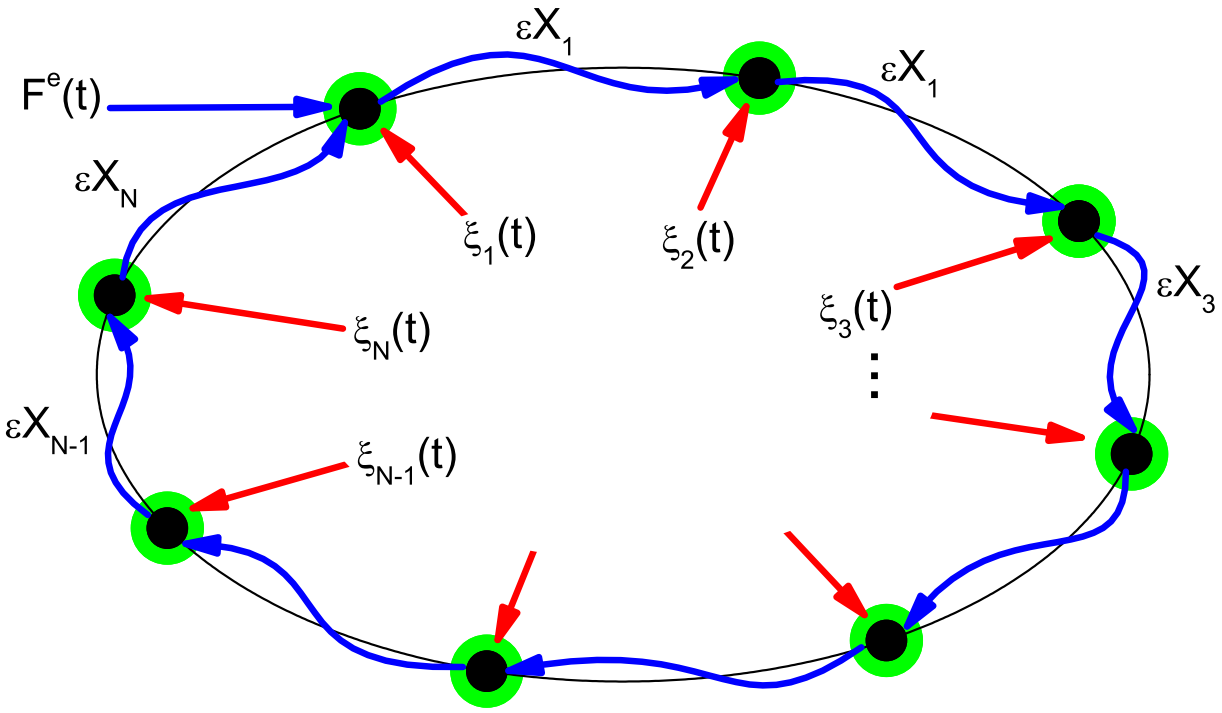


Figura 4.1: Esquema de la memoria de N osciladores.

La dinámica del anillo se caracteriza a partir del siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales estocásticas acopladas

$$\frac{dX_n}{dt} = \left[-\frac{\partial U\left(X_n\right)}{\partial x} + \epsilon \frac{X_{n-1}}{x_c} \right] + \sigma \xi_n\left(t\right), \tag{4.1}$$

donde n es el índice de cada oscilador ($n = 1, 2, \cdots, N$) y, como el sistema considerado

posee condiciones de contorno periódicas, X_0 representa al último oscilador de la cadena X_N. $\xi_n(t)$ es el ruido blanco gaussiano no correlacionado espacialmente que actúa sobre el n-ésimo oscilador ($\langle \xi_n(t) \rangle = 0$, $\langle \xi_n(t)\xi_m(t') \rangle = \delta_{nm}\delta(t'-t)$) y σ^2 es la intensidad del ruido. El acoplamiento entre osciladores adyacentes está caracterizado por $\epsilon > 0$. Por último, $U(x)$ es el potencial unidimensional definido en la Sección 2.6.

4.2.1. Sistema Potencial

Comencemos analizando la situación en ausencia de ruido externo. El sistema de ecuaciones (4.1) se reduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas

$$\frac{dX_n}{dt} = -\frac{\partial U(X_n)}{\partial x} + \epsilon \frac{X_{n-1}}{x_c}. \tag{4.2}$$

Busquemos ahora bajo qué condiciones es posible introducir un potencial efectivo $\mathrm{U_{eff}}(\boldsymbol{x})$ que tenga en cuenta tanto al potencial biestable como al acoplamiento entre osciladores,

$$\frac{dX_n}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{U_{eff}}}{\partial X_n}. \tag{4.3}$$

Igualando las Ecs. (4.2) y (4.3) encontramos que $\mathrm{U_{eff}}$ debe cumplir la siguiente relación

$$\frac{\partial \mathrm{U_{eff}}}{\partial x_n} = \frac{\partial U(x_n)}{\partial x} - \epsilon \frac{x_{n-1}}{x_c}.$$

Consideremos todos los casos posibles ($N = 1$, $N = 2$, $N > 2$):

- $N = 1$. Es inmediato comprobar que el potencial efectivo (realimentado) y el potencial original son equivalentes,

$$\mathrm{U_{eff}}(x) = \tilde{U}_0 \left(\frac{x}{\tilde{x}_c}\right)^2 \left[\left(\frac{x}{\tilde{x}_c}\right)^2 - 2\right],$$

donde los pozos son más profundos $\tilde{U}_0 = U_0 \left(1 + \frac{\epsilon x_c}{4U_0}\right)^2$ y los puntos de equilibrio se encuentran más alejados entre sí, $\tilde{x}_c = x_c \sqrt{1 + \frac{\epsilon x_c}{4U_0}}$.

- $N = 2$. Cuando el anillo está compuesto por dos osciladores, también es posible deducir el sistema de ecuaciones a partir de un potencial efectivo,

$$\mathrm{U_{eff}}\left(x_1, x_2\right) = U_0 \left(\frac{x_1}{x_c}\right)^2 \left[\left(\frac{x_1}{x_c}\right)^2 - 2\right] + U_0 \left(\frac{x_2}{x_c}\right)^2 \left[\left(\frac{x_2}{x_c}\right)^2 - 2\right] - \epsilon \frac{x_1 x_2}{x_c}. \quad (4.4)$$

- $N > 2$. No es posible hallar $\mathrm{U_{eff}}\left(\boldsymbol{x}\right)$ cuando el anillo tiene más de dos osciladores. Para demostrarlo desarrollemos el campo

$$\begin{aligned} F_1(\boldsymbol{x}) &= -\frac{\partial U_1}{\partial x}\left(x_1\right) + \epsilon \frac{x_N}{x_c} \\ F_2(\boldsymbol{x}) &= -\frac{\partial U_1}{\partial x}\left(x_2\right) + \epsilon \frac{x_1}{x_c} \\ &\cdots \\ F_N(\boldsymbol{x}) &= -\frac{\partial U_1}{\partial x}\left(x_N\right) + \epsilon \frac{x_{N-1}}{x_c} \end{aligned}$$

  De ser un gradiente, todas las derivadas cruzadas deberían ser iguales [90], sin embargo

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0 \neq \epsilon = \frac{\partial F_2}{\partial x_1},$$

  por lo que no existe el potencial.

En la figura 4.2 mostramos el potencial descripto en la Ec. 4.4 para el caso particular de $\epsilon = 25$, donde se observan 4 puntos de equilibrio estables (mínimos locales del potencial) y 1 punto de equilibrio inestable en el origen.

4.2.2. Determinación de los puntos críticos y su estabilidad

De aquí en adelante nos concentraremos en el sistema de dos osciladores con el potencial dado por la Ec. (4.4),

$$\frac{dX_1}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{U_{eff}}}{\partial X_1} + \sigma \xi_1(t) \quad (4.5a)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{U_{eff}}}{\partial X_2} + \sigma \xi_2(t) \quad (4.5b)$$

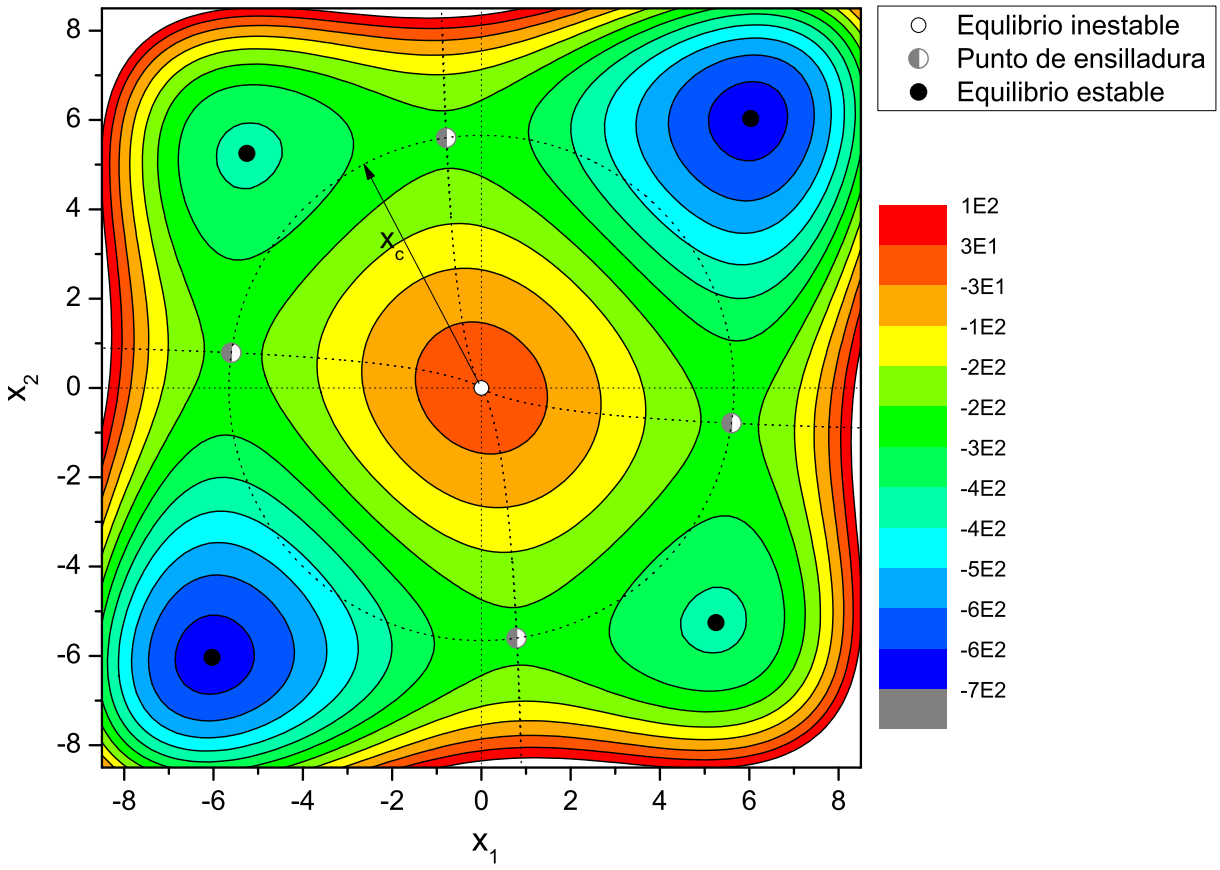


Figura 4.2: Potencial bidimensional definido por la Ec. (4.4) para $U_0 = 256$, $x_0 = \sqrt{32}$ y $\epsilon = 25$ ($\alpha \approx 0.14$).

Comenzamos el análisis buscando los puntos críticos. Para ello debemos igualar a cero simultáneamente las derivadas primeras del potencial efectivo,

$$\frac{\partial \mathrm{U_{eff}}}{\partial x_1} = \frac{4U_0}{x_c}\left\{\left(\frac{x_1}{x_c}\right)\left[\left(\frac{x_1}{x_c}\right)^2 - 1\right] - \alpha\left(\frac{x_2}{x_c}\right)\right\} = 0, \tag{4.6a}$$

$$\frac{\partial \mathrm{U_{eff}}}{\partial x_2} = \frac{4U_0}{x_c}\left\{\left(\frac{x_2}{x_c}\right)\left[\left(\frac{x_2}{x_c}\right)^2 - 1\right] - \alpha\left(\frac{x_1}{x_c}\right)\right\} = 0, \tag{4.6b}$$

donde hemos introducido el parámetro de control $\alpha = \frac{\epsilon x_c}{4U_0}$ ($\alpha > 0$). Operando un poco

sobre las Ecs. (4.6) llegamos a cuatro conjuntos de puntos críticos,

$$\boldsymbol{P}_1 = (x_1, x_2)_1 = (0,\, 0)\,, \tag{4.7a}$$

$$\boldsymbol{P}_2 = (x_1, x_2)_2 = \pm x_c\sqrt{1+\alpha}\,(1, 1)\,, \tag{4.7b}$$

$$\boldsymbol{P}_3 = (x_1, x_2)_3 = \pm x_c\sqrt{1-\alpha}\,(1, -1)\,, \tag{4.7c}$$

$$\boldsymbol{P}_4 = (x_1, x_2)_4 = \frac{x_c}{2}\left[\pm\sqrt{1-2\alpha}\,(1, 1) \mp \sqrt{1+2\alpha}\,(1, -1)\right]. \tag{4.7d}$$

La estructura cualitativa de estos puntos puede cambiar al variar el parámetro de control α. En particular alguno de ellos puede estar acotado a una única región o cambiar su estabilidad. Observamos que los dos primeros conjuntos de puntos existen $\forall\alpha > 0$, mientras que $\boldsymbol{P}_3$ está restringido a la región $0 < \alpha < 1$ y $\boldsymbol{P}_4$ a $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Al ser un sistema potencial, la estabilidad de los puntos críticos se determina a partir los extremos del potencial, para lo cual es necesario calcular la matriz hessiana del potencial,

$$\mathrm{H}\big[\mathrm{U}_{\text{eff}}\,(x_1, x_2)\big] = \frac{4U_0}{x_c^2}\begin{pmatrix} 3\left(\dfrac{x_1}{x_c}\right)^2 - 1 & -\alpha \\ -\alpha & 3\left(\dfrac{x_2}{x_c}\right)^2 - 1 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Si $\mathbf{Det}\big\{\mathrm{H}\big[\mathrm{U}_{\text{eff}}\big]\big\} > 0$, el punto crítico es un extremo, siendo un mínimo (equilibrio estable) si además $\mathrm{H}_{11} > 0$ o un máximo (equilibrio inestable) si $\mathrm{H}_{11} < 0$. En cambio si es un punto de ensilladura, $\mathbf{Det}\big\{\mathrm{H}\big[\mathrm{U}_{\text{eff}}\big]\big\} < 0$ [90]. A continuación, analizamos el comportamiento de cada conjunto de puntos críticos:

1. La matriz hessiana evaluada en el origen, Ec. (4.7a), es

$$\mathrm{H}\big[\mathrm{U}_{\text{eff}}(\boldsymbol{P}_1)\big] = \frac{4U_0}{x_c^2}\begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix},$$

y su determinante tiene distintos tipos de comportamiento en función del parámetro de control,

$$\mathbf{Det}\big\{\mathrm{H}\big[\mathrm{U}_{\text{eff}}(\boldsymbol{P}_1)\big]\big\} = 1 - \alpha^2.$$

A su vez, $\mathrm{H}_{11} < 0$ para todo α. De este modo el origen es un máximo local para $\alpha < 1$ y un punto de ensilladura para $\alpha > 1$.

2. Veamos ahora a qué tipo de equilibrio corresponden los puntos críticos $\boldsymbol{P}_2$ (Ec. (4.7b)), ubicados simétricamente alrededor del origen sobre la recta $x_1 = x_2$. Calculamos la hessiana,

$$\mathrm{H}\big[\mathrm{U}_{\text{eff}}(\boldsymbol{P}_2)\big] = \frac{4U_0}{x_c^2}\begin{pmatrix} 3(1+\alpha)-1 & -\alpha \\ -\alpha & 3(1+\alpha)-1 \end{pmatrix},$$

y luego su determinante

$$\mathbf{Det}\big\{\mathrm{H}\big[\mathrm{U}_{\text{eff}}(\boldsymbol{P}_2)\big]\big\} = 8\alpha^2 + 12\alpha + 4 = 4\,(\alpha+1)\,(2\alpha+1)\,.$$

Como se ve, para cualquier valor de $\alpha > 0$, el determinante es positivo. De aquí que los puntos en la Ec. (4.7b) corresponden a extremos. Podemos afirmar que ambos puntos son mínimos locales puesto que $\mathrm{H}_{11} > 0$.

3. Los puntos críticos $\boldsymbol{P}_3$, Ec. (4.7c), se encuentran sobre la diagonal $x_1 = -x_2$. Los reemplazamos en la hessiana (4.8) para analizar el tipo de equilibrio,

$$\mathrm{H}\big[\mathrm{U}_{\text{eff}}(\boldsymbol{P}_3)\big] = \frac{4U_0}{x_c^2}\begin{pmatrix} 3(1-\alpha)-1 & -\alpha \\ -\alpha & 3(1-\alpha)-1 \end{pmatrix}.$$

Calculando su determinante,

$$\mathbf{Det}\big\{\mathrm{H}\big[\mathrm{U}_{\text{eff}}(\boldsymbol{P}_3)\big]\big\} = 8\alpha^2 - 12\alpha + 4 = 4\,(\alpha-1)\,(2\alpha-1)\,,$$

encontramos que los puntos son extremos si $\alpha < \frac{1}{2}$ y puntos de ensilladura si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Vemos que los extremos corresponden a mínimo pues $\mathrm{H}_{11} = 2 - 3\alpha > 0$ para $\alpha < 2/3$.

4. Los cuatro puntos críticos $\boldsymbol{P}_4$ están ubicados sobre la circunferencia de radio x_c y separados a 90° uno de otro, Ec. (4.7d). Ya mencionamos que el conjunto de puntos

está acotado a la región $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Veamos que se trata de puntos de ensilladura. Para ello alcanza con demostrar que en la región de interés,

$$\mathbf{Det}\Big\{\mathrm{H}\big[\mathrm{U}_{\text{eff}}(\boldsymbol{P}_4)\big]\Big\} < 0.$$

Reemplazando la Ec. (4.7d) en la Ec. (4.8),

$$\mathrm{H}\big[\mathrm{U}_{\text{eff}}(\boldsymbol{P}_4)\big] = \frac{U_0}{x_c^2}\begin{pmatrix} 3\left[\sqrt{1-2\alpha}-\sqrt{1+2\alpha}\right]^2 - 4 & -4\alpha \\ -4\alpha & 3\left[\sqrt{1-2\alpha}+\sqrt{1+2\alpha}\right]^2 - 1 \end{pmatrix},$$

de donde se desprende el determinante

$$\begin{aligned} \mathbf{Det}\Big\{\mathrm{H}\big[\mathrm{U}_{\text{eff}}(\boldsymbol{P}_4)\big]\Big\} &= \left[1-3\sqrt{1-4\alpha^2}\right]\left[1+3\sqrt{1-4\alpha^2}\right] - 4\alpha^2 \\ &= \left[1-9(1-4\alpha^2)\right] - 4\alpha^2 \\ &= -8\left[1+(2\alpha)^2\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como queríamos mostrar, $\mathbf{Det}\Big\{\mathrm{H}\big[\mathrm{U}_{\text{eff}}(\boldsymbol{P}_4)\big]\Big\} < 0$.

En la tabla 4.1 resumimos las características de los puntos críticos analizados.

Distribución de puntos críticos				
Pto. crítico	Potencial	$0 < \alpha < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < \alpha < 2$	$1 < \alpha < \infty$
$\boldsymbol{P}_1$	$\mathrm{U}_{\text{eff}} = 0$	Máximo		Pto. ensill.
$\boldsymbol{P}_2$	$\mathrm{U}_{\text{eff}} = -2U_0\,(1+\alpha)^2$	Mínimo		
$\boldsymbol{P}_3$	$\mathrm{U}_{\text{eff}} = -2U_0\,(1-\alpha)^2$	Mínimo	Pto. ensill.	$\nexists$
$\boldsymbol{P}_4$	$\mathrm{U}_{\text{eff}} = -U_0\left(1-2\alpha^2\right)$	Pto. ensill.	$\nexists$	

Tabla 4.1: Caracterización de los puntos críticos del potencial dado por la Ec. (4.4) en función del parámetro de control α.

4.2.3. Diagrama de bifurcaciones

En la presente Sección analizaremos la influencia del acoplamiento (o su equivalente el parámetro de control, α) sobre la dinámica del sistema en ausencia de ruido. Como ya

vimos, existen tres regiones, $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ y $1 < \alpha < \infty$, donde se observan tres comportamientos diferentes, y por lo tanto, dos bifurcaciones. La primera ocurre para $\alpha = \frac{1}{2}$ y la segunda para $\alpha = 1$.

1. En la región $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, el sistema de Ecs. (4.5) con el potencial efectivo de la Ec. (4.4) posee 9 puntos críticos en el espacio de fases $x_1 - x_2$, cuatro nodos estables, cuatro puntos de ensilladura y un nodo inestable en el origen.

   Para $\alpha = 0$ todos los nodos $\boldsymbol{P}_2$ y $\boldsymbol{P}_3$ se encuentran, a una distancia $\sqrt{2}x_c$ del origen sobre las diagonales $x_1 = x_2$ y $x_1 = -x_2$ respectivamente. Los puntos de ensilladora $\boldsymbol{P}_4$ se hallan sobre los ejes a una distancia x_c tanto del origen como de los nodos.

   A medida que α crece, los nodos $\boldsymbol{P}_3$ se desplazan sobre la recta $x_1 = x_2$ acercándose al origen, mientras que el potencial cerca de los mismos se vuelve cada vez más superficial. Simultáneamente los nodos $\boldsymbol{P}_2$ se alejan del origen y el potencial en ellos se vuelve cada vez más profundo. Por su parte, los puntos de ensilladura $\boldsymbol{P}_4$ se desplazan sobre la circunferencia $x_1^2 + x_2^2 = x_c^2$ hacia la diagonal $x_1 = -x_2$ (ver figura 4.3).

2. Región $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Para $\alpha = \frac{1}{2}$ el sistema experimenta una bifurcación del tipo 'pitchfork' subcrítica, donde cada mínimo local $\boldsymbol{P}_3$ se encuentra con dos puntos de ensilladura $\boldsymbol{P}_4$ y se convierten en un único punto de ensilladura. Por otro lado los puntos de equilibrio globales $\boldsymbol{P}_4$ continúan siendo mínimos cada vez más profundos y el origen sigue siendo un máximo local como puede verse en la figura 4.3.

3. Región $1 < \alpha < \infty$. Una nueva bifurcación aparece en $\alpha = 1$. En este caso, los dos puntos de ensilladura $\boldsymbol{P}_3$ se encuentran con el punto de equilibrio inestable $\boldsymbol{P}_1$. Para $\alpha > 1$ continúa el origen como único punto de ensilladura.

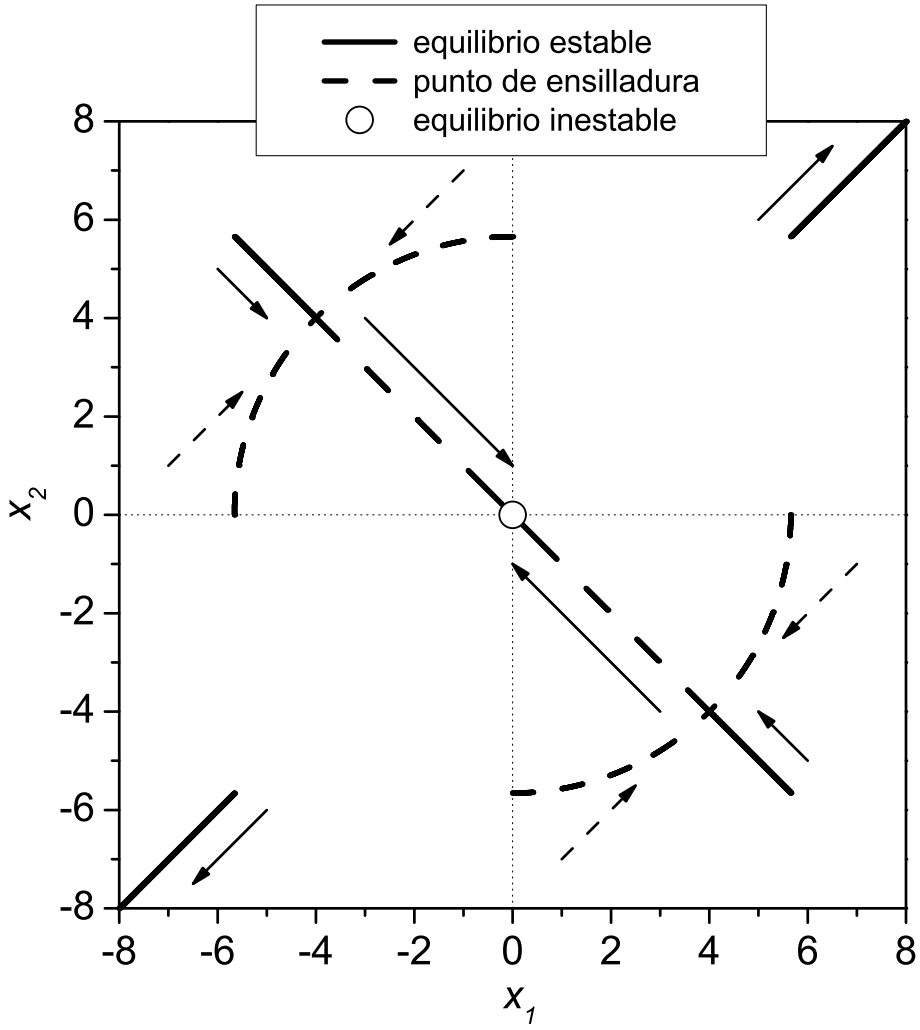


Figura 4.3: Diagrama de bifurcaciones del sistema (4.5) para $U_0 = 256$, $x_c = \sqrt{32}$. Las flechas indican la dirección de crecimiento de α.

En este trabajo, nos centramos únicamente en la región $\alpha < \frac{1}{2}$ donde se puede observar el comportamiento dinámico más interesante. En la figura 4.2 mostramos el potencial bidimensional de la Ec. (4.4) para el caso particular $\alpha \approx 0.14$.

4.3. Modelo de cuatro estados

Así como se acostumbra aproximar el comportamiento de un oscilador en un potencial biestable por un modelo de dos estados (véase, por ejemplo, [49, 53]) podemos hacer lo mismo aquí para describir en forma aproximada el comportamiento del sistema dado en la Ec. (4.5) utilizando un modelo de cuatro estados discretos, uno por cada punto de equilibrio del potencial (4.4).

Enumeremos los estados de 0 a 3, comenzando en el punto de equilibrio ubicado en el cuadrante superior-derecho de la figura 4.2 y continuando en la dirección contraria al de las agujas del reloj. Sea $n_i(t)$ la probabilidad de encontrar al sistema en el estado i al tiempo t, entonces su comportamiento puede ser descripto por la siguiente ecuación:

$$\dot{\boldsymbol{n}} = \mathbb{W} \cdot \boldsymbol{n}, \tag{4.9}$$

donde el vector $\boldsymbol{n} = (n_0, n_1, n_2, n_3)^T$ debe cumplir la condición de normalización $\sum_{i=0}^{3} n_i = 1$. $\mathbb{W}$ es la matriz de transición dada por [47–49]

$$\mathbb{W} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq 0}}^{3} W_{0i} & W_{10} & W_{20} & W_{30} \\ W_{01} & -\sum\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq 1}}^{3} W_{1i} & W_{21} & W_{31} \\ W_{02} & W_{12} & -\sum\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq 2}}^{3} W_{2i} & W_{32} \\ W_{03} & W_{13} & W_{23} & -\sum\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq 3}}^{3} W_{3i} \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

El coeficiente W_{ij} representa la tasa de transición del estado i al j. Aprovechando la

simetría del problema, podemos reducir significativamente la complejidad de la matriz,

$$\begin{aligned} W_{20} &= W_{02}, \\ W_{13} &= W_{31}, \\ W_{01} &= W_{03} = W_{21} = W_{23}, \\ W_{10} &= W_{12} = W_{30} = W_{32}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz resultante depende únicamente de cuatro tasas de transición,

$$\mathbb{W} = \begin{pmatrix} -(2W_{01}+W_{02}) & W_{10} & W_{02} & W_{10} \\ W_{01} & -(2W_{10}+W_{13}) & W_{01} & W_{13} \\ W_{02} & W_{10} & -(2W_{01}+W_{02}) & W_{10} \\ W_{01} & W_{13} & W_{01} & -(2W_{10}+W_{13}) \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Sus autovalores son

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, & \lambda_1 &= -2\left(W_{01}+W_{02}\right), \\ \lambda_2 &= -2\left(W_{01}+W_{10}\right), & \lambda_3 &= -2\left(W_{10}+W_{13}\right). \end{aligned}$$

Y los correspondientes autovectores,

$$\begin{aligned} V_0 &= (\tfrac{W_{10}}{W_{01}},\ 1, \tfrac{W_{10}}{W_{01}},\ 1) & V_1 &= (\ -1,\ 0,\ \ 1,\ 0) \\ V_2 &= (\ -1,\ 1,\ -1,\ 1) & V_3 &= (\ \ 0, -1,\ \ 0,\ 1). \end{aligned}$$

Es interesante notar que ni los autovalores ni los autovectores dependen de los coeficientes W_{02} y W_{13}, que miden las transiciones entre estados diagonalmente opuestos.

Las tasas de transición W_{ij} pueden estimarse a partir de las tasas de Kramer [48] como

$$W_{ij} \approx K_{ij} \exp\left[-2\tfrac{\Delta U_{ij}}{\sigma^2}\right],$$

donde K_{ij} es una constante de proporcionalidad y ΔU_{ij} es la altura de la barrera de potencial que separa a los estados i y j. Aproximamos la altura de la barrera al ir del estado 0 hacia uno de los estados adyacentes, ΔU_{01}, como la diferencia entre el potencial en el punto de ensilladura que está en el camino entre ambos equilibrios, y el potencial

en el punto de equilibrio correspondiente al estado 0 (ver cuadro 4.1),

$$\begin{aligned}\Delta U_{01} &= \mathrm{U}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{P}_4) - \mathrm{U}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{P}_2), \\ &= -U_0\left(1-2\alpha^2\right) - \left(-2U_0\left(1+\alpha\right)^2\right), \\ &= U_0\left(1+2\alpha\right)^2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

De este modo ΔU_{01} es la mínima energía necesaria para poder atravesar la barrera. Equivalentemente podemos calcular la barrera ΔU_{10} como la diferencia entre el potencial en el punto de ensilladura que está en el camino entre ambos equilibrios y el potencial en el punto de equilibrio correspondiente al estado 1,

$$\begin{aligned}\Delta U_{10} &= \mathrm{U}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{P}_4) - \mathrm{U}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{P}_3), \\ &= -U_0\left(1-2\alpha^2\right) - \left(-2U_0\left(1-\alpha\right)^2\right), \\ &= U_0\left(1-2\alpha\right)^2. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Finalmente las barreras ΔU_{02} y ΔU_{13} se determinan como la diferencia entre el potencial en el origen y el potencial en los estados 0 y 1 respectivamente,

$$\begin{aligned}\Delta U_{02} &= \mathrm{U}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{P}_0) - \mathrm{U}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{P}_1), \\ &= 2U_0\left(1+\alpha\right)^2. \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}\Delta U_{13} &= \mathrm{U}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{P}_0) - \mathrm{U}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{P}_1), \\ &= 2U_0\left(1-\alpha\right)^2. \end{aligned} \tag{4.15}$$

4.4. Simulaciones numéricas

Para almacenar un bit aplicamos un pequeño pulso externo sobre el primer oscilador de la Ec. (4.5). El pulso está caracterizado por su amplitud P_0 y su duración T_P:

$$P\left(t\right) = \begin{cases} P_0, & \text{Si } t < T_P \\ 0, & \text{Si } t > T_P \end{cases}. \tag{4.16}$$

Dado que estamos interesados en un dispositivo que funcione únicamente en presencia de ruido la amplitud del pulsos debe ser suficientemente débil como para que no pueda forzar al oscilador a salir del pozo más profundo. En particular, para nuestras simulaciones fijamos P_0 de forma tal que cumpla la siguiente relación

$$P_0 x_c \sqrt{2(1+\alpha)} < 2U_0 \left(1+\alpha\right)^2 ,$$

donde $x_c\sqrt{2(1+\alpha)}$ es la distancia del nodo $\boldsymbol{P}_2$ al origen y el lado derecho corresponde a la barrera ΔU_{02} en la Ec. (4.14). Entonces

$$P_0 < P_0^{\mathrm{Crit}}(\alpha) = \frac{U_0}{x_c}\sqrt{2}\left(1+\alpha\right)^{3/2} .$$

Para poder comparar el desempeño de la memoria con distinos acoplamientos hemos escogido

$$P_0 = 0.13\, P_0^{\mathrm{Crit}}(\alpha) . \tag{4.17}$$

La información almacenada se recupera, a tiempo t_0, desde cualquiera de los dos osciladores, promediando durante el tiempo que dura el pulso

$$\bar{x}_i(t_0) = \frac{1}{T_P}\int_{t_0}^{t_0+T_P} x_i(t)dt, \tag{4.18}$$

y comparando $\bar{x}_i(t_0)$ con un determinado umbral, arbitrariamente fijo en 0. El sistema incurre en un error si $\bar{x}_i(t_0) < 0$.

Evaluamos el desempeño de la memoria mediante la observación de la evolución temporal de la probabilidad de error al recuperar el bit almacenado, p_e, estimada como el número de errores dividido por el número total de realizaciones

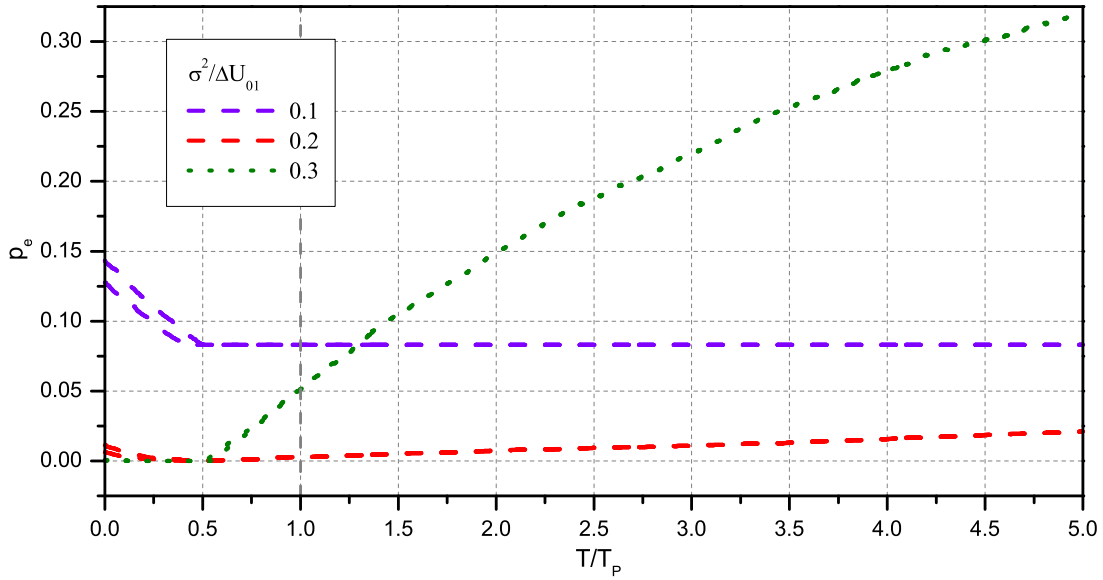
$$p_e^i = \frac{\#\text{ Errores en el oscilador } i}{\#\text{ Realizaciones}}, \text{ para } i = 1, 2. \tag{4.19}$$

Resolvimos numéricamente el sistema (4.5), con el potencial dado por (4.4) utilizando el método de Euler-Maruyama [91] con un paso de integración $\Delta t = 6.1035 \times 10^{-4}$. Los

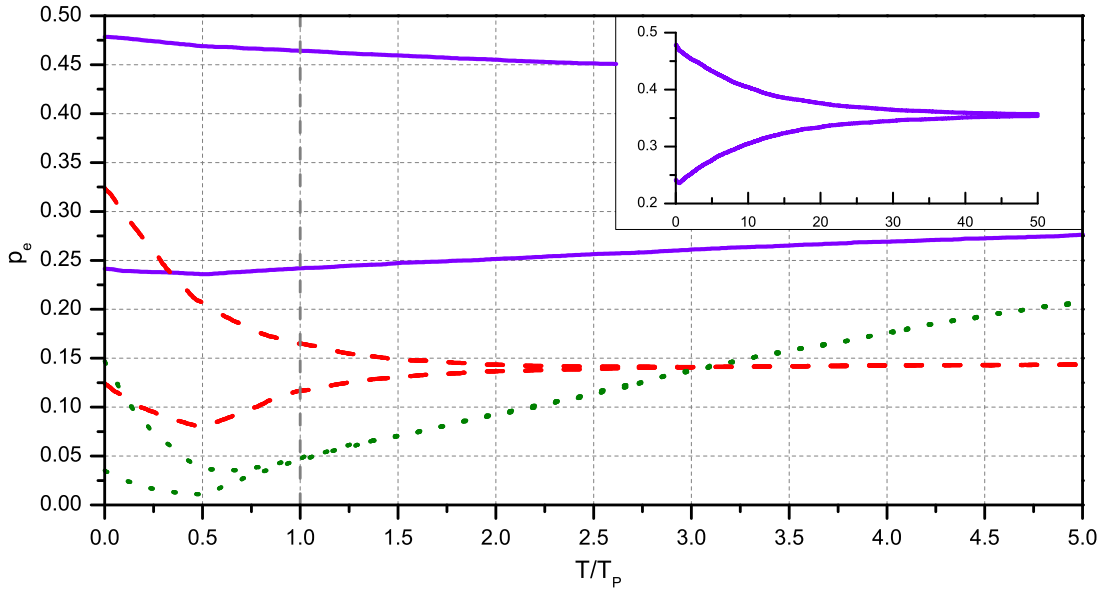
parámetros del potencial (3.2) son los mismos que ya hemos empleado en los capítulos 2 y 3 ($U_0 = 256$ y $x_c = \sqrt{32}$). De igual modo, la duración del pulso es la misma que la utilizada en los capítulos 2 y 3 para la duración de cada bit ($T_P = 5$). La intensidad del ruido, normalizada a la altura de la barrera ΔU_{01}, se varió entre 0 y $\frac{1}{2}\Delta U_{01}$. Para cada nivel de ruido, llevamos a cabo un total de 10000 realizaciones, con condiciones iniciales elegidas en forma aleatoria en la región $[-9.0 : +9.0] \times [-9.0 : +9.0]$.

En la figura 4.4 se muestra la evolución temporal de la probabilidad de error para distintas intensidades de ruido y acoplamientos ($\epsilon = 25$ y $\epsilon = 75$). La línea punteada vertical indica el instante en que se apaga el pulso. Obsérvese que la probabilidad de error para el primer oscilador es siempre inferior a la del segundo ($p_e^1 < p_e^2$). En el caso de acoplamiento fuerte (figura 4.4), mientras el pulso se encuentra encendido, la probabilidad de error mejora con el tiempo en ambos osciladores. Para una intensidad de ruido débil, al apagarse el pulso externo, la degradación de p_e es casi insignificante ya que el ruido por sí solo no es lo suficientemente intenso como para superar la barrera de potencial frecuentemente. Al aumentar la intensidad de ruido, también aumenta la tasa de degradación de p_e.

Si bien en el caso de acoplamiento fuerte el comportamiento de ambos osciladores es muy similar, en el caso de acoplamiento débil (ver figura 4.4) e intensidad de ruido pequeña, el primer oscilador rápidamente sigue al pulso externo, y, al apagarse, p_e^1 comienza a crecer suavemente. Por su parte, p_e^2 continúa disminuyendo aun cuando ya no actúa el pulso externo sobre el sistema. Podemos explicar este comportamiento en base a la interacción entre el pulso externo, el acoplamiento entre los osciladores y el ruido. Dado que tanto el acoplamiento como el ruido son débiles, la fuerza más importante que actúa sobre el primer oscilador es el pulso, a su vez, el segundo oscilador está forzado únicamente por la señal subumbral que proporciona el primer oscilador, y por lo tanto, es incapaz de seguir en forma inmediata al pulso externo. Cuando el pulso se apaga p_e^1



(a) p_e vs. T para $\epsilon = 75$.

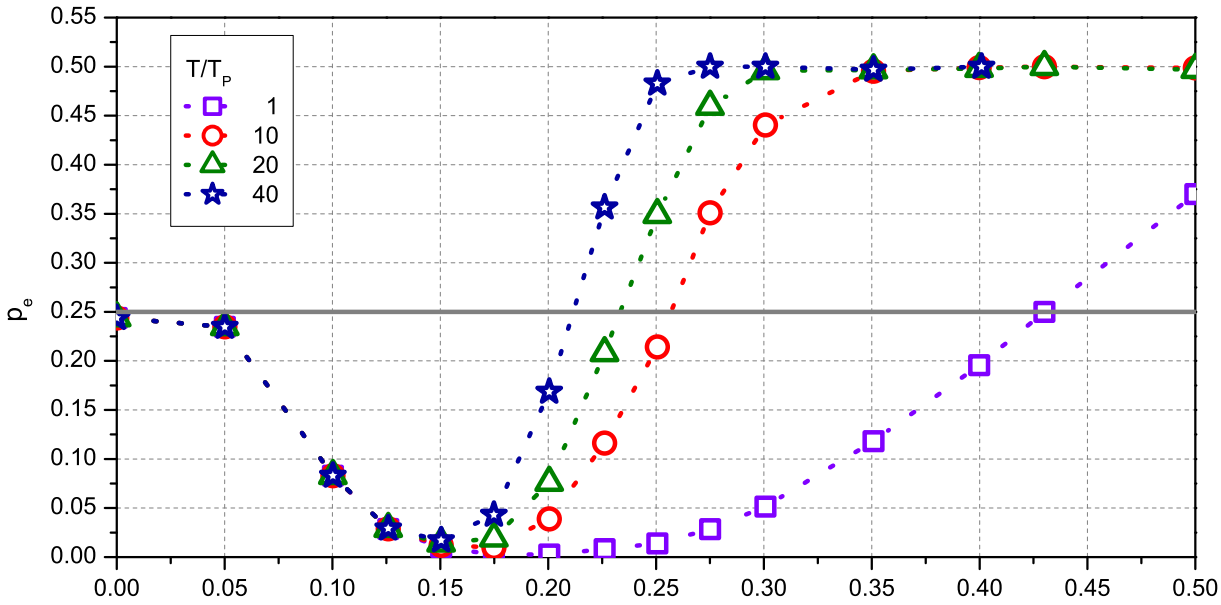


(b) p_e vs. T para $\epsilon = 25$.

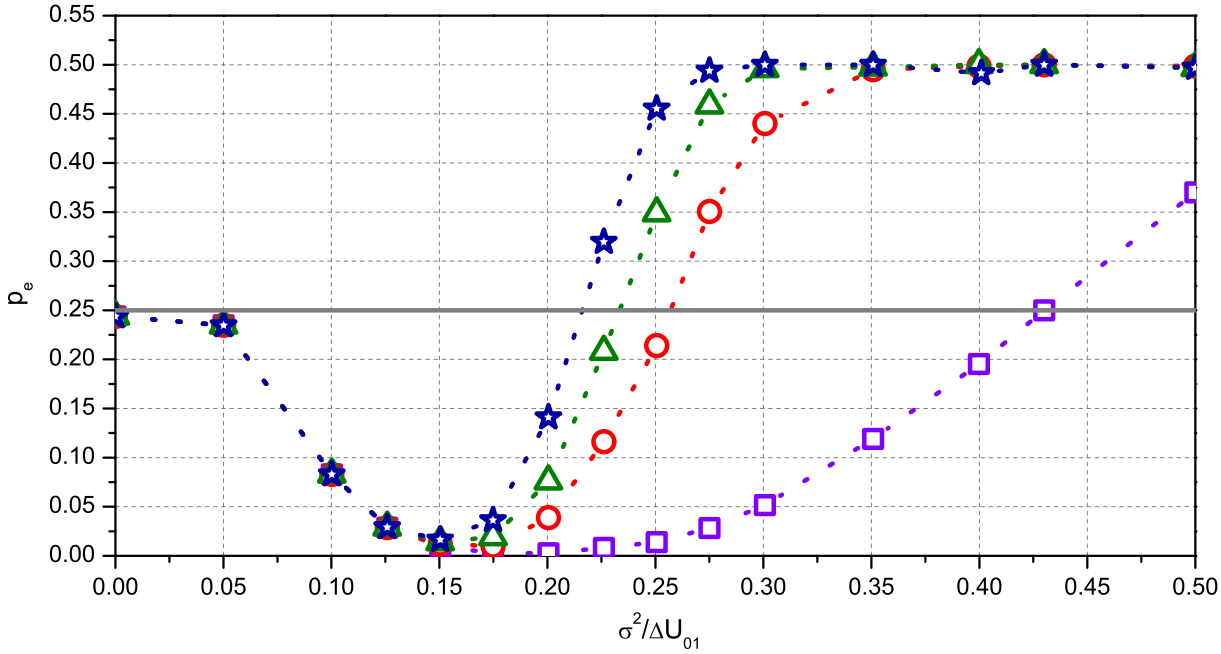
Figura 4.4: Resultados numéricos de la evolución temporal de la p_e para diferentes intensidades de ruido y acoplamientos. El tiempo se encuentra en unidades de la duración del pulso. En ambas figuras, las curvas que llevan el mismo color corresponden a p_e^2 arriba y p_e^1 abajo.

crece debido a la presencia del ruido y a la influencia del segundo oscilador, mientras que p_e^2 baja debido a que el primer oscilador actúa como una fuerza externa sobre el segundo. Al aumentar la intensidad del ruido el desempeño de ambos osciladores se vuelve muy similar independientemente de la intensidad del acoplamiento.

Las figuras 4.5 y 4.6 muestran la probabilidad de error estimada para cada oscilador en función de la intensidad del ruido y para tiempos crecientes ($T_1 = T_P$, $T_2 = 10\,T_P$, $T_3 = 20\,T_P$, y $T_4 = 40\,T_P$). Resulta interesante comparar estos resultados con los del caso determinista (esto es en ausencia de ruido). En este caso es simple estimar la probabilidad de error. Consideremos el espacio de fases en la figura 4.3, dado que el pulso solo actúa sobre el primer oscilador, una partícula en el cuadrante superior-derecho o en el inferior-derecho permanecerá allí luego de apagado el pulso. Es más, el pulso es suficientemente intenso como para mover una partícula desde el cuadrante superior-izquierdo al superior-derecho, pero es muy débil como para forzar a una partícula a salir del cuadrante inferior-izquierdo, dado que ahí se halla un profundo mínimo de potencial, tal como se muestra en la figura 4.3. Por lo tanto, la probabilidad de error para el primer oscilador es tan solo 1/4. Sin embargo, para el segundo, la probabilidad de error depende de la intensidad del acoplamiento. Si el acoplamiento es intenso, el primer oscilador es capaz de forzar al segundo, y de aquí $p_e^2 = 1/4$. Por otro lado, si el acoplamiento es débil, el estado del segundo oscilador no se altera como consecuencia de los cambios que sufra el primero y, por lo tanto, $p_e^2 = \frac{1}{2}$. Tan solo una pequeña cantidad de ruido es suficiente para mejorar el desempeño de la memoria ya que permite que una partícula ubicada en el cuadrante inferior-derecho pueda escapar hacia alguno de los pozos adyacentes. En la figuras 4.5 y 4.6 puede verse la influencia positiva del ruido. Es simple distinguir un comportamiento antiresonante, i.e., la probabilidad de error es optimizada para una cierta intensidad de ruido.

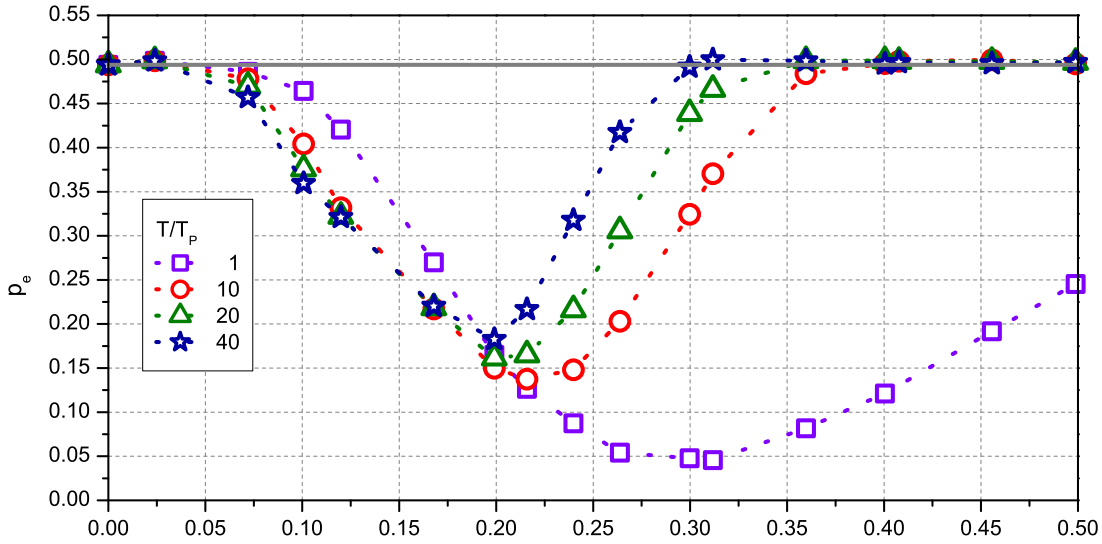


(a) Oscilador 2

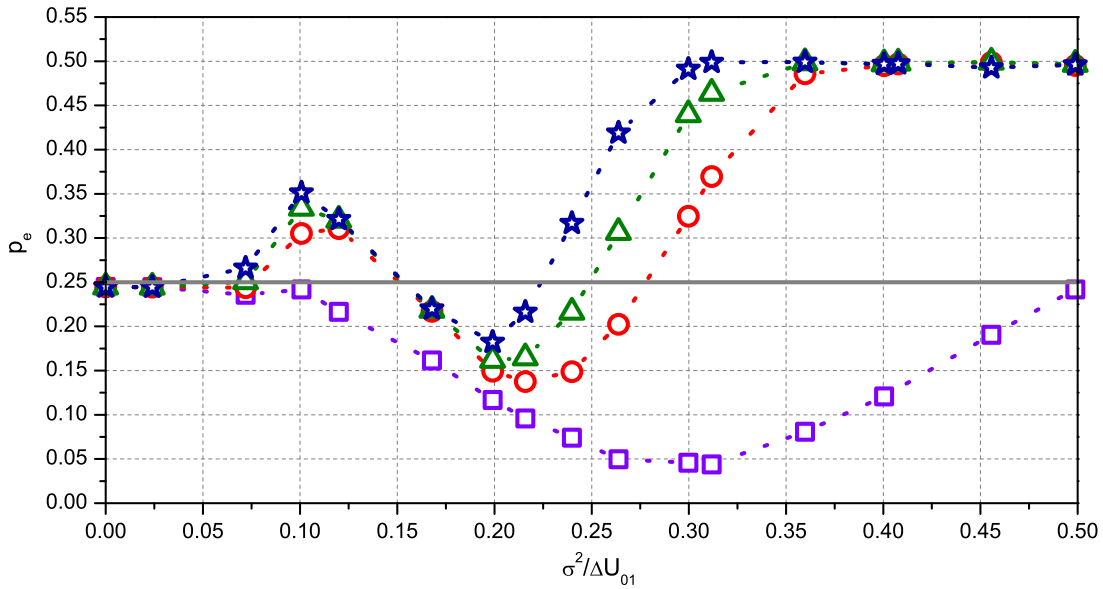


(b) Oscilador 1

Figura 4.5: Probabilidad de error en función de la intensidad de ruido para diferentes tiempos de observación ($T = T_P$, $10T_P$, $20T_P$ y $40T_P$) y acoplamientos fuerte ($\epsilon = 75$).



(a) Oscilador 2



(b) Oscilador 1

Figura 4.6: Probabilidad de error en función de la intensidad de ruido para diferentes tiempos de observación ($T = T_P$, $10T_P$, $20T_P$ y $40T_P$) y acoplamiento fuerte ($\epsilon = 25$).

Volvamos por un instante al comportamiento dinámico de los osciladores acoplados. Los resultados mostrados en la figuras 4.5 y 4.6 indican que la intensidad del acoplamiento juega un rol significativo en la dinámica del dispositivo: para acoplamiento débil (figura

4.5) el mínimo p_e aumenta con el tiempo (i.e, la memoria se degrada), mientras que permanece aproximadamente constante para acoplamiento fuerte (figura 4.6). Esta es una característica deseable para una implementación práctica ya que constituye un sistema cuyo desempeño no solo se beneficia del ruido agregado, sino que también es robusto en un ambiente ruidoso. En ambos casos el rango de ruidos donde ocurre el mínimo p_e disminuye con el tiempo.

4.5. Sincronización y tiempo de persistencia

Teniendo en mente una realización práctica del sistema de osciladores acoplados como dispositivo de almacenamiento de un bit, no solo es necesario que la recuperación de la información sea 'asincrónica', en el sentido que sea posible interrogar al sistema en cualquier instante, sino que también podamos obtener un único valor del estado de la memoria al interrogar a cualquiera de los dos osciladores. Decimos que los osciladores se encuentran 'sincronizados' si p_e^1 y p_e^2 difieren en una pequeña cantidad, arbitrariamente fija en 10^{-3}. Los resultados de la figura 4.4 muestran la evolución temporal de la tasa de error para tres diferentes intensidades de ruido y dos acoplamientos diferentes, comenzando en el instante en que se enciende el pulso hasta que ambos osciladores se hallan sincronizados. Definimos el tiempo transcurrido entre estos dos eventos como el tiempo de sincronización T_s. Comparando el desempeño de los dos osciladores encontramos que, hasta que se alcanza la sincronización, el segundo oscilador exhibe una peor p_e para todas las intensidades de ruido. Esto se debe a que el pulso externo actúa exclusivamente sobre el primer oscilador. A su vez, en la figura 4.4 se puede ver que la sincronización es inmediata en el caso de fuerte acoplamiento.

En la figura 4.7 mostramos el comportamiento de la sincronización (i.e., el tiempo de sincronización y la probabilidad de error al momento de la sinronización) en función de

la intensidad del ruido para el caso de acoplamiento débil. Como se puede apreciar, al aumentar la intensidad del ruido, disminuye T_s.

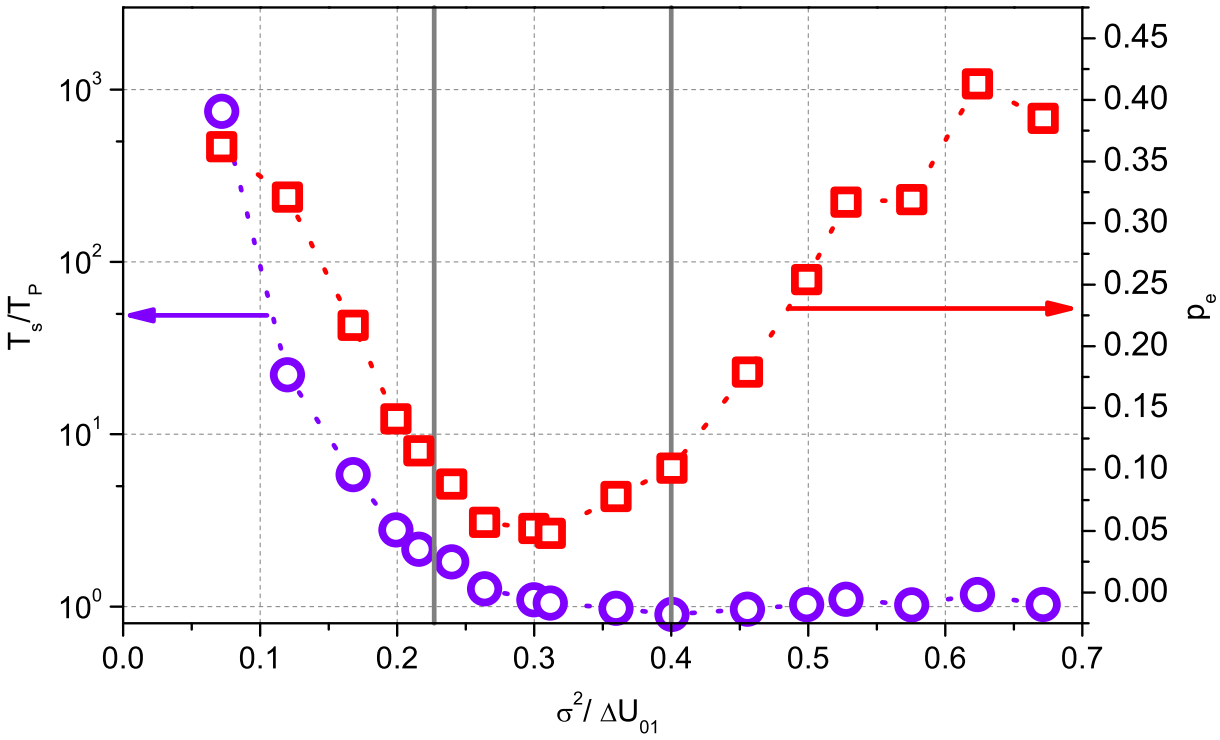


Figura 4.7: Tiempo de sincronización (T_s) y probabilidad de error al tiempo T_s en función de la intensidad del ruido. La línea sólida corresponde a la aproximación teórica de T_s.

El comportamiento del tiempo de sincronización (cuando es mayor que T_P) puede describirse cualitativamente de la siguiente forma: supongamos que interrogamos la memoria en forma instantánea observando el estado del oscilador, i.e., sin practicar el promedio de la Ec. (4.18). Luego, la probabilidad de error puede ser escrita en términos de la probabilidad de los estados en la Ec. (4.9) como $p_e^1(t) = n_1(t) + n_2(t)$ y $p_e^2(t) = n_2(t) + n_3(t)$. Resolviendo la Ec. (4.9) para una dada condición inicial se puede mostrar que

$$p_e^1(t) - p_e^2(t) \propto \mathrm{e}^{-2(W_{10}+W_{13})t}.$$

Por lo tanto , el tiempo de sincronización debe ser

$$T_s = \frac{\tau}{2(W_{10} + W_{13})}, \tag{4.20}$$

donde τ es una constante. Si bien nuestra derivación de la Ec. (4.20) asume la observación instantánea del estado del oscilador, es razonable esperar que la ecuación continúe siendo aproximadamente válida cuando practicamos el promedio de la Ec. (4.18) para $T_S < T_P$. Efectivamente, en la figura 4.7 podemos observar que la Ec. (4.20) ajusta a los resultados numéricos, donde W_{10} y W_{13} fueron calculados utilizando las Ecs. (4.12)-(4.14) y τ fue calculado ajustando únicamente el valor correspondiente al menor valor de ruido.

Como se puede observar en la figura 4.7 hay un rango de intensidades de ruido, encerrado por las líneas punteadas verticales, para el cual se verifica simultáneamente que p_e es pequeño y T_s se halla cerca de su mínimo. Por lo tanto puede interrogarse a cualquiera de los dos osciladores en cualquier instante y se obtienen p_e cerca de su mínimo.

Finalmente, caracterizamos el tiempo de persistencia de la memoria (T_m) como el tiempo transcurrido hasta que el primer oscilador alcanza una probabilidad de error igual a la correspondiente al caso sin ruido ($p_e = \frac{1}{4}$). A partir de ese instante el ruido ya no colabora en el desempeño del dispositivo. Esta definición nos permite especificar el tiempo de "refresco" de la memoria de la misma forma que en las memorias de acceso dinámico aleatorio (DRAM, del inglés *Dynamic Random Access Memory*). Notar que en la figura 4.8, donde se grafica T_m en función de la intensidad de ruido para un acoplamiento débil, T_m presenta un comportamiento tipo resonancia estocástica. La explicación de este comportamiento radica en el hecho que, para una intensidad de ruido óptima, el sistema se desplaza fácilmente hacia el cuadrante de equilibrio superior-derecho pero difícilmente lo abandona. Nótese que para este nivel óptimo de ruido, **el dispositivo no solo maximiza el tiempo de persistencia sino que también el tiempo de sincronización y la**

probabilidad de error están próximos a sus valores mínimos.

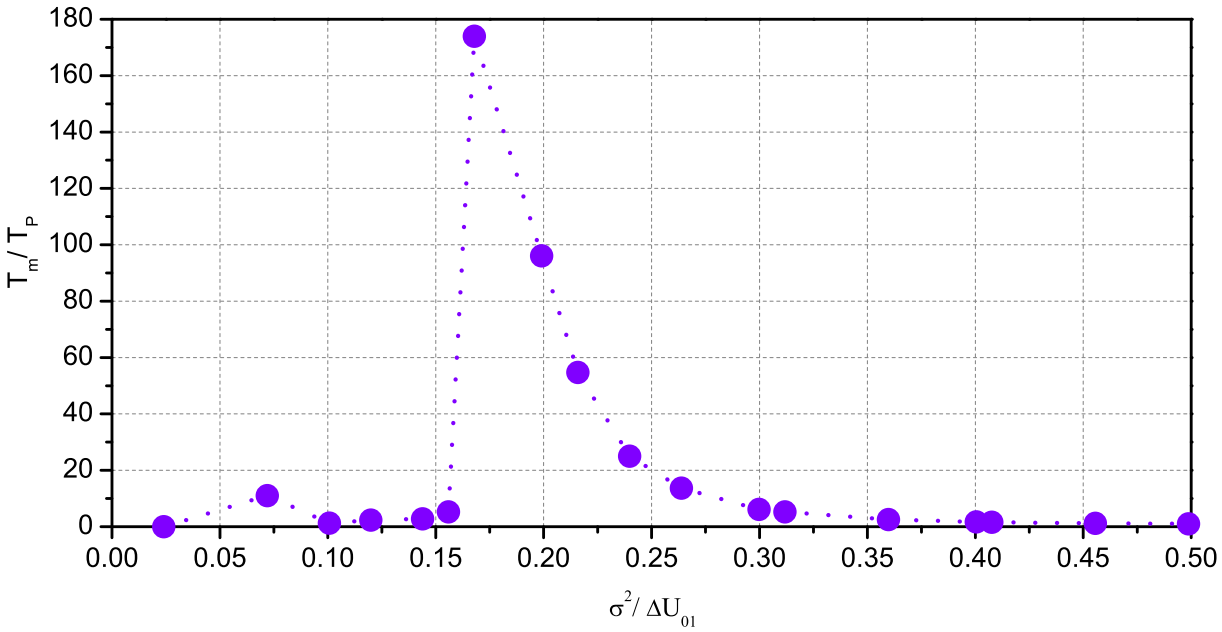


Figura 4.8: Tiempo de persistencia (T_m) en función de la intensidad de ruido.

4.6. Modelo experimental

En este apartado presentamos resultados experimentales correspondientes a un anillo de dos Schmitt triggers utilizados como modelos "discretos" de los potenciales biestables. Los dos ST tienen idénticas características de entrada y salida: los umbrales inferior y superior están fijos en -1 V y $+3$ V respectivamente, mientras que los estados bajo y alto a la salida se establecen en los niveles subumbrales0 y $+2$ V (ver figura 4.9).

Un esquema del dispositivo propuesto se muestra en la figura 4.10. Sobre el primer ST se inyecta un pulso de amplitud $+5$ V (supraumbral) y duración $T_P = 1$ ms que representa el estado '1' a ser almacenado. Su salida es utilizada como señal de entrada por el segundo ST. El anillo se cierra al realimentar al primer ST con la salida del segundo. Descripto brevemente, el generador de ruido consiste en un generador PRBS operando

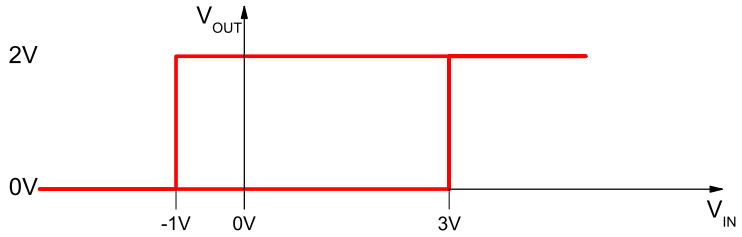


Figura 4.9: Esquema del ST.

a 250 kHz [16] y un filtro pasa bajos con su frecuencia de corte superior a 10 KHz. De este modo la densidad espectral de ruido que se obtiene es plana en el rango estudiado. Periódicamente se refresca la memoria cada $98\,T_P$ aplicando un pulso idéntico al inicial sobre el primer ST y, simultáneamente, alternando el estado del segundo ST de modo de explorar todas las configuraciones iniciales posibles.

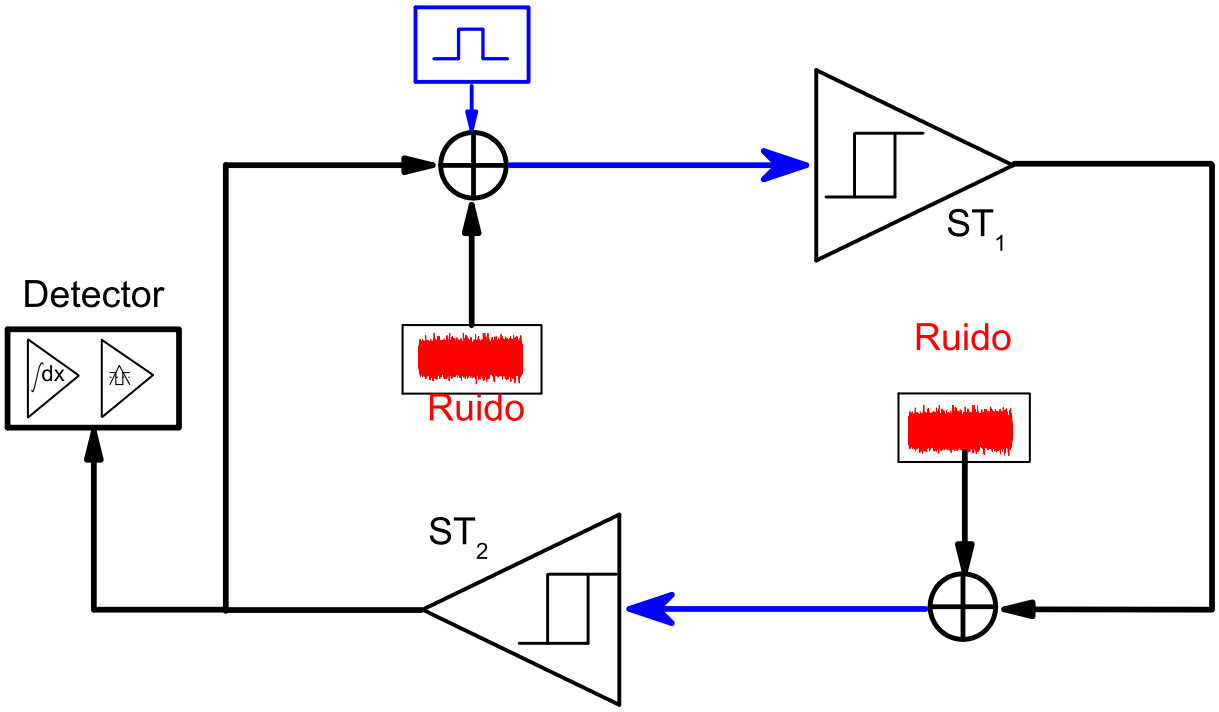


Figura 4.10: Esquema de la memoria compuesta por un anillo de dos Schmitt triggers.

El estado de la memoria se recupera interrogando al segundo ST, una vez apagada

la señal externa durante T_P. Como ya fue discutido, el detector promedia la tensión a la salida del ST durante una fracción de T_P

$$\langle V_2(t_0)\rangle = \int_{t_0}^{t_0+\beta T_P} V_2(t)dt,$$

con $\beta < 1/2$ y compara con un umbral fijo a fin de tomar una decisión entre los estados '1' y '0'. Por último, repetimos este procedimiento 1000 veces a fin de estimar la probabilidad de error, definida como el número de veces que el detector decidió '0' dividido por el número de realizaciones.

En la figura 4.11 mostramos la probabilidad de error estimads en función de la intensidad del ruido y del tiempo transcurrido. Como se puede observar, p_e se comporta de una manera similar al resultado de la figura 4.6(b). Por ejemplo, $p_e = \frac{1}{2}$ para intensidades de ruido bajas, ya que la salida del primer ST no es lo suficientemente intensa como para impulsar al segundo ST. También se puede observar que hay una región de ruidos que reduce al mínimo la probabilidad de error, un comportamiento que también está presente en los resultados de la figura 4.6. En este rango no se computaron errores. Dado que la señal de entrada actúa solamente durante T_P y el ruido se encuentra presente continuamente a la entrada de los dos ST, esperamos que la BER aumente con el tiempo. Sin embargo, alrededor de la intensidad del ruido óptimo el desempeño del dispositivo no muestra una degradación apreciable con el tiempo. Este es un resultado interesante, ya que apunta a un dispositivo cuyo desempeño no solo puede beneficiarse del ruido añadido sino que también es robusto en un entorno ruidoso. En resumen, los resultados experimentales obtenidos con elementos discretos reproducen algunas de las características principales de la memoria propuesta, allanando el camino hacia una aplicación práctica.

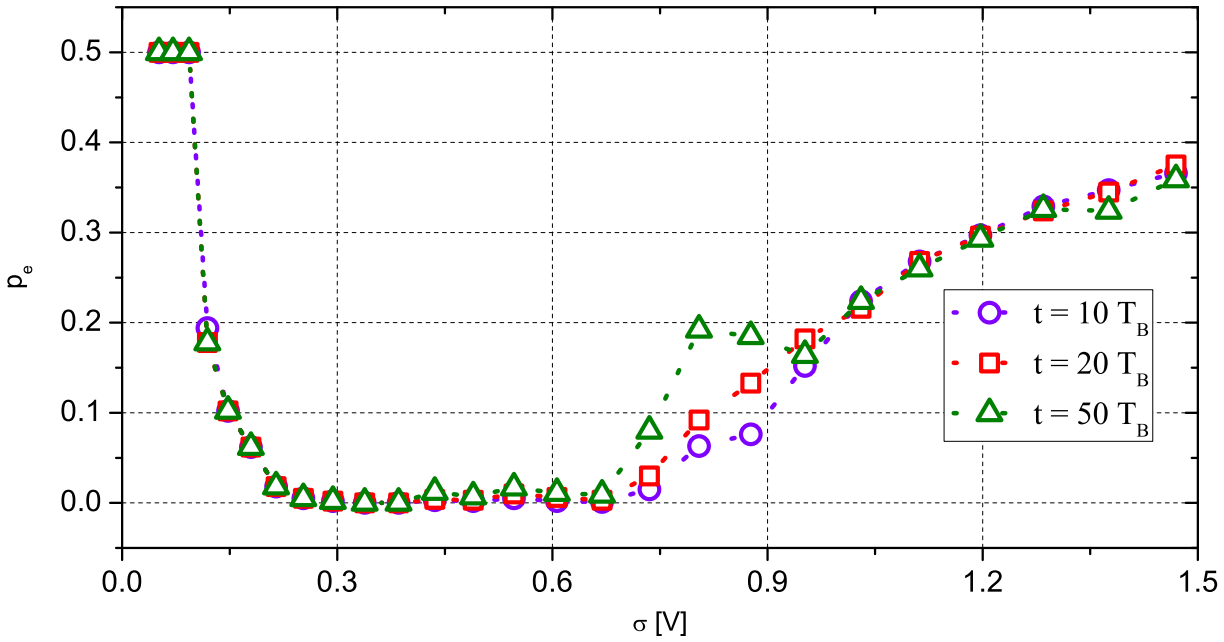


Figura 4.11: Desempeño de la memoria en función de la intensidad del ruido y del tiempo.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

En esta tesis hemos explorado numérica y experimentalmente la dinámica y el desempeño de sistemas compuestos por un número arbitrario de osciladores biestables idénticos, acoplados unidireccionalmente, en diferentes configuraciones y en presencia de ruido. Como modelo discreto de los osciladores biestables en nuestros experimentos hemos utilizado un conjunto de Schmitt triggers.

Los dos sistemas considerados fueron:

- Una cadena de diez osciladores acoplados unidireccioanlmente, funcionando como una línea de transmisión de información en presencia de ruido.
- Un anillo compuesto por dos osciladores realimentados, actuando como memoria capaz de almacenar un bit de información.

5.1. Transmisión de información en presencia de ruido

El estudio de la dinámica de la cadena de osciladores en función del acoplamiento nos permitió identificar dos regímenes de transmisión correspondientes a acoplamiento *débil* y *fuerte*. En el primer caso, la fuerza que cada oscilador ejerce sobre el siguiente es de amplitud subumbral, de modo que es indispensable la presencia de ruido para garantizar

la transmisión. Por su parte, en el caso de acoplamiento fuerte, la transmisión ocurre aun en ausencia de ruido externo. De aquí que a estos dos regímenes los hemos identificado como *transmisión sostenida por ruido* y *transmisión sostenida por acoplamiento*, respectivamente.

Llevamos a cabo un análisis del desempeño de la cadena forzando al primer oscilador con una secuencia pseudoaleatoria de bits, modulados en formato NRZ, de amplitud subumbral y observando la respuesta de cada oscilador. Mostramos que, cuando una cantidad adecuada de ruido se añadía a cada oscilador, este sistema era capaz de transmitir información utilizando métricas que habitualmente se hallan en el ámbito de las comunicaciones digitales (i. e. la tasa de error y la relación señal-ruido).

En la mayoría de los sistemas de comunicación, como puede ser un sistema de comunicación óptica de alta capacidad, la presencia de ruido provoca una degradación de la relación señal-ruido que perjudica su desempeño y, eventualmente, puede volver indetectable a la información transmitida. Por el contrario, en la cadena analizada encontramos que el desempeño mejoraba considerablemente incrementando la intensidad del ruido hasta un valor óptimo.

Adaptando el cálculo de la relación señal-ruido para poder considerar señales PRBS codificadas en formato NRZ, mostramos explícitamente que la cadena de osciladores presentaba resonancia estocástica aperiódica a lo largo de la línea y en todos los regímenes de propagación.

Además comprobamos que la intensidad de ruido óptima, ubicada en ${\sigma^2}_{opt} \approx 0.6\Delta U$, no se alteraba mientras la señal avanzaba a lo largo de la cadena ni al cambiar de un régimen de propagación a otro. En particular, hallamos que la SNR evaluada en la intensidad de ruido óptima mejoraba al aumentar el acoplamiento alcanzando un comportamiento asintótico para acoplamientos suficientemente grandes.

Simultáneamente caracterizamos el desempeño del sistema mediante la tasa de error encontrando que, en función de la intensidad de ruido, se evidenciaba un comportamiento antiresonante, válido para todos los regímenes de propagación. En este caso la intensidad de ruido óptima se hallaba en ${\sigma^2}_{opt} \approx 0.8\Delta U$, es decir ligeramente desplazada hacia valores mayores de intensidad de ruido con respecto a la que aseguraba la máxima SNR.

Al medir la evolución de la tasa de error óptima a lo largo de la línea encontramos que, en todos los regímenes de propagación, ésta crecía en forma monótona. Esta degradación era más pronunciada cuanto más débil era el acoplamiento. Sin embargo, observamos una característica muy interesante: el desempeño del sistema superaba al de un sistema de transmisión degradado por la presencia de ruido blanco gaussiano aditivo (como es el caso de la mayoría de los sistemas de comunicación de alta capacidad). Un comportamiento similar hallamos en la evolución de la relación señal-ruido, evaluada en la intensidad de ruido que minimiza la tasa de error. En todos los regímenes de propagación, la SNR observada en la cadena de osciladores, disminuye con el número de oscilador a una tasa mucho menor que en un escenario de ruido blanco gaussiano aditivo. En resumen, pusimos de manifiesto que esta cadena funcionando como una línea de transmisión, comparada con un canal de comunicación lineal, exhibe un desempeño superior tanto en la medida de la relación señal-ruido como en la de la tasa de error.

Como una forma de estimar la solidez de la línea frente a variaciones en la intensidad del ruido, introdujimos una métrica de penalización como el cociente entre longitud del intervalo de intensidades de ruido que asegura una determinada tasa de error de referencia para el n-ésimo oscilador y el ancho a la misma tasa de error para el primer oscilador de la cadena. La penalización indica que tan cerca de la intensidad de ruido óptima se debe estar para garantizar una tasa de error de referencia. De acuerdo a la definición, si la penalización se hace infinita para un oscilador arbitrario significa que la señal no logra

llegar con una tasa de error inferior a la de referencia. Considerando una tasa de error de referencia BER $= 3 \cdot 10^{-2}$ hallamos que, en el caso de transmisión sostenida por ruido, la penalización crecía rápidamente con el número de oscilador alcanzando una asíntota vertical para el undécimo. Por otro lado, en el régimen de transmisión sostenido por acoplamiento, la penalización permanecía prácticamente constante a lo largo de la línea, de modo que no era necesario ajustar la intensidad de ruido para alcanzar el final de la línea.

Una muy interesante aplicación hallada a partir del análisis de los retardos que sufre un tren de bits al atravesar la cadena de osciladores, es la posibilidad de utilizar la cadena de osciladores como una línea de retardos "sintonizable" por ruido y acoplamiento. Determinamos el retardo medio calculando la correlación cruzada entre la señal de entrada y la respuesta del sistema. Para una intensidad de ruido constante y un acoplamiento fijo los retardos crecían linealmente con el número de oscilador. De este modo, para obtener un determinado retardo, una posibilidad consiste simplemente en agregar la cantidad necesaria de elementos a la cadena. Sin embargo, al considerar cadenas cada vez más largas se produce una degradación en el desempeño del sistema. Al estudiar la dependencia con la intensidad de ruido encontramos que, en todos los regímenes de transmisión, los retardos disminuían exponencialmente con el aumento de la intensidad de ruido. Un cálculo analítico elemental nos permitió comprender esta tendencia en base a los tiempos de escape de Kramer. En el régimen de transmisión sostenido por acoplamiento, la variación total de los retardos apenas alcanzaba un 20 % del bit slot para un rango de ruidos comprendidos entre $\sigma^2 \approx 0.3\Delta U$ y $\sigma^2 \approx 1.25\Delta U$, mientras que en la región de propagación sostenida por ruido, en el mismo rango de ruido, las variaciones llegaban hasta un 60 % del bit slot.

En cuanto a los resultados experimentales, nuestra investigación se basó en el desempeño de una línea de transmisión de información compuesta por cinco Schmitt triggers,

utilizados como modelos discretos de los potenciales biestables. La línea analizada funciona exclusivamente en el régimen de transmisión sostenida por ruido. Midiendo la tasa de error y calculando el factor Q, mostramos que la cadena de ST presenta un mínimo en la BER y un máximo en el factor Q, para una intensidad de ruido óptima. Al estudiar la degradación con la distancia encontramos que se comporta de la misma forma que lo hace una línea sometida a ruido blanco gaussiano aditivo.

Una futura línea de investigación en este área incluye el análisis del desempeño del sistema para otros formatos de modulación (tanto de amplitud como de fase), lo que permitiría analizar la dependencia del desempeño en el contenido espectral de la señal transmitida. Otra propuesta de trabajo futuro en esta tematica incluye el estudio de la posible aplicacion de la linea de retardos a la generación de números aleatorios, el procesamiento de información, o la interferometría.

5.2. Almacenamiento de información asistido por ruido

Por su parte, en el estudio del sistema compuesto por dos osciladores en una configuración del tipo bucle, mostramos que este es el único sistema (además del sistema compuesto por un solo oscilador) que puede derivarse de un potencial efectivo. En función del acoplamiento, el potencial posee tres comportamientos topológicamente diferentes. Nuestro análisis se llevó a cabo en la zona de menor acoplamiento, donde el sistema posee nueve puntos críticos, cuatro nodos estables, uno inestable y cuatro puntos de ensilladura.

Analizamos el desempeño de la memoria aplicando un pequeño pulso (que representaba un bit) sobre el primer oscilador y observando la evolución temporal de la probabilidad de error al recuperar el bit almacenado.

En primer lugar mostramos que el dispositivo propuesto es capaz de almacenar un *bit* de información en un ambiente ruidoso. Es más, demostramos que durante un largo

período de tiempo (más de 160 veces el tiempo de un pulso) el desempeño del sistema en presencia de ruido es superior al del sistema en ausencia de ruido (determinista) una característica de los fenómenos de resonancia estocástica.

El dispositivo propuesto puede considerarse como "asíncrono", en el sentido de que la información almacenada puede ser recuperada en cualquier momento. Además, después de un cierto tiempo de "sincronización", la probabilidad de recuperación errónea no depende del oscilador interrogado. Notablemente, hallamos que existe una rango de intensidades de ruido que minimiza tanto la probabilidad de error como el tiempo de sincronización.

El rendimiento del sistema también puede ser caracterizado por el tiempo de persistencia de la memoria, que hemos definido como el tiempo transcurrido hasta que la probabilidad de error se iguala a la del caso sin ruido. Encontramos que el mismo rango de ruidos maximiza la persistencia, minimiza la probabilidad de error y asegura la sincronización.

Luego, construimos un modelo del dispositivo propuesto por medio de un bucle de dos Schmitt triggers. Verificamos experimentalmente que este sistema es capaz de almacenar un bit y lo hace de manera más eficiente en presencia de ruido.

En resumen, creemos que el dispositivo propuesto puede servir como un bloque de construcción de futuros sistemas de computación que, debido a la creciente importancia de la integración, tendrán que hacer frente a menores márgenes de ruido.

En esta tematica nos queda analizar variaciones al esquema del bucle de 2 STs para que el sistema sea capaz de almacenar secuencias mas largas de bits. Para ello una alternativa posible consiste en introducir entre un los dos elementos un circuito que provoque un retardo arbitrario. De este modo, gracias al retardo podrían agregarse un número proporcional de bits. Otra alternativa posible es aumentar el número de elementos en el anillo. En este caso, los retardos necesarios para agregar más bits surgen naturalmente de las

propiedades de retardo de las cadenas analizadas.

Referencias

[1] W. Horsthemke y R. Lefever, *Noise-Induced Transitions: theory and applications in physics, chemistry and biology* (Springer, 2007).

[2] P. Hänggi, ChemPhysChem **3**, 285 (2002).

[3] A. Longtin, A. Bulsara y F. Moss, Phys. Rev. Lett. **67**, 656 (Jul. 1991).

[4] D. R. Chialvo, A. Longtin y J. Müller-Gerking, Phys. Rev. E **55**, 1798 (Feb. 1997).

[5] D. G. Luchinsky, R. Mannella, P. V. E. McClintock y N. G. Stocks, IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing **46**, 1205 (Sept. 1999).

[6] D. G. Luchinsky, R. Mannella, P. V. E. McClintock y N. G. Stocks, IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing **46**, 1215 (Sept. 1999).

[7] L. Qiang, W. Taiyong, L. Yonggang, W. Wei y W. Guofeng, Mechanical Systems and Signal Processing **21**, 2267 (2007).

[8] N. G. Stocks, Phys. Rev. Lett. **84**, 2310 (Mar. 2000).

[9] Y. G. Leng, Y. S. Leng, T. Y. Wang y Y. Guo, Journal of Sound and Vibration **292**, 788 (2006).

[10] B. Andò y S. Graziani, *Stochastic resonance: theory and applications* (Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, EEUU, 2000).

[11] FreePatentsOnline. Recuperado Abril 10, 2010, http://www.freepatentsonline.com/.

[12] D. Rousseau y F. Chapeau-Blondeau, Phys. Lett. A **321**, 280 (Feb. 2004).

[13] R. Benzi, A. Sutera y A. Vulpiani, J. Phys. A **14**, L453 (Nov. 1981).

[14] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera y A. Vulpiani, Tellus **34**, 10 (Feb. 1982).

[15] S. Fauve y F. Heslot, Phys. Lett. A **97**, 5 (Ago. 1983).

[16] P. Horowitz y W. Hill, *The Art of Electronics* (Cambridge University Press, Nueva York, EEUU, 1989).

[17] B. McNamara, K. Wiesenfeld y R. Roy, Phys. Rev. Lett. **60**, 2626 (Jun. 1988).

[18] V. S. Anishchenko, M. A. Safonova y L. O. Chua, Int. J. Bifurcation and Chaos **4**, 441 (Abr. 1994).

[19] T. Kapitaniak, Chaos, Solitons and Fractals **3**, 405 (Jul.-Ago. 1993).

[20] V. S. Anishchenko, V. V. Astakhov, A. B. Neiman, T. E. Vadivasova y L. Schimansky-Geier, *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic System*, Springer Series in Synergetics (Springer, 2007), segunda edición.

[21] K. Wiesenfeld y F. Moss, Nature **373**, 33 (Ene. 1995).

[22] R. N. Mantegna y B. Spagnolo, Phys. Rev. E **49**, R1792 (Mar. 1994).

[23] R. N. Mantegna y B. Spagnolo, Phys. Rev. Lett. **76**, 563 (Ene. 1996).

[24] X. Godivier, J. Rojas-Varela y F. Chapeau-Blondeau, Electron. Lett. **33**, 1666 (Sept. 1997).

[25] M. E. Inchiosa, A. R. Bulsara, A. D. Hibbs y B. R. Whitecotton, Phys. Rev. Lett. **80**, 1381 (Feb. 1998).

[26] J. K. Douglas, L. Wilkens, E. Pantazelou y F. Moss, Nature **365**, 337 (Sept. 1993).

[27] A. R. Bulsara, E. Jacobs y M. F. K. L. Zhou, Ting, Journal of Theoretical Biology **152**, 531 (Oct. 1991).

[28] A. R. Bulsara, S. B. Lowen y C. D. Rees, Phys. Rev. E **49**, 4989 (Jun. 1994).

[29] A. R. Bulsara y A. Zador, Phys. Rev. E **54**, R2185 (Sept. 1996).

[30] G. Mato, Phys. Rev. E **58**, 876 (Jul. 1998).

[31] D. Rousseau y F. Chapeau-Blondeau, Neural Process Lett **20**, 71 (Nov. 2004).

[32] Y. Sakumura y K. Aihara, Neural Process Lett **16**, 235 (Dic. 2002).

[33] G. Moore, Electronics **38** (Abr. 1965).

[34] K. Murali, S. Sinha, W. L. Ditto y A. R. Bulsara, Phys. Rev. Lett. **102**, 104101 (Mar. 2009).

[35] K. Murali, I. Rajamohamed, S. Sinha, W. L. Ditto y A. R. Bulsara, Appl. Phys. Lett. **95**, 194102 (Nov. 2009).

[36] S. Sinha, J. M. Cruz, T. Buhse y P. Parmananda, Europhys. Lett. **86**, 60003 (Jul. 2009).

[37] M. Carusela, R. P. J. Perazzo y L. Romanelli, Phys. Rev. E **64**, 031101 (Ago. 2001).

[38] M. F. Carusela, R. P. J. Perazzo y L. Romanelli, Physica D **168-69**, 177 (Ago. 2002).

[39] J. J. Collins, C. C. Chow y T. T. Imhoff, Phys. Rev. E **52**, R3321 (Oct. 1995).

[40] X. Godivier y F. Chapeau-Blondeau, Int. J. Bifurcation and Chaos **8**, 581 (Mar. 1998).

[41] J. J. Collins, C. C. Chow y T. T. Imhoff, Nature **376**, 236 (Jul. 1995).

[42] J. J. Collins, C. C. Chow, A. C. Capela y T. T. Imhoff, Phys. Rev. E **54**, 5575 (Nov. 1996).

[43] S. Barbay, G. Giacomelli y F. Marin, Phys. Rev. E **61**, 157 (Ene. 2000).

[44] S. Barbay, G. Giacomelli y F. Marin, Phys. Rev. Lett. **85**, 4652 (Nov. 2000).

[45] S. Barbay, G. Giacomelli y F. Marin, Phys. Rev. E **63**, 051110 (Abr. 2001).

[46] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering.* (Westview Press, 2001), firs edition edición.

[47] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, Springer Series in Synergetics (Springer, 2004), tercera edición.

[48] H. A. Kramers, Physica **7**, 284 (1940).

[49] B. McNamara y K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A **39**, 4854 (May. 1989).

[50] P. Jung y P. Hänggi, Phys. Rev. A **44**, 8032 (Dic. 1991).

[51] P. Jung, Physics Reports **234**, 175 (Nov. 1993).

[52] J. Casado-Pascual, J. Gómez-Ordóñez y M. Morillo, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **15**, 026115 (Jun. 2005).

[53] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung y F. Marchesoni, Rev. Mod. Phys. **70**, 223 (Ene. 1998).

[54] G. P. Agrawal, *Fiber-Optic Communication Systems* (John Wiley & Sons, Inc, Nueva York, EEUU, 1997), segunda edición.

[55] B. Sklar, *Digital Communications: Fundamentals and Applications* (Prentice Hall, Nueva Jersey, EEUU, 2001).

[56] R. E. Blahut, *Principles and Practice of Information Theory* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, EEUU, 1987).

[57] P. Jung, U. Behn, E. Pantazelou y F. Moss, Phys. Rev. A **46**, R1709 (Ago. 1992).

[58] M. Löcher, G. A. Johnson y E. R. Hunt, Phys. Rev. Lett. **77**, 4698 (Dic. 1996).

[59] A. R. Bulsara y G. Schmera, Phys. Rev. E **47**, 3734 (May. 1993).

[60] U. Siewert y L. Schimansky-Geier, Phys. Rev. E **58**, 2843 (Sept. 1998).

[61] M. Morillo, J. Gómez-Ordóñez y J. M. Casado-Pascual, Phys. Rev. E **52**, 316 (Jul. 1995).

[62] Y. Zhang, G. Hu, y L. Gammaitoni, Phys. Rev. E **58**, 2952 (Sept. 1998).

[63] F. Chapeau-Blondeau, Electron. Lett. **35**, 1055 (Jun. 1999).

[64] F. Chapeau-Blondeau y J. Rojas-Varela, Int. J. Bifurcation and Chaos **10**, 1951 (Ago. 2000).

[65] R. P. J. Perazzo , L. Romanelli y R. Deza, Phys. Rev. E **61**, R3287 (Abr. 2000).

[66] M. F. Carusela, J. Codnia y L. Romanelli, Physica A **330**, 415 (Dic. 2003).

[67] R. Báscones, J. García-Ojalvo y J. M. Sancho, Phys. Rev. E **65**, 061108 (Jun. 2002).

[68] R. N. Madan, editor, *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos (World Scientific Series in Nonlinear Science)* (World Scientific Publishing Company, 1993), primera edición.

[69] J. García-Ojalvo, A. M. Lacasta, F. Sagués y J. M. Sancho, Europhys. Lett. **50**, 427 (May. 2000).

[70] A. H. Gnauck, G. Raybon, S. Chandrasekhar, J. Leuthold, C. Doerr, L. Stulz, A. Agarwal, S. Banerjee, D. Grosz, S. Hunsche, A. Kung, A. Marhelyuk, D. Maywar, M. Movassaghi, X. Liu, C. Xu, X. Wei y D. Gill, Optical Fiber Communication Conference (Optical Fiber Communication Conference, 2002).

[71] P. V. Mamyshev, 24th European Conference on Optical Communication **01**, 475 (Sept. 1998).

[72] W. Rümelin, SIAM J. Numer. Anal. **19**, 604 (Jun. 1982).

[73] W.-K. Chen, *Passive and Active Filters. Theory and Implementation.* (John Wiley & Sons, Inc, Nueva York, EEUU, 1986).

[74] A. Antoniou, *Digital Filters. Analysis, Design and Applications.* (McGraw Hill, 1993).

[75] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, 2001), tercera edición.

[76] A. S. Pikovsky y J. Kurths, Phys. Rev. Lett. **78**, 775 (Feb. 1997).

[77] C. E. Korman, R. Barry y U. C. Kozat, SIAM Journal on Applied Mathematics **62**, 1794 (May.-Jun. 2000).

[78] G. E. Moore, Electronics **38**, 1 (Abr. 1965).

[79] G. E. Moore, IEEE International Electron Devices Meeting 21 **21**, 61 (Abr. 1975).

[80] S. Henzler, *Power Management of Digital Circuits in Deep Sub-Micron CMOS Technologies* (Springer Netherlands, 2007), Vol. 25, Cap. Introduction to low-power digital integrated circuits design, págs. 1–21.

[81] L. Kish, IEE Proceedings - Circuits, Devices and Systems **151**, 190 (Abr. 2004).

[82] P. Korkmaz, B. Akgul y K. Palem, Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on **55**, 2249 (Sept. 2008).

[83] K. Palem, Computers, IEEE Transactions on **54**, 1123 (Sept. 2005).

[84] R. Bahar, J. Mundy y J. Chen, en *ICCAD-2003. International Conference on Computer Aided Design* (Nov. 2003), págs. 480–486.

[85] L. B. Kish, Physics Letters A **373**, 911 (2009).

[86] A. Neiman, Phys. Rev. E **49**, 3484 (Abr. 1994).

[87] A. Neiman y L. Schimansky-Geier, Physics Letters A **197**, 379 (1995).

[88] J. A. Acebrón, A. R. Bulsara, M. E. Inchiosa y W. J. Rappel, Europhys. Lett. **56**, 354 (2001).

[89] J. A. Acebrón, W. J. Rappel y A. R. Bulsara, Phys. Rev. E **67**, 016210 (Ene. 2003).

[90] T. M. Apostol, *Calculus Volumen II* (Reverté, Barcelona, España, 2001), segunda edición.

[91] T. C. Gard, *Introduction to Stochastic Differential Equations* (Marcel Dekker, Nueva York, EEUU, 1988).