

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN Y DOCTORADO



OBSERVADORES PARA SISTEMAS NO LINEALES AUTÓNOMOS CONMUTADOS.

AUTOR: Ing. Oscar Matias Benitez

DIRECTOR: Dr. Rafael García Galiñanes

CO-DIRECTOR: Dr. Jose Luis Mancilla-Aguilar

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
DOCTOR EN INGENIERÍA

Jurado

Dr. Juan Giribet

Dr. Ricardo Sánchez Peña

Dr. Zanini Anibal

CIUDAD AUTÓNOMA DE BUENOS AIRES

Agosto 2023

Ing. Oscar Matias Benitez: OBSERVADORES PARA SISTEMAS CONMUTADOS NO LINEALES.
*Tesis presentada como requisito parcial para acceder al grado de **DOCTOR EN INGENIERÍA***
del Instituto Tecnológico de Buenos Aires.

Copyright © 2022 by Instituto Tecnológico de Buenos Aires

A mi familia

"Lo que más amo de la ciencia es que a medida que aprendes, realmente no obtienes respuestas, solo tienes mejores preguntas."

John Green

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi familia que a lo largo de todos estos años han sido y son un pilar fundamental en mi vida. A mis padres, Adelma y Oscar, y mis hermanos, Lucia y Francisco, que incondicionalmente me brindan su tiempo, su amor y su apoyo en cada una de las decisiones importantes de mi vida y me impulsan constantemente a seguir persiguiendo lo que amo hacer, a pesar de las dificultades que puedan surgir.

A mi director de tesis, el Dr. Rafael A. García, una persona fundamental a lo largo de estos años, quiero expresarle mi más profundo agradecimiento. Sin conocerme ni tener referencias sobre mi persona, confió en mí y me brindó la posibilidad de continuar con mi formación. Desde el inicio de mis actividades, me ofreció valiosas horas de su tiempo, su continuo apoyo y paciencia, siempre con comprensión y una actitud alentadora, a pesar de mis errores. Ha depositado su confianza y amistad en mí durante estos años de trabajo conjunto. Agradezco también a mi codirector, el Dr. Jose Luis Macilla-Aguilar, por su disposición para ayudarme, su actitud alentadora, sus consejos y sus comentarios enriquecedores, así como por su amistad. Tanto Rafael como Jose Luis, con su constancia, disciplina y atención al detalle, se han convertido en una inspiración para seguir en este camino. Les debo un agradecimiento especial por haberme formado a lo largo de todos estos años; me llevo un crecimiento profesional y personal muy valioso.

Agradezco a mis diferentes compañeros de trabajo, con quienes compartí almuerzos y cafés, y cuya compañía y consejos siempre fueron un sólido punto de apoyo para avanzar. En particular, quiero mencionar a mis compañeros de doctorado, con quienes hemos compartido frustraciones y alegrías relacionadas con nuestras investigaciones. El apoyo mutuo de este grupo humano fue y es un factor fundamental en el sostén cotidiano que genera un clima de trabajo excepcional

para que esta tesis llegue a buen puerto después de tantos años. A ustedes, Juan, Ezequiel, Jose y Lucio, gracias por las horas de catarsis, por su tiempo y, sobre todas las cosas, por su amistad.

En lo que a lo institucional se refiere, quiero extender mi reconocimiento y profundo agradecimiento al ITBA y al Departamento de Investigación y Doctorado por abrirme las puertas de esta institución, otorgarme un lugar de trabajo y brindarme la enorme oportunidad de realizar esta investigación que me ha permitido seguir formándome.

A mis amigos de la vida, ellos todos. Especialmente a Federico, Estefania, Florencia, Juan, Luciano, Mailen y Nahuel, siempre presentes.

Finalmente, un agradecimiento especial a aquellos que, sin saberlo, me han formado en más de un sentido. Gracias a ustedes.

"La paciencia es amarga, pero su fruto es dulce."

Aristóteles

Resumen

Un sistema dinámico híbrido se compone de una familia de sistemas de tiempo continuo (generalmente descritos por ecuaciones diferenciales o inclusiones diferenciales) que conmutan entre ellos según una regla discreta o lógica. Esta clase de sistemas permite modelar las interacciones continuas y discretas que aparecen en sistemas complejos.

En particular, un sistema conmutado es una clase de sistema híbrido cuya regla de conmutación viene descrita por una señal de conmutación y no a través de un sistema de eventos discretos. Por lo tanto, un sistema conmutado consta de un número finito de subsistemas dinámicos de tiempo continuo y una regla de conmutación (generalmente dependiente del tiempo o del estado), llamada señal de conmutación, que determina las transiciones entre los subsistemas. El problema de estimación asociado a esta clase de sistemas presenta un desafío interesante debido a la interacción entre la dinámica discreta y continua. En relación con esta problemática, uno de los problemas más exigentes es el de estimar simultáneamente los tiempos de conmutación, el estado continuo y qué subsistema (modo) gobierna la evolución del estado continuo.

En este sentido, el propósito principal de esta tesis consiste en abordar el estudio y desarrollar un esquema de estimación para este tipo de sistemas, cuando los subsistemas están modelados por campos no lineales, las conmutaciones son desconocidas y solo se tiene acceso a la función/mapa de salida del sistema conmutado.

La detección y estimación de los tiempos de conmutación se desarrolla a partir del procesamiento del mapa de salida y consta de dos etapas. En la primera, se diseña un esquema de ventana de tiempo móvil para detectar saltos en la primera derivada del mapa de salida. La detección de saltos se basa en la aproximación de la segunda derivada (generalizada) de la salida del sistema mediante una convolución adecuada. Para sistemas donde el mapa de salida y los campos vectoriales presentan puntos de no diferenciabilidad, se introducen algunas modificaciones debido a

que un salto en la derivada de salida no necesariamente significa una conmutación, debido a la falta de regularidad en el mapa de salida. Por lo tanto, en la segunda etapa, se proporciona un criterio de validación de conmutación para ignorar esas detecciones de saltos que no se deben a la conmutación.

Para aquellos sistemas conmutados tales que los subsistemas admiten observadores con un error de decaimiento del tipo exponencial, se desarrolla un algoritmo basado en el uso de un conjunto de observadores (uno para cada modo) y un conjunto de subsistemas (para cada paso del proceso de estimación, se selecciona un subconjunto adecuado de los subsistemas del sistema conmutado) para la estimación de los estados y el modo del sistema conmutado.

Con el fin de no tener que introducir suposiciones fuertes sobre la estructura matemática del sistema conmutado y abordar los sistemas conmutados con salida Lipschitz continuas, se introducen los descartadores como objetos dinámicos que evalúan posibles trayectorias en simultáneo, lo que permite el desarrollo de una estrategia de estimación de modo basada en un banco de descartadores e independiente de la estimación de estados, la cual se implementa a partir de un banco de observadores compuesto por observadores que utilizan estos descartadores como unidad básica de funcionamiento. A su vez, se presenta un algoritmo que articula las tres tareas en la estimación para estos sistemas: detección de conmutación, estimación de modo y estimación de estados. También está diseñado para abordar la pérdida de detección de conmutación mencionada anteriormente.

Finalmente, dado que la estimación y detección de una conmutación y la reconstrucción de la señal de conmutación (estimación de modo) no dependen del proceso de estimación del estado, cualquier observador para sistemas continuos Lipschitz es válido, siempre y cuando la tasa de decaimiento del error de estimación pueda seleccionarse adecuadamente. En consecuencia, también se presentan las variaciones del algoritmo que permiten el uso de dichos observadores.

Abstract

A hybrid dynamical system consists of a family of continuous-time systems (typically described by differential equations or differential inclusions) that switch between each other according to a discrete or logical rule. This type of system enables the modeling of the continuous and discrete interactions that arise in complex systems.

In particular, a switched system is a subtype of a hybrid system where the transitions are governed by a switching signal, not by a discrete event system. As a result, a switched system consists of a finite number of continuous-time dynamical subsystems and a switching rule (usually dependent on time or state), referred to as the switching signal, that determines transitions between subsystems. The estimation problem associated with this class of systems presents an interesting challenge due to the interaction between discrete and continuous dynamics. One of the most demanding issues in this context is simultaneously estimating the switching times, the continuous state, and which subsystem (mode) governs the evolution of the continuous state.

The main purpose of this thesis is to address the study and develop an estimation scheme for this class of systems, particularly when the subsystems are modeled by nonlinear fields, the switches are unknown, and only the output function/map of the switched system is accessible.

The detection and estimation of the switching times are developed based on the processing of the output map and involve two stages. Firstly, a mobile time window scheme is designed to detect jumps in the first derivative of the output map. However, for systems where the output map and vector fields exhibit points of non-differentiability, some modifications are introduced, as a jump in the output derivative does not necessarily signify a switch due to the lack of smoothness in the output map. Thus, in the second stage, a switch validation criterion is provided to discard these jump detections that are not caused by switching.

For switched systems where the subsystems allow observers with an exponential decay error,

an algorithm is developed using a set of observers (one for each mode) and a set of subsystems (for each estimation step, a suitable subset of the switched system's subsystems is selected) to estimate the states and mode of the switched system.

To avoid making strong assumptions about the mathematical structure of the system and to address continuously Lipschitz switched systems, the use of "descartadores" (dynamic objects that evaluate possible trajectories simultaneously) allows for the development of a mode estimation strategy based on a bank of "descartadores" and state estimation using a bank of observers that use these "descartadores" as a basic functioning unit. In turn, an algorithm is presented that integrates all three tasks in the estimation process for these systems: switch detection, mode estimation, and state estimation. It is also designed to handle the aforementioned switch detection loss.

Finally, given that the estimation and detection of a switch and the reconstruction of the switching signal (mode estimation) do not depend on the state estimation process, any observer for Lipschitz continuous systems is valid, provided that the decay rate of the estimation error can be appropriately selected. Consequently, variations of the algorithm are presented to allow for the use of such observers.

Índice

Índice de figuras	XIII
Índice de tablas	XVII
Notación	XIX
1 Introducción general	1
1.1 Estructura de la tesis	3
1.2 Principales aportes y divulgación de los resultados	4
2 Definiciones básicas y planteo del problema	7
2.1 Clases de sistemas conmutados	7
2.1.1 Conmutación estado-dependiente	8
2.2 Conmutación autónoma versus controlada	10
2.3 Modelo matemático	10
2.4 Planteo del problema	13
3 Detección y estimación de las conmutaciones.	15
3.1 Sistemas de una salida.	18
3.1.1 Funciones Generalizadas.	20
3.1.2 Estrategia de detección de una conmutación.	22
3.2 Implementación.	22
3.3 Detección de una conmutación para sistemas de múltiples salidas.	26
3.4 Ejemplo.	27
3.5 Extensión para sistemas con salidas del tipo Lipschitz continuas	30
3.5.1 Sistema de una salida.	31
3.5.2 Detección de una conmutación para sistema de múltiples salidas.	34
3.6 Ejemplo: Sistema conmutado con salida Lipschitz continua.	35

3.6.1	Ejemplo 1.	37
3.6.2	Ejemplo 2 - Tratamiento de una falsa conmutación.	38
4	Estimación de modo y estados. Observadores con decaimiento exponencial	41
4.1	Banco de observadores y subsistemas.	43
4.1.1	Banco de observadores	43
4.1.2	Banco de subsistemas y estimación de estados y modos.	47
4.2	Algoritmo de estimación de estados y modos.	48
4.2.1	Diagramas esquemáticos	50
4.3	Ejemplo	54
5	Estimación de modo y estados para sistemas Lipschitz continuos	63
5.1	Estimación de modo	66
5.1.1	Banco de descartadores	67
5.2	Estrategia de estimación de estados	69
5.2.1	El q -observador	70
5.3	Algoritmo de estimación de estados y modo	71
5.3.1	Variación del algoritmo para subsanar la no detección de una conmutación	75
5.3.2	Variación del algoritmo para un observador arbitrario	76
5.4	Ejemplos	78
5.4.1	Ejemplo 1	80
5.4.2	Ejemplo 2.	90
5.4.3	Ejemplo 3 - No detección de una conmutación	94
5.4.4	Ejemplo 4 - Observador arbitrario	97
6	Conclusiones y trabajos a futuro	105
A	Lema para la estimación de estados	109
B	Descartadores	113
	Bibliografía	123

Índice de figuras

3.1	Esquema de detección asociado a la implementación de la detección de una conmutación.	24
3.2	Detección de una conmutación. Señal $ w_m(t) $ para el mismo instante de conmutación con diversos valores de m asociados al sistema (3.17) con señal de conmutación σ_0	29
3.3	Detección de una conmutación. Señal $ w_m(t) $ para diferentes instantes de conmutación asociadas al sistema (3.26)-(3.27) con señal de conmutación σ_1	38
3.4	Ventana de tiempo asociada al el esquema de validación de un salto en t_{i^*} cuando se detecta una falsa conmutación para el sistema (3.26)-(3.27) con señal de conmutación σ_2	40
4.1	Diagrama esquemático de como opera el algoritmo para estimar los estados y determinar el modo a instante inicial ($t = 0$).	52
4.2	Diagrama esquemático de como opera el algoritmo para estimar los estados y determinar el modo cuando se detecta una conmutación.	53
4.3	Señal de conmutación estimada $\hat{\sigma}_0(t)$ y detalle del proceso de estimación a estado inicial $t = 0$ s.	58
4.4	Detalle del proceso de estimación de σ_0 para diversos instantes de \hat{t}_s	59
4.5	Evolución temporal de x_1 y \hat{x}_1 asociados al sistema (3.17) con señal de conmutación σ_0	60
4.6	Norma del error de estimación para el estado x_1	61
4.7	Evolución temporal de x_3 y \hat{x}_3 asociados al sistema (3.17) con señal de conmutación σ_0	61
4.8	Norma del error de estimación para el estado x_3	62
5.1	Principio básico de funcionamiento del banco de descartadores para la estimación de modo.	68

5.2	Diagrama esquemático de como opera el algoritmo estimación de estados y determinación de modo para sistemas con salida Lipschitz continua a instante inicial.	74
5.3	Diagrama esquemático de como opera el algoritmo estimación de estados y determinación de modo para sistemas con salida Lipschitz continua cuando se detecta una conmutación.	75
5.4	Señal de conmutación estimada $\hat{\sigma}_1(t)$	82
5.5	Detalle del esquema de detección de modo para $\sigma_1(t)$ a instante inicial, $t_s = 0$.	83
5.6	Detalle del esquema de detección de modo para $\sigma_1(t)$ a instante $t_s = 1,2608$	83
5.7	Detalle del esquema de detección de modo para $\sigma_1(t)$ a instante $t_s = 3,5225s$.	84
5.8	Evolución temporal de x_1 y \hat{x}_1 asociados al sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_1	85
5.9	Norma del error de estimación para el estado x_1	85
5.10	Evolución temporal de x_2 y \hat{x}_2 asociados al sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_1	86

5.11	Norma del error de estimación para el estado x_2 .	86
5.12	Norma del error de estimación de estados asociados al sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_1 .	87
5.13	Evolución temporal de la salida de los q -observadores y sus estimaciones para el sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_1 .	88
5.14	Evolución temporal de los conjuntos <i>búsqueda de los q-secuenciadores</i> para el sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_1 .	89
5.15	Señal de conmutación estimada $\sigma_2(t)$ y detalle del proceso de estimación a estado inicial $t = 0$ s.	91
5.16	Detalle del proceso de estimación de modo para $\sigma_2(t)$ para diversos instantes de \hat{t}_s .	92
5.17	Evolución temporal de los estados y sus estimaciones asociados al sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_2 .	92
5.18	Norma del error de estimación de estados asociados al sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_2 .	93
5.19	Ventana de tiempo para el esquema de validación de salto en t_s en una pérdida de detección de conmutación para el sistema (3.26) - (3.27) con la señal de conmutación $\sigma_2(t)$ y condición inicial \bar{x}_0 .	95
5.20	Reducción del conjunto de búsqueda y reconstrucción de la señal de conmutación bajo la pérdida de detectabilidad de una conmutación.	95
5.21	Reconstrucción de la señal de conmutación $\sigma_2(t)$ completa frente a la pérdida de una conmutación.	96
5.22	Estados y sus estimaciones.	96
5.23	Norma del error de estimación.	97
5.24	Señal de conmutación estimada $\hat{\sigma}_2(t)$, para el esquema de un observador arbitrario.	99
5.25	Detalle del esquema de detección de modo para $\sigma_2(t)$ a $t_s = 0$ para el esquema de un observador arbitrario.	99
5.26	Detalle del esquema de detección de modo para $\sigma_2(t)$ a $t_s = 1,2608$ para el esquema de un observador arbitrario.	100
5.27	Evolución temporal de $e_y(t)$ en un entorno de $t_s = 4,0017$ s para el análisis de la pérdida de una conmutación para el esquema de un observador arbitrario.	101

5.28	Detalle del esquema de detección de modo para $\sigma_2(t)$ bajo la pérdida de detección a $t_s = 4,0017 s$ para el esquema de un observador arbitrario.	101
5.29	Resultados del proceso de estimación asociados al estado x_1 para el esquema de un observador arbitrario.	102
5.30	Resultados del proceso de estimación asociados al estado x_2 para el esquema de un observador arbitrario.	103
5.31	Evolución temporal de cada uno de los observadores presentes en el banco de observadores en el proceso de estimación para el esquema de un observador arbitrario.	104
A.1	Diagrama esquemático de la evolución de las trayectorias del sistema conmutado (2.2), banco de observadores (4.1) y el banco de subsistemas (4.10).	110
B.1	Diagrama esquemático del principio básico asociado a la reducción del conjunto de búsqueda	114

Índice de tablas

3.1	Constantes del sistema (3.17).	28
3.2	Dinámica de la señal de conmutación, $\sigma_0(t)$, para el sistema (3.17).	28
3.3	Resumen de los resultados de la simulación para el esquema de ventanas móviles para el sistema (3.17) con la señal de conmutación σ_0	30
3.4	Detectabilidad de una conmutación asociada al sistema (3.26) - (3.27).	36
3.5	Dinámica de la señal de conmutación, $\sigma_1(t)$	37
3.6	Resumen de los resultados de la simulación para el esquema de ventanas móviles para el sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_1	38
3.7	Dinámica de la señal de conmutación $\sigma_2(t)$	39
4.1	Resumen de los resultados de la simulación para el esquema completo de observación para el sistema (3.17) con la señal de conmutación σ_0	59
5.1	Detalle de las constantes dinámicas asociadas al sistema (3.26) - (3.27) discriminadas por modo.	81
5.2	Resumen de los resultados adicionales de la simulación, para sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_1	90
5.3	Evolución de γ_i y ϵ_i asociados a los q -observadores para sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_1	90
5.4	Resumen de los resultados adicionales de la simulación, para el sistema (3.26) - (3.27) con la señal de conmutación $\sigma_2(t)$	93
5.5	Resumen de los resultados adicionales de la simulación, para el sistema (3.26) - (3.27), con la señal de conmutación $\sigma_2(t)$ y condición inicial \bar{x}_0	97

Notación

Símbolo	Descripción
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Conjunto de los números reales mayores o iguales a cero.
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales.
\mathbb{N}_0	Conjunto de los números enteros mayores o iguales a cero.
\mathbb{Z}	Conjunto de los números enteros.
\mathbb{R}^n	Conjunto de los vectores reales n -dimensionales.
$\mathbb{R}^{r \times s}$	Conjunto de las matrices reales de r filas y s columnas.
$\ x\ $	Norma euclidiana de x , con $x \in \mathbb{R}^s$.
x_i	i -ésima coordenada de x con $x \in \mathbb{R}^s$.
$x_{i;j}$	i -ésima coordenada de x correspondiente al modo j con $x \in \mathbb{R}^s$.
$\text{cmp}(A)$	La clase de todos los subconjuntos compactos de A .
$[A]^k$	Secuencia de longitud k de subconjuntos del conjunto A .
$\#A$	Cardinal del conjunto A .
$\text{diam}(A)$	Dado $A \subset \mathbb{R}^s$ su diámetro $\text{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} \ x - y\ $.
$\text{clos}(A)$	Clausura del conjunto A .

Símbolo	Descripción
$\text{mes}(A)$	La medida de Lebesgue del conjunto A .
$\mathcal{C}^k(A)$	Espacio de funciones de clase \mathcal{C}^k sobre el conjunto A .
$f^{(n)}(t)$	Derivada n -ésima en sentido clásico con $f(t) \in \mathcal{C}^{n-1}$.
$\partial^{(n)}f$	Derivada n -ésima generalizada de la función f .
$\delta(t)$	Función Delta de Dirac.
$\delta^{(n)}(t)$	Derivada n -ésima generalizada de la función $\delta(t)$.
$L_{\eta}^k \omega$	Derivada de Lie de orden k de ω con respecto a η con $k \in \mathbb{N}_0$, donde η campo vectorial y $\omega : K \rightarrow \mathbb{R}$ con $K \subset \mathbb{R}^n$, función a valores reales.
$\bar{\sigma}(A), \underline{\sigma}(A)$	Máximo y mínimo valor singular de la matriz $A \in \mathbb{R}^{r \times s}$ respectivamente.
∇f	Gradiente del campo escalar $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.
$J_F(x)$	Matriz Jacobiana asociada al campo vectorial $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.
$\ A\ $	Norma asociada a la matriz $A \in \mathbb{R}^{r \times s}$, donde $\ A\ = \bar{\sigma}(A)$.

Capítulo 1

Introducción general

Dentro de la Teoría de Sistemas de Control se utilizan modelos matemáticos para describir la evolución temporal de sistemas dinámicos reales. Según la problemática a abordar o el comportamiento que se desee relevar, existen diversos tipos de modelos matemáticos que permiten describir los sistemas dinámicos en estudio. En este trabajo se hace foco en aquellos que están representados por variables de estado. Para un instante de tiempo dado, la variable de estado contiene toda la información que se necesita saber sobre dicho sistema para establecer como evolucionara en el instante posterior a este. Por este motivo, conocer el valor de dicho estado es de suma importancia para diversas aplicaciones en el campo de control.

Tanto para modelos en tiempo discreto como continuo, en la práctica suele ocurrir que no se cuenta con el conocimiento completo de las variables de estado, ya que no siempre es posible tener acceso a todas esas variables. A su vez, los sensores, encargados de proporcionar mediciones sobre las variables de estado, por razones tecnológicas, de costos, etc., proporcionan valores que no coinciden de forma exacta con las variables medidas.

El problema de estimación consiste en reconstruir las variables de estado a partir de la información parcial suministrada por los sensores y resulta de gran importancia en la práctica. Por este motivo, el problema de estimación ha sido estudiado por diversos investigadores durante varias décadas, desarrollando los conceptos de observabilidad y observador. La observabilidad es una condición necesaria (y, según el marco de trabajo, suficiente) que debe cumplir el sistema para implementar un observador, que es otro sistema dinámico o algoritmo encargado de resolver el problema de estimación.

En la última década han cobrado relevancia los sistemas dinámicos híbridos. Estos sistemas están compuestos por una familia de sistemas en tiempo continuo, (mayormente descritos por ecuaciones o inclusiones diferenciales) que conmutan entre sí de acuerdo a una regla discreta,

a menudo modelada por un sistema de eventos discretos. Esta clase de sistemas modelan en simultáneo interacciones continuas y discretas que aparecen en sistemas complejos como ser sistemas químicos, mecánicos, de electrónica de potencia, sistemas de control y redes biológicas.

Los sistemas conmutados forman una categoría dentro de los sistemas híbridos, para los cuales la conmutación entre sistemas se lleva a cabo por medio de una *señal de conmutación* y no a través de un sistema de eventos discretos. En concreto, un sistema conmutado consiste en un número finito de subsistemas que evolucionan en tiempo continuo y una regla o ley de conmutación (usualmente dependiente del tiempo o de los estados), que se denomina *señal de conmutación*, que es la que dictamina o gobierna las conmutaciones entre subsistemas. Debido a la riqueza del comportamiento de las trayectorias que generan los sistemas conmutados, la mayoría de los esfuerzos se han enfocado en los problemas de estabilización y control (ver [10], [28],[29], [30], [36] y las referencias en ellos).

El problema de estimación para los sistemas conmutados presenta un desafío interesante, dada la interacción entre las dinámicas discreta y continua presentes en este tipo de sistemas. El problema de diseñar observadores para sistemas conmutados se reconoce como un tema importante de investigación (ver [1] y [33] entre otros). En relación con esta temática, el problema resulta mucho más exigente cuando lo que se busca es estimar en simultáneo los tiempos en que ocurre una conmutación, las variables de estado (estados continuos) y qué subsistema (modo) se encuentra activo.

Con respecto al problema clásico de observación: estimar los estados continuos a partir de información parcial del sistema, en el caso de los sistemas lineales conmutados, es decir, aquellos sistemas conmutados cuyos subsistemas son lineales, existen diferentes estrategias. En [1], [33], [39] y [44] se estiman los estados continuos suponiendo que cada subsistema es observable y admite un observador, y la existencia de una función de Lyapunov común que garantiza la convergencia del error entre los estados reales y estimados. En cuanto a la estima de los tiempos de conmutación, los trabajos [40] y [25] desarrollan un marco de trabajo con base en la teoría de distribuciones para establecer una relación algebraica que permite estimar el tiempo de conmutación; para esto los subsistemas deben verificar una relación geométrica. En [42] se desarrolla el concepto de *observabilidad conjunta* para sistemas lineales conmutados, el cual permite distinguir entre modos de un sistema conmutado en base al estudio de la geometría del espacio de observabilidad por medio de una condición de rango. En [34] utilizando el concepto de observabilidad conjunta y en conjunto con la técnica de modos deslizantes de orden superior (HOSM), se presenta un algoritmo que permite estimar el modo y los estados continuos en simultáneo.

En el caso de los sistemas no lineales conmutados, algunos autores han abordado la problemática de estimación. En [38] se desarrolla un observador por modos deslizantes, que mediante el filtrado de la señal discontinua que genera este tipo de técnica una vez que el observador converge, permite establecer un criterio para determinar el modo y aproximar el tiempo de conmutación. En [35] bajo una condición geométrica (bastante restrictiva) que garantiza la distinguibilidad entre modos y con la condición de que cada subsistema admite un observador por modos deslizantes de orden superior, filtrando la acción discontinua una vez que convergen los observadores, se reconstruye el modo y se establecen los estados continuos.

El objetivo central de esta tesis consiste en dar un marco de trabajo que permita desarrollar conceptos de observabilidad y de detección de conmutación con el objeto de diseñar una estrategia o algoritmo que dé solución al problema de estimación para los sistemas no lineales autónomos conmutados. Los estudios aquí desarrollados parten de la idea fundamental de poder lograr una estrategia de observación lo más flexible/genérica posible, de forma tal que la misma no dependa de las características estructurales del sistema desde el punto de vista dinámico. Teniendo en cuenta esto último, en el desarrollo de este trabajo progresivamente se abordan diversas estrategias que permiten relajar estas dependencias y abordar sistemas más generales.

1.1. Estructura de la tesis

Esta tesis se estructura como se describe a continuación.

En el capítulo 2 se presenta el marco de trabajo general introduciendo formalmente los sistemas no lineales autónomos conmutados. Se plantea seguidamente el problema de estimación asociado a estos sistemas, junto con los objetivos generales y específicos planteados en el desarrollo de esta tesis.

En el capítulo 3, se aborda la problemática de la detección y estimación de una conmutación. Para ello se introduce el marco teórico adecuado que permite describir como una conmutación impacta sobre la salida del sistema y el algoritmo que en base al procesamiento de la misma, sin la necesidad de conocer los estados o el modo activo del sistema, permite detectar una conmutación y estimar el instante en que ocurrió. Variantes del mismo son presentadas con el fin de extender su aplicación a sistemas de múltiples salidas y sistemas con salidas Lipschitz continuas.

Bajo la suposición de que cada subsistema que compone el sistema conmutado admite un observador con decaimiento del tipo exponencial, en el capítulo 4 se presentan los bancos de observadores y subsistemas como objetos dinámicos fundamentales para el desarrollo de un algo-

ritmo que permite estimar el modo activo y una estimación del vector de estados del sistema. La configuración de la dinámica de los observadores del banco de observadores juega un papel fundamental en el algoritmo que articula la interacción entre el banco de observadores y subsistemas para lograr las estimaciones correspondientes. Este algoritmo en conjunto con lo desarrollado para detectar y estimar el instante de conmutación, permiten dar solución al problema de observación para esta clase de sistemas conmutados.

En base al trabajo desarrollado en [20], donde se introducen por primera vez los *descartadores*, en el capítulo 5 a partir de la implementación de un banco de descartadores se logra determinar el modo activo del sistema conmutado independientemente del tipo del banco de observadores implementado, a su vez estos descartadores permiten formular un observador para sistemas no lineales con salida Lipschitz continua. El desarrollo de un algoritmo que articula la tarea de detección y estimación de una conmutación, el modo activo del sistema por medio de un banco de descartadores y la estimación de las variables de estados en base al banco de observadores compuesto por los observadores aquí propuestos, permite abordar y dar solución al problema de observación asociado a los sistemas no lineales conmutados con salida Lipschitz continua. Seguidamente se presenta una variación de la estrategia de observación que aborda un problema relacionado con la pérdida de detección de una conmutación debido a la salida del tipo Lipschitz continua, para finalmente presentar un algoritmo que permite generalizar la estrategia de observación.

En el capítulo 6 se dan las conclusiones finales de esta tesis y se discuten los alcances, limitaciones y posibles mejoras de lo desarrollado.

En todos los casos se presentan ejemplos numéricos con sus respectivas simulaciones que implementan y validan los algoritmos y estrategias propuestos.

1.2. Principales aportes y divulgación de los resultados

Si bien el problema de observación sobre sistemas conmutados ha sido abordado por diversos autores la mayoría de los trabajos se enfocan en aquellos que involucran sistemas lineales. Los trabajos que abordan la problemática de observación sobre los sistemas no lineales conmutados, en general, asumen que se tiene acceso a la señal de conmutación o a los instantes de conmutación, y aquellos que plantean el problema en su forma más general, requieren de suposiciones fuertes sobre la dinámica del sistema para llevar a cabo la tarea de observación.

Esta tesis propone un esquema de estimación para sistemas no lineales conmutados, en el caso

en que la señal de conmutación es desconocida. Las suposiciones en este trabajo incluyen: contar con la medición de la señal de salida, un tiempo de permanencia (dwell-time) bien definido y conocido en la señal de conmutación y si bien en una primera instancia son necesarias algunas suposiciones relativamente fuertes sobre los sistemas que conforman el sistema conmutado, finalmente se logra una generalización que solo exige el cumplimiento de hipótesis relativamente suaves sobre los subsistemas del sistema conmutado. De esta manera, se resuelven algunas de las limitaciones de los diferentes abordajes sobre esta problemática mencionados anteriormente

Las principales contribuciones de esta tesis se resumen a continuación:

- Se presenta un esquema de observación para la estimación de los tiempos de conmutación, los modos y los estados continuos para sistemas no lineales conmutados a partir de la medición de la salida. Se asume que la señal de conmutación es dependiente del tiempo y tiene un tiempo de permanencia (dwell-time) bien definido, y que cada subsistema del sistema conmutado cumple una condición de observabilidad adecuada.
- Se desarrolla un método de detección de conmutación. Se diseña un esquema de ventana de tiempo móvil para detectar cambios en la primera derivada del mapa de salida. La detección de una conmutación se basa en la aproximación derivada (generalizada) de segundo orden de la salida del sistema por medio de una convolución adecuada. Para aquellos sistemas que con salida Lipschitz continua se introduce una modificación en este esquema que lidia con la falta de diferenciabilidad del mapa de salida y de los campos vectoriales del sistema conmutado. Un salto en la derivada de la salida no implica una conmutación, ya que puede deberse a la falta de diferenciabilidad del mapa de salida. Por lo tanto, bajo esta característica se proporciona un criterio de validación de una conmutación.
- Para aquellos sistemas conmutados cuyos subsistemas admiten un observador donde la norma del error de salida decae en forma exponencial y es conocida, se desarrolla un esquema basado en el uso de un banco de observadores (uno para cada modo) y un banco de subsistemas (para cada paso del proceso de estimación, se utiliza un subconjunto adecuado de los subsistemas del sistema conmutado) para estimar los modos y los estados continuos en simultáneo.
- En busca de una generalización, se implementa una estrategia de detección de modos basada en un banco de descartadores, para la cual se demuestra que la detección de modos puede realizarse asignando un descartador a cada modo del sistema. Este detector de modos está

diseñado para lidiar con la pérdida de una conmutación, la cual puede ocurrir debido a la falta de diferenciabilidad en el mapa de salida para aquellos sistemas con salidas Lipschitz continua.

- Se recurre a una modificación del observador presentado en [20] para estimar las variables estado de los sistemas con salida Lipschitz continua. Aunque este tipo de observador es adecuado para las restricciones impuestas por el modelo matemático del sistema, en particular la falta de diferenciabilidad en el mapa de salida, este observador proporciona una estimación de la región en donde se encuentran los estados del sistema. En este trabajo, en cambio, se modifica este observador para obtener estimaciones de las variables de estado del sistema.
- Se presenta un algoritmo que realiza las tres tareas en la estimación para aquellos sistemas no lineales conmutados con salida Lipschitz continuos: detección de conmutación, estimación de modos y estimación de las variables de estado. El mismo está diseñado para lidiar con la pérdida de detección de conmutación mencionada anteriormente.
- Dado que la reconstrucción de la señal de conmutación no depende del proceso de estimación de las variables de estados, se presentan las variaciones del algoritmo que permiten el uso de cualquier observador para sistemas continuos Lipschitz, siempre y cuando se pueda seleccionar adecuadamente la tasa de decaimiento del error de estimación.

Parte de los conceptos y resultados que se desarrollan en esta tesis forman parte de las siguientes publicaciones:

- Benitez, O. M. and García, R. A. (2018). An observer for nonlinear switched system. In *2018 Argentine Conference on Automatic Control (AADECA)*, pages 1–6
- Benitez, O. M. and García, R. A. (2022). A state estimation strategy for a nonlinear switched system with unknown switching signals. *International Journal of Control*, 95(7):1747–1758
- Benitez, O. M. and García, R. A. (2023). State estimation of lipschitz continuous switched systems with unknown switching signals. *International Journal of Control*, 96(9):2240–2259

Capítulo 2

Definiciones básicas y planteo del problema

En este capítulo se introducen formalmente los sistemas no lineales conmutados, junto a los conceptos básicos que se utilizarán a lo largo del desarrollo de este trabajo. Muchos de ellos surgen como una extensión de los conceptos de la teoría clásica para sistemas no lineales. En particular, se presenta un modelo matemático que describe el comportamiento de los sistemas no lineales autónomos conmutados, que a su vez permite plantear de forma específica el problema de estimación y observación que se aborda a lo largo de la tesis.

2.1. Clases de sistemas conmutados

A lo largo de la historia, dentro del estudio de los sistemas dinámicos y la teoría de control se ha abordado el estudio de los sistemas en tiempo continuo y discreto por separado. Sin embargo, una combinación de ambos se encuentra frecuentemente en el mundo real. Cuando un modelo matemático describe la interacción entre sistemas, uno cuya dinámica está descrita por variables que evolucionan en el tiempo de forma continua junto a otros que lo hacen en tiempo discreto, se tiene lo que en la literatura se conoce como sistema *sistema híbrido*. Las variables de estado de un sistema híbrido, representadas por z , están descritas por una parte continua que evoluciona temporalmente en un conjunto C de acuerdo a una inclusión diferencial $\dot{z} \in F(z)$ o una ecuación diferencial $\dot{z} = f(z)$, mientras que la dinámica discreta evoluciona en un conjunto D de acuerdo a una inclusión en diferencias $z^+ \in G(z)$ o una ecuación en diferencias $z^+ = g(z)$. La notación \dot{z} representa la evolución continua de los estados con respecto a la variable t , mientras que z^+ representa el valor de los estados luego de un cambio instantáneo. F (o f) da cuenta de cómo evoluciona el espacio de estados en forma continua y C el conjunto donde se permite esta dinámica. De la misma manera, G (o g) describe el valor consecutivo inmediato que toma el estado (evolución dinámica discreta) cuando el sistema experimenta un salto, el cual está descrito

por el conjunto D .

En esta tesis se trabaja con modelos de dimensión finita, por lo que los estados del sistema híbrido evolucionan en un subconjunto n -dimensional del espacio Euclidiano \mathbb{R}^n .

Este tipo de modelado permite describir y estudiar diversos sistemas de la ingeniería en su totalidad, ya que incorpora de forma explícita la interacción entre la dinámica discreta y la continua. Los sistemas conmutados pueden entenderse como un caso particular de los sistemas híbridos, donde el vector de estados del sistema híbrido admite una descomposición explícita en variables que evolucionan de forma continua y otra de forma discreta. El estado discreto toma valores en un conjunto discreto, por lo general finito, y representa un *modo* en el cual el sistema híbrido, o parte del sistema, está operando. Debido a esta característica, el estado discreto, solo puede tomar un nuevo valor cuando el sistema experimenta un salto (conmutación). Por lo que un sistema conmutado puede entenderse como una máquina de estados finita denotada por una variable q que representa el *modo* de operación del sistema.

Las transiciones entre los diferentes estados que puede tomar q pueden deberse a diversas razones, lo que permite clasificar a los sistemas conmutados en dos grupos según los eventos de transición

1. *Estado-dependientes versus tiempo-dependiente.*
2. *Autónomos (no controlados) versus controlados.*

La clasificación de este comportamiento, no invalida una combinación de estos dos comportamientos en un mismo sistema.

2.1.1. Conmutación estado-dependiente

Supongamos que al espacio de estado continuo (un subespacio $C \subset \mathbb{R}^n$) se lo particiona en un número finito de *regiones de operación* mediante el uso de una familia de *superficies de conmutación* que conforma el conjunto D . En cada una de estas regiones un subsistema continuo, controlado o no, es el que gobierna la dinámica continua. Cada vez que una trayectoria alcanza una de estas superficies de conmutación, el estado discreto cambia de modo y los estados continuos "saltan" a un nuevo valor, ambos impuestos por la dinámica G . La dinámica de G que modifica los estados continuos se la denomina *mapa de reposicionamiento*. Cuando existen saltos instantáneos impuestos por el mapa de reposicionamiento en la dinámica continua, se habla de un *efecto impulsivo*. Un caso particular es aquel en el que tales efectos impulsivos están ausentes, estos es, el mapa de reposicionamiento es la identidad. Esto significa que la trayectoria es continua en

todas partes, aunque por lo general pierde la diferenciabilidad cuando atraviesa una superficie de conmutación. En lo que sigue solo se aborda la construcción de observadores para sistemas sin efectos impulsivos.

Un inconveniente clásico de este tipo de modelado es que habilita la posibilidad de que se produzcan conmutaciones infinitas sobre las regiones de conmutación. Por ende reglas de conmutación más sofisticadas surgen: las regiones de operación del sistema podrían superponerse y una superficie de conmutación dada podría ser solo reconocida si el sistema se encuentra en un modo determinado. Conmutaciones con histéresis dan lugar a este tipo de comportamiento.

2.1.2. Conmutación tiempo-dependiente

Se dice que un sistema es de *conmutación tipo tiempo-dependiente*, cuando las transiciones del estado discreto se suceden bajo una regla que es exclusivamente dependiente del tiempo. Esta regla es la que determina que sistema gobierna la dinámica continua del sistema conmutado para cada instante de tiempo. En particular es posible modelizar la dinámica de estos sistemas conmutados en términos de la familia de los campos vectoriales que describen la dinámica de los sistemas que intervienen. Esta modelización es la que se toma como base para el desarrollo de este trabajo.

Sea una familia de campos vectoriales en \mathbb{R}^n de la forma $\{f_i : i \in \mathcal{Q}\}$, donde $\mathcal{Q} = \{1, \dots, N\}$ es un conjunto de índices. Junto con la definición de la señal de conmutación es posible establecer un sistema dinámico conmutado a partir de la familia de sistemas

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)) \quad i \in \mathcal{Q} \quad (2.1)$$

Las funciones f_i se suponen lo suficientemente regulares, al menos localmente Lipschitz continuas.

Definición 2.1. Una *señal de conmutación* es una función $\sigma : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathcal{Q}$ constante a tramos que tiene una cantidad finita de discontinuidades que se denominan *instantes o eventos de conmutación* para cada intervalo acotado de tiempo. La señal permanece constante entre dos instantes de conmutación.

El rol que juega la señal de conmutación es el determinar en cada instante de tiempo t un único índice $\sigma(t) \in \mathcal{Q}$ que especifica qué sistema de la familia de campos vectoriales (2.1) está activo e imponiendo la dinámica de los estados continuos en ese instante.

2.1.3. Conmutación autónoma versus controlada

Por conmutación autónoma entendemos a la de aquellos sistemas adonde no hay control sobre el mecanismo que dispara los eventos de conmutación del estado discreto. Esta categoría incluye, por ejemplo, a los sistemas estado-dependientes cuyas superficies de conmutación están predeterminadas.

Por el contrario, en muchas situaciones la conmutación es impuesta en la etapa de diseño con un determinado objetivo. En este caso se tiene control directo sobre el mecanismo de conmutación (que puede ser estado-dependiente o tiempo-dependiente). A estos casos los denominamos de *conmutación controlada*.

Desde un punto de vista más general la idea de clasificar los sistemas conmutados en estado-dependiente o tiempo-dependiente se vuelve una poco difusa, ya que si la regla de conmutación depende de la dinámica impuesta por los estados del sistema (conmutación autónoma) a la misma se la puede modelar adecuadamente como una señal en el tiempo que indexa a familia de campos vectoriales que componen el sistema conmutado lo que permite pasar a un modelo del tipo conmutación tiempo-dependiente. Sin embargo, el paso inverso no es posible, por lo que al modelo tiempo-dependiente se lo considera un caso más general que al sistema con conmutaciones estado-dependiente. La utilización de uno u otro modelo depende del objetivo que se esté persiguiendo, en particular el modelo de tiempo-dependiente es de gran utilidad cuando se desconoce la dinámica de la regla de conmutación del sistema conmutado.

Nota 2.1. La idea de sistema controlado para los sistemas conmutados está ligada a tener una acción de control $u(t)$, adecuadamente diseñada, actuando sobre la familia de campos vectoriales ($\dot{x} = f_i(x, u)$), o una señal de conmutación (generalizando el modelo) que logre el objetivo de control sin necesidad de que los campos estén controlados. A su vez puede darse una combinación ambas.

2.2. Modelo matemático

A continuación se presenta formalmente la descripción matemática sobre la cual se desarrolla este trabajo, en términos de un sistema con conmutación de tiempo-dependiente. También se dan las definiciones e hipótesis necesarias para el planteo del problema de observación.

Se considera un sistema conmutado descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x} &= f_{\sigma(t)}(x(t)) \\ y &= h(x(t)) \end{cases} \quad (2.2)$$

donde para $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $x \in \mathcal{U}$ es el vector de estados continuos, $\mathcal{P} = \{f_q : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n, q \in \mathcal{Q}\}$ es una familia finita de campos vectoriales suficientemente regulares y $\mathcal{Q} = \{1, \dots, N\}$ el conjunto de índices. $\sigma(t) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{Q}$, la señal de conmutación, es una función constante a tramos continua por derecha, es decir que satisface que $\sigma(t) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} \sigma(\tau)$ para todo $\tau \in [t, +\infty)$ y que se supone desconocida. $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^p$ el mapa de salida (función de salida para $p = 1$) suficientemente regular, donde $p \leq n$.

Con respecto a la regularidad de los campos f_q y del mapa h en una primera instancia, para abordar la temática, comprender la problemática de observación y las diversas definiciones, se suponen \mathcal{C}^k con k adecuado. A lo largo de este trabajo se busca generalizar la estrategia de observación de forma tal que las hipótesis necesarias para el desarrollo de la misma sean lo suficientemente generales. Conforme se avanza en el desarrollo de la estrategia, las condiciones de regularidad se relajan a tal punto que finalmente los campos f_q y el mapa de salida h solo verifican ser Lipschitz continuos.

Para plantear el problema de observación asociado a los sistemas no lineales conmutados que se quiere abordar, es necesario comprender como evoluciona la trayectoria solución del sistema conmutado y obtener una descripción de la misma, en términos de relacionar la señal de conmutación (o dinámica discreta) con la dinámica continua. Un estudio riguroso de la solución se da en [16] donde se aborda los sistemas conmutados con las herramientas de los sistemas híbridos propiamente dichos lo que permite establecer una solución o *arco híbrido* (hybrid arc) en función de lo que se denomina un *dominio de tiempo híbrido* (hybrid time domain). Este tipo de solución permite expresar de forma explícita y compacta el comportamiento de las dos dinámicas presentes en estos sistemas. Este tipo de abordaje resulta mucho más rico en términos dinámicos ya que resulta más general y permite comportamientos específicos de los sistemas conmutados como ser, dinámicas tipo *zeno* o de conmutaciones infinitas. A su vez permite estudiar la estabilidad en términos de Lyapunov y la robustez en función de los conjuntos C y D . Uno de los problemas que surgen bajo el formato establecido por la teoría híbrida se da cuando se desconoce la descripción de la dinámica asociada a la señal de conmutación, lo que complejiza el modelado del sistema. Para evitar este inconveniente y poder resolver el problema de estimación de $\sigma(t)$ (y por ende de estados) es posible describir la solución en términos del modelo (2.2), para lo cual se supone lo siguiente

Hipótesis 2.1. La señal de conmutación $\sigma(t)$ establecida en la Definición 2.1 satisface que $t_{j+1} - t_j \geq \tau_D$ (*tiempo de permanencia*), con $\tau_D > 0$ para todo j , donde t_j son los *instantes de conmutación*.

Nota 2.2. En el capítulo posterior se da una descripción de los *instantes de conmutación* en relación de como interactúan con la dinámica del sistema conmutado.

En lo que sigue se supondrá τ_D lo suficientemente grande según sea necesario, en particular para los tiempos involucrados en la estima del modo y los estados.

Definición 2.2. Sea $\sigma(t)$ una dada señal de conmutación según la Definición 2.1 que verifica la Hipótesis 2.1. Debido a la regularidad de los campos f_q , $q \in \mathcal{Q}$, para cada condición inicial $x_0 \in \mathcal{U}$ existe una única solución del sistema (2.2), esto es, una función localmente absolutamente continua $x : [t_0, t_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $t_0 \leq t < t_f$ que verifica $\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x(t))$ para todo $t \in [t_0, t_f)$ y $x(t_0) = x_0$. Se dice que la solución es *completa hacia adelante* sí $t_f = +\infty$.

La Hipótesis 2.1 establece que no existe histéresis en la señal de conmutación, lo cual garantiza que la misma permanecerá constante por al menos un tiempo τ_D . Por lo tanto la trayectoria solución dada por la Definición 2.2, luego de una conmutación, evoluciona en un mismo modo como mínimo en un intervalo de tiempo τ_D . Esto evita que el sistema tenga comportamiento en su solución del tipo *zeno* o que se produzcan infinitas conmutaciones en un intervalo finito de tiempo.

En relación a la trayectoria solución del sistema conmutado (2.2), a lo largo del trabajo se denota como:

- $\phi_q(t, t_0, x_0)$: la solución del sistema (2.2) tal que $\sigma(\tau) = q$ para $t_0 \leq \tau < t$ y también $\phi_q(t_0, t_0, x_0) = x_0$
- $\mathcal{Y}(t, t_0, x_0, q) = h(\phi_q(t, t_0, x_0))$

La siguiente suposición, la cual es formulada en diversos artículos que abordan la temática de observadores de alta ganancia para sistemas no lineales (ver [41], [22], [8], [43] entre otros), es sostenida durante toda la tesis.

Hipótesis 2.2. Los estados del sistema evolucionan en un conjunto compacto y convexo $\mathcal{X} \subset \mathcal{U}$ y las trayectorias del sistema son completas hacia adelante.

Observación 2.1. La convexidad del conjunto permite instrumentar el teorema del valor medio, según sea necesario.

2.3. Planteo del problema

Para el sistema 2.2 y dadas las Hipótesis generales 2.1 y 2.2 bajo las cuales se desarrolla este trabajo el problema que abordamos puede enunciarse como sigue:

Dada la medición del mapa o función de salida $y(t) = h(x(t))$ del sistema (2.2) establecer los conceptos de observabilidad pertinentes para estos sistemas y desarrollar una estrategia/algorithm de estimación (observador) que permita

- 1. detectar las conmutaciones y estimar los tiempos de conmutación;*
- 2. determinar el modo activo en cada instante de tiempo;*
- 3. estimar los estados $x(t)$ del sistema;*

Capítulo 3

Detección y estimación de las conmutaciones.

A lo largo de este capítulo se desarrolla el marco teórico y el algoritmo que permite detectar en tiempo real las conmutaciones y estimar el instante de tiempo en donde estas ocurren. Para esto es necesario describir de forma precisa una conmutación, como interactúa la misma con el sistema y las implicancias que tiene sobre el mismo. Con este objetivo se dan las siguientes definiciones

Definición 3.1. Las trayectorias $x(t)$ del sistema conmutado (2.2), presentan un punto no regular en t^* si:

- $x(t)$ continua en t^* ,
- $x'(t)$ tiene una discontinuidad de salto finito en t^* .

Definición 3.2. Sea $\sigma(t)$ una señal de conmutación según la Definición 2.1; se entiende como un *instante de conmutación* t_s , al instante de tiempo en el cual el sistema conmutado asociado, descrito de la forma (2.2), cambia de un modo a otro y se define $\{t_{s_i}\}_{i=1}^{\infty}$ como la secuencia de estos instantes de conmutación.

De acuerdo con los objetivos planteados en el Capítulo 2, la secuencia $\{t_{s_i}\}_{i=1}^{\infty}$ resulta arbitraria y se supone desconocida. En lo que sigue y a lo largo de este trabajo, un instante de conmutación $t_{s_i^*} \in \{t_{s_i}\}_{i=1}^{\infty}$, donde el sistema cambia del modo q al q^* , verifica que

$$\sigma(t) = \begin{cases} q & \text{si } t \in I_{s_{i^*-1}} \\ q^* & \text{si } t \in I_{s_i^*} \end{cases}$$

con $I_{s_i^*} = [t_{s_i^*}, t_{s_{i^*+1}})$ cuyo $\text{diam}(I_{s_i^*}) \geq \tau_D$, por lo que se verifica la Hipótesis 2.1.

En base a lo descrito previamente, una conmutación en el sistema (2.2) lleva a una modificación en la dinámica de los estados continuos del sistema, ya que se modifica el campo que

describe la evolución temporal de los estados continuos, produciendo un punto no regular en la trayectoria de los mismos. Según las características de regularidad que presente el mapa o función de salida h , este punto no regular en las trayectorias no se refleja directamente sobre $y(t)$, pero sí en alguna de sus derivadas. Por lo que a lo largo de este capítulo se estudia y analiza el efecto de como impacta esta pérdida de regularidad en las trayectorias debido a una conmutación en la salida del sistema y sus derivadas. La caracterización y descripción precisa de este efecto sobre $y(t)$ permite el desarrollo de un criterio y un algoritmo para detectar y estimar los instantes de conmutación.

Para facilitar el entendimiento de lo descrito previamente y esbozar las ideas generales que permiten abordar y dar solución a la problemática de estimación y detección de una conmutación propuesta en esta tesis, se analiza la siguiente situación que ejemplifica el proceso de una conmutación. Sea un sistema conmutado descrito por (2.2) que experimenta una conmutación en $t_{s_i^*}$, como se describió previamente, con h función de salida ($p = 1$) y diferenciable en $x(t_{s_i^*})$. Bajo estas suposiciones las trayectorias del sistema presentan un punto no regular en $t_{s_i^*}$ y analizando el comportamiento dinámico de $y(t)$ en un entorno de $t_{s_i^*}$, la primera derivada de la señal de salida presenta una discontinuidad de salto finito en el instante $t_{s_i^*}$, ya que se verifica

$$y'(t_{s_i^*}^-) = L_{f_q} h(x(t_{s_i^*})), \quad y'(t_{s_i^*}^+) = L_{f_{q^*}} h(x(t_{s_i^*})), \quad (3.1)$$

donde queda de manifiesto de forma explícita como interactúa una conmutación con el sistema y como impacta sobre la dinámica de la señal de salida del sistema $y(t)$. De este ejemplo se desprenden dos conceptos importantes en el desarrollo de lo que continúa:

- (a) la idea general de como detectar una conmutación por medio de la salida: *reconstruir/detectar la discontinuidad presente en alguna derivada de la señal de salida.*
- (b) la importancia de la regularidad de h en la caracterización de como impacta una conmutación en la señal de salida, ya que si h no es diferenciable en $x(t^*)$, $y'(t)$ no es continua en $t = t^*$, siendo t^* un instante de tiempo que no necesariamente corresponde a un instante de conmutación.

Con respeto a esto último, si bien el tipo de discontinuidad que puede presentar $y'(t)$ debido a una falta de diferenciabilidad depende de h (un análisis más detallado se propone más adelante), si $y(t)$ verifica Lipschitz continuidad se garantiza que $y'(t)$ está acotada. Esto impulsa la siguiente hipótesis sobre la salida del sistema.

Hipótesis 3.1. Sea el sistema conmutado (2.2) el mapa o campo $h(t)$ es Lipschitz continua $\forall t$.

Si bien esta es la condición mínima de regularidad que se exige sobre $y(t)$ a lo largo de este trabajo, en una primera instancia para la comprensión de lo que se quiere desarrollar, se exigen condiciones de regularidad sobre $y(t)$ más estrictas, las cuales conforme se avanza en el análisis se relajaran.

Definición 3.3. Diremos que la salida $y(t)$ asociada al sistema (2.2) tiene un punto no regular en t^* sí $y'(t)$ presenta una discontinuidad del tipo salto en $t = t^*$.

Observación 3.1. De lo descrito y analizado se desprende que un punto no regular en la función de salida puede ocasionarse bajo dos situaciones posibles: (1) cuando ocurre una conmutación en el instante $t^* \in \{t_{s_i}\}$, (2) una pérdida en la diferenciabilidad de h en $x(t^*)$.

En primer lugar, para simplificar la comprensión del esquema de *detección y estimación de un instante de conmutación* y el marco teóricos asociados a este desarrollo, se abordan los sistemas conmutados con salida de dimensión uno ($p = 1$), donde se supone que h es diferenciable para todo $x \in \mathcal{X}$ y la función de salida presenta un punto no regular debido a que el sistema experimenta una conmutación. En este contexto la detección de un cambio en la dinámica del sistema (2.2) debido a una conmutación, se llevará a cabo por medio del análisis la derivada (en sentido generalizado) de segundo orden de $y(t)$. La idea de utilizar la derivada de segundo orden consiste en que el salto que experimenta $y'(t)$ debido a la conmutación puede ser difícil de detectar bajo ciertas circunstancias y en implementación ya que la magnitud del mismo podría no ser lo suficientemente grande como para ser computada y detectada. En el marco de las funciones generalizadas se entiende que este salto en la primera derivada de $y(t)$ corresponde a una delta de Dirac en la derivada de segundo orden de $y(t)$. Por ello la implementación en tiempo real del algoritmo desarrollado se basa en convolucionar la señal de salida con una función adecuada en una ventana de tiempo móvil (ventana móvil), lo que permite obtener una versión aproximada de la derivada (en sentido generalizado) de segundo orden de $y(t)$ y determinar un criterio de detección. Ideas similares son presentadas en los trabajos de [25],[31] y [12] para sistemas conmutados lineales.

El algoritmo que se desarrolla en primera instancia, bajo las condiciones descritas, se utiliza como punto de partida para desarrollar estrategias para detectar y estimar conmutaciones de otros sistemas conmutados bajo condiciones más generales, lo que permite dar un mayor alcance de aplicación al algoritmo que se desarrolla. En particular se hace foco en extender el algoritmo a:

- (a) sistemas de múltiples salidas ($p > 1$) donde la idea general consiste en replicar p -veces lo desarrollado para sistemas de una única salida.

- (b) a sistemas donde se pierde la regularidad en $y(t)$, debido a una conmutación, se hace presente en una derivada de orden superior a 1, tanto para funciones como mapas de salida.
- (c) sistemas donde se pierde la regularidad de $y(t)$ debido a la no diferenciabilidad de h en $x(t^*)$ para $t^* \notin \{t_{s_i}\}$ y la salida del sistema solo verifica que es Lipschitz continua, lo que lleva a tener que discriminar entre los puntos no regulares de $y(t)$ debido a una conmutación o a la pérdida en la diferenciabilidad de h , tanto para funciones como para mapas de salida.

3.1. Sistemas de una salida.

En esta sección, se presenta la estrategia de detección para sistemas de una única salida (Single Output o SO), donde $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ y diferenciable en $x(t_s)$, siendo t_s un instante de conmutación según la Definición 3.2. Para comenzar con el desarrollo de la estrategia, primero se introduce la siguiente definición la cual establece una propiedad característica de los sistemas conmutados que permite vincular la función de salida del sistema con el modo activo del sistema para cada instante de tiempo.

Definición 3.4. ■ Dos modos $q, q^* \in \mathcal{Q}$, $q \neq q^*$ del sistema (2.2) son *indistinguibles por la salida*, si existen estados iniciales $x_0, x'_0 \in \mathcal{X}$ tales que $\mathcal{Y}(\tau, t_0, x_0, q) = \mathcal{Y}(\tau, t_0, x'_0, q^*)$, $\forall t_0 \leq \tau \leq t_0 + \tau_D$.

- El sistema (2.2) se dice *conjuntamente observable* si no existen pares de modos indistinguibles por la salida.

Esta Definición es introducida por primera vez en [42] dentro del marco de los sistemas conmutados lineales y la misma es una extensión del concepto de observabilidad para sistemas dinámicos la cual tiene en cuenta a la señal de conmutación y a los subsistemas que componen el sistema conmutado. En base a esta definición queda claro que si el sistema conmutado (2.2) no es conjuntamente observable, puede existir un intervalo de tiempo para el cual el modo actual no puede ser determinado a partir de la salida, por lo que la siguiente suposición sobre el sistema resulta crucial para poder detectar el modo del sistema.

Hipótesis 3.2. El sistema conmutado (2.2) es conjuntamente observable.

Dentro de los sistemas conmutados lineales se establece una relación biunívoca entre la observabilidad conjunta y el criterio del rango de la *matriz de observabilidad conjunta extendida* (ver [42]), la cual permite establecer un criterio para detectar el modo y una conmutación. Para

los sistemas conmutados no lineales tal relación no es posible y dado que la Hipótesis 3.2 resulta bastante general, para detectar la ocurrencia de una conmutación, se debe introducir la siguiente hipótesis acerca del comportamiento de la derivada de la salida.

Hipótesis 3.3. (Detectabilidad de una conmutación) Existe $\mu > 0$ tal que para cualquier par $q, q^* \in \mathcal{Q}$ con $q \neq q^*$

$$\left| L_{f_q} h(x) - L_{f_{q^*}} h(x) \right| \geq \mu \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad (3.2)$$

Observación 3.2. La Hipótesis 3.3 puede extenderse a derivadas de orden superior de $y(t)$, reemplazando (3.2) por

$$\left| L_{f_q}^k h(x) - L_{f_{q^*}}^k h(x) \right| \geq \mu \quad \text{para cada } x \in \mathcal{X}, \text{ con } k \in \{2, \dots, N-1\},$$

La introducción de esta condición supone una regularidad de orden superior (asociada a k) tanto en h como en f , las cuales resultan muy conservativas y acotan el conjunto de sistemas posibles de tratar. A su vez, como se verá más adelante, debido a la estructura del algoritmo desarrollado, procesar derivadas de mayor orden implica un aumento considerable en la carga computacional. Por lo que de ahora en adelante, supondremos que la Hipótesis 3.3 se cumple.

Teniendo en cuenta (3.1) si (3.2) se verifica, es posible detectar una conmutación en el sistema (2.2) en base a la primera derivada de la señal de salida $y(t)$, ya que en cada instante de conmutación, t_s , $y'(t)$ presenta una discontinuidad de tipo salto finito dado por $|y'(t_s^+) - y'(t_s^-)|$ y tiene una cota inferior dada por μ . Como consecuencia, si **(a)** $y'(t)$ puede ser bien estimada y **(b)** se pueden detectar los saltos de $y'(t)$ mayores o iguales en valor absoluto a μ , entonces se pueden estimar los tiempos de conmutación.

Observación 3.3. Se sabe qué sintetizar e implementar un diferenciador para calcular la derivada de una señal no es una tarea trivial. Cuando se conocen las características del espectro en frecuencias de la señal a procesar, es posible construir un sistema que aproxime la función de transferencia de un diferenciador ideal en el rango de frecuencias adecuado para la señal a tratar ([37], [24]). En esos caso se utilizan filtros pasa-bajos para reducir los efectos del ruido presente en la señal a tratar. El rango de aplicación de este método se limita a un número reducido de señales de salida y además, la dinámica interna del sistema que aproxima al diferenciador, impone retardos que degradan la estimación de t_s .

Los diferenciadores basados en modos deslizantes [26] aumentan el rango de operación y la robustez frente al ruido, pero requieren de acciones discontinuas y esfuerzos computacionales más

complejos para obtener buenos resultados en el procesamiento de la señal.

Por otro lado, la detección numérica del salto basada en la primera derivada de $y(t)$, se puede realizar comparando los valores ($y'(t_s^+)$ y $y'(t_s^-)$), que en principio podrían ser de varios órdenes de magnitud superiores a μ . En este caso la detección de t_s es a priori difícil.

Cabe mencionar que en [4] bajo una condición similar a la planteada por la Hipótesis 3.3, se presenta un esquema de filtros aplicado a la señal de salida de un sistema conmutado no lineal, cuyo objetivo es el de obtener una función tipo *tren de deltas*, donde cada una de ellas esta asociada a una conmutación en el sistema, lo que permite detectar una conmutación y estimar el instante donde ocurre. El objetivo del filtro es reconstruir las altas frecuencias presentes en la señal de salida, y si bien se establecen algunas relaciones en el diseño del mismo, al no poder asociar un ancho de banda a los sistemas dinámicos no lineales, esto limita el rango de aplicación de esta estrategia y complejiza el diseño del filtro.

Debido a las diversas dificultades que presenta la reconstrucción de la derivada de una señal, a continuación se presenta una estrategia para aproximar la derivada (en sentido generalizado) de segundo orden de $y(t)$, con el objetivo de detectar un pico en el tiempo de conmutación t_s , lo cual resulta en una tarea más fácil. Como se mencionó previamente, la aproximación de la derivada segunda (en sentido generalizado) se lleva a cabo por medio de una convolución entre $y(t)$ y una función adecuada, la cual aproxima (en sentido generalizado) a la derivada generalizada de la Delta de Dirac, en una ventana de tiempo móvil.

A continuación se presenta el marco teórico necesario asociado a las funciones generalizadas (distribuciones), que conforman las bases de la estrategia a implementar para detectar una conmutación y estimar el tiempo en que la misma sucede.

3.1.1. Funciones Generalizadas.

En este apartado se presentan algunos resultados relacionados a las funciones generalizadas, necesarios para el desarrollo de la estrategia de detección de una conmutación. La mayoría de los resultados presentados se vinculan con la idea de poder dar solución al problema de encontrar una noción de derivada aplicable a aquellas funciones que no tienen derivada, en el sentido clásico, en algún punto de su dominio y encontrar algún método que permita estimar su comportamiento. Para mayor de detalle de la teoría asociada a estos conceptos ver [18], [15], [45].

Lema 3.1. *Sea $f(t)$ una función continua con primera derivada $f'(t)$ continua y derivable, excepto en $t = t_s$ donde presenta una discontinuidad tipo salto. Entonces la derivada generalizada de*

segundo orden de $f(t)$ queda definida como

$$\partial^{(2)} f(t) = F''(t) + [f'(t_s^+) - f'(t_s^-)] \delta(t - t_s) \quad (3.3)$$

donde

$$F''(t) = \begin{cases} f''(t) & \text{si } t \neq t_s \\ 0 & \text{si } t = t_s \end{cases}$$

y $\delta(t)$ es la delta de Dirac.

Lema 3.2. Sea $f(t)$ como en el Lema 3.1 y $t_a < t_b$ tales que $t_s \neq t_a$ y $t_s \neq t_b$. Sean también $I = [t_a, t_b]$ y $w(t) = \chi_I(t)f(t)$ donde χ_I es la función característica asociada a I , esto es

$$\chi_I(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{si } t \notin I \end{cases}$$

Entonces la derivada generalizada de segundo orden de $w(t)$ viene dada por

$$\partial^{(2)} w(t) = \chi_I(t) \partial^{(2)} f(t) + \sum_{k=0}^1 f^{(k)}(t_a) \delta^{(1-k)}(t - t_a) - f^{(k)}(t_b) \delta^{(1-k)}(t - t_b) \quad (3.4)$$

En esta última expresión se tiene de forma explícita la descripción de la segunda derivada, en sentido generalizado, de una función $f(t)$ analizada durante una ventana de tiempo I , donde $f'(t)$ presenta una discontinuidad de salto finito en el instante de tiempo $t_s \in I$. Este tipo de discontinuidad en t_s trae aparejada una delta de Dirac en este instante de tiempo, y como consecuencia de analizar la función por tramos, aparecen dos deltas de Dirac asociadas a las discontinuidades que se generan en los extremos del intervalo de análisis I .

aparecen dos deltas de Dirac en adicionales que reflejan las discontinuidades que generan por

Lema 3.3. Sea $\{\delta_m, m \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de funciones suaves tales que $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m = \delta$ en sentido generalizado, y sea w una función seccionalmente continua de soporte compacto. La j -ésima derivada generalizada de $w(t)$ verifica

$$\partial^{(j)} w(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_m^{(j)}(t - s) w(s) ds = \lim_{m \rightarrow \infty} (\delta_m^{(j)} * w)(t) \quad (3.5)$$

en el sentido generalizado.

Dado que $\{\delta_m\}$ es una sucesión de funciones regulares, este resultado nos permite aproximar $\partial^{(j)} w(t)$ por medio de una convolución en el sentido clásico.

3.1.2. Estrategia de detección de una conmutación.

En base al trabajo de [25] para computar $\partial^{(2)}y(t)$ se implementa un esquema de ventanas móviles, por lo que $y(t)$ se procesa a intervalos de tiempo fijos impuesto por la ventana de tiempo móvil.

Dado el instante de tiempo t_i y $\Delta\tau > 0$ fijo (ancho de la ventana de tiempo móvil) se define $t_{i+1} = t_i + \Delta\tau$, $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ y $y_{I_i}(t) = \chi_{I_i}(t)y(t)$. De acuerdo con (3.4),

$$\partial^{(2)}y_{I_i}(t) = \chi_{I_i}(t) \partial^{(2)}y(t) + \sum_{k=0}^1 y^{(k)}(t_i) \delta^{(1-k)}(t - t_i) - y^{(k)}(t_{i+1}) \delta^{(1-k)}(t - t_{i+1}).$$

Para el caso en que no ocurre ninguna conmutación en I_i se verifica

$$\partial^{(2)}y_{I_i}(t) = \chi_{I_i}(t) y''(t) + \sum_{k=0}^1 y^{(k)}(t_i) \delta^{(1-k)}(t - t_i) - y^{(k)}(t_{i+1}) \delta^{(1-k)}(t - t_{i+1}),$$

ya que en este caso $\partial^{(2)}y(t) = y''(t)$.

Si ocurre una conmutación en $t_s \in (t_i, t_{i+1})$, resulta que

$$\begin{aligned} \partial^{(2)}y_{I_i}(t) &= \chi_{I_i}(t) Y''(t) + [y'(t_s^+) - y'(t_s^-)] \delta(t - t_s) \\ &+ \sum_{k=0}^1 y^{(k)}(t_i) \delta^{(1-k)}(t - t_i) - y^{(k)}(t_{i+1}) \delta^{(1-k)}(t - t_{i+1}), \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde, como antes,

$$Y''(t) = \begin{cases} y''(t) & \text{si } t \neq t_s \\ 0 & \text{si } t = t_s \end{cases}$$

A partir de (3.6) se establece un criterio para detectar una conmutación y estimar t_s . Este criterio se basa en la búsqueda del término $[y'(t_s^+) - y'(t_s^-)] \delta(t - t_s)$ en las sucesivas ventanas de tiempo. Si el término no es detectado en, por ejemplo, (t_i, t_{i+1}) la búsqueda continúa en la siguiente ventana de tiempo, la cual comienza en el instante t_{i+1} , y así sucesivamente.

3.2. Implementación.

Desde el punto de vista de la implementación numérica, detectar y estimar los tiempos de conmutación por medio de (3.6) implica computar $\partial^{(2)}y_{I_i}(t)$, para lo cual es necesario implementar un diferenciador que compute la segunda derivada de una señal, lo que conlleva un aumento en las dificultades mencionadas en la Observación 3.3.

En lo que sigue, se presenta un método basado en el Lema 3.3 para aproximar los valores de $\partial^{(2)}y_{I_i}(t) \forall t \in I_i$.

Consideramos la sucesión de funciones $\{\delta_m(t), m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ dadas por

$$\delta_m(t) = \frac{m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(mt)^2}{2}}. \quad (3.7)$$

Entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m = \delta$ en sentido generalizado ([18], [15], [45]).

Sea para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$w_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_{I_i}(\zeta) \delta_m''(t - \zeta) d\zeta \quad (3.8)$$

$$= \int_{t_i}^{t_{i+1}} y(\zeta) \left(\frac{m^5}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\frac{m(t-\zeta)^2}{2}} \left((t - \zeta)^2 - \frac{1}{m^2} \right) d\zeta. \quad (3.9)$$

Dado que $y_{I_i} * \delta_m''(t) = \partial^{(2)}y_{I_i} * \delta_m(t)$ (ver [45] para mayor detalle), a partir del Lema 3.3 se tiene que $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m(t) = \partial^{(2)}y_{I_i}(t)$.

A su vez, por (3.6) se tiene que

$$\begin{aligned} w_m(t) &= \partial^{(2)}y_{I_i} * \delta_m(t) \\ &= [\chi_{I_i}(t)Y''] * \delta_m(t) + [y'(t_s^+) - y'(t_s^-)]\delta_m(t - t_s) \\ &\quad + \sum_{k=0}^1 y^{(k)}(t_i)\delta_m^{(1-k)}(t - t_i) - y^{(k)}(t_{i+1})\delta_m^{(1-k)}(t - t_{i+1}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ya que δ_m es una función Gaussiana de valor medio cero y varianza $\frac{1}{m}$, para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ el 99,7% de la información útil de $\delta_m(t - t_0)$ esta contenida en $|t - t_0| \leq \frac{3}{m}$.

Basándonos en esto, sea $n \in \mathbb{N}$ e $\bar{I}_i = [t_i + \frac{n}{m}, t_{i+1} - \frac{n}{m}]$ con $n \geq 6$. Por (3.10) y para todo $t \in \bar{I}_i$ y m lo suficientemente grande se tiene que

$$\begin{aligned} w_m(t) &\cong Y'' * \delta_m(t) + [y'(t_s^+) - y'(t_s^-)]\delta_m(t - t_s) \\ &\cong Y''(t) + [y'(t_s^+) - y'(t_s^-)]\delta_m(t - t_s), \end{aligned} \quad (3.11)$$

ya que para estos valores de m , $Y'' * \delta_m(t) \cong Y'' * \delta(t) = Y''(t)$.

A partir de (3.11) se puede establecer un criterio numérico para detectar un cambio durante una ventana de tiempo como se detalla a continuación.

Como h y $f_q, q \in \mathcal{Q}$ son regulares y \mathcal{X} un conjunto compacto, existe $M > 0$ tal que

$|Y''(t)| < M$ para todo t . Ya que $\max \delta_m = \frac{m}{\sqrt{2\pi}}$, si se verifica que

$$M < \frac{\mu m}{2\sqrt{2\pi}}, \quad (3.12)$$

entonces $|w_m(t_s)| > \frac{\mu m}{2\sqrt{2\pi}}$.

Dado m fijo que satisface la desigualdad (3.12) y considerando el conjunto abierto $I_s = \{t \in \bar{I}_i \text{ tal que } |w_m(t)| > \frac{\mu m}{2\sqrt{2\pi}}\}$ (ver Figura 3.1), es posible establecer la siguiente condición de detección de conmutación (estimación de t_s):

$$\hat{t}_s = \min \{t \in \partial I_s\} \quad (3.13)$$

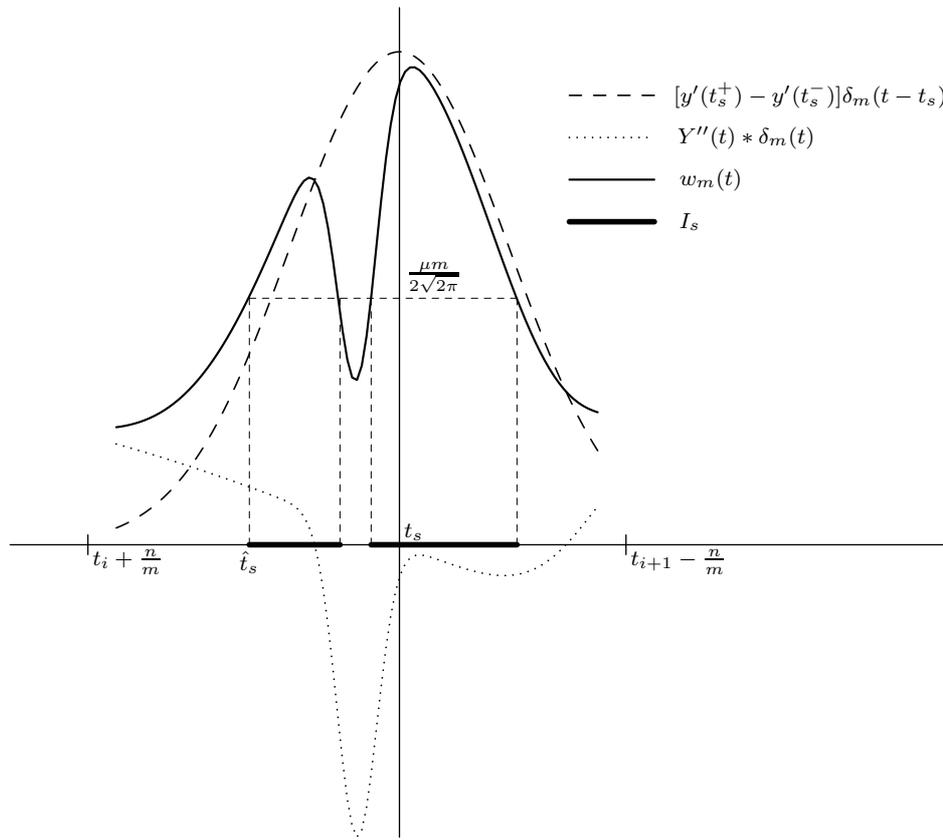


FIGURA 3.1: Esquema de detección asociado a la implementación de la detección de una conmutación.

Observación 3.4. Si $t_s \in [t_i, t_i + \frac{n}{m})$ ó $t_s \in (t_{i+1} - \frac{n}{m}, t_{i+1}]$, \hat{t}_s no se computa y la conmutación no es detectada.

Para evitar esto, se utiliza en simultáneo un segundo detector de conmutación. Este detector es similar al primero, excepto que los intervalos en que definen las ventanas móviles son de la

forma $\overline{I}_i^* = [t_i^* + \frac{n}{m}, t_{i+1}^* - \frac{n}{m}]$, con $t_i^* = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$ y $t_{i+1}^* = t_i^* + \Delta\tau$.

De lo desarrollado hasta el momento resulta crucial en la detección y estimación de una conmutación por medio de (3.13) el cálculo y análisis de $w_m(t)$, por lo que es necesario dar una descripción de la implementación numérica de $w_m(t)$ a partir de (3.9), la cual permita aplicar lo desarrollado en simulación. A partir de esta descripción se desprenden algunas restricciones y relaciones de compromiso en el diseño y elección de los parámetros que intervienen en la estrategia.

Sea la ventana de tiempo I_i donde se calcula $w_m(t)$ y sea la secuencia de tiempos $\{t_{\zeta_k}\}_{k=1}^N$ de forma tal que $t_i = t_{\zeta_1} < t_{\zeta_2} < \dots < t_{\zeta_N} = t_{i+1}$.

Dado $t_{\zeta_{k^*}} \in \{t_{\zeta_k}\}_{k=1}^N$ se define

$$\tilde{w}_m(t_{\zeta_{k^*}}) = \sum_{k=1}^{N-1} y(t_{\zeta_{k^*}}) \left(\frac{m^5}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\frac{m(t_{\zeta_{k^*}} - t_{\zeta_k})^2}{2}} \left((t_{\zeta_{k^*}} - t_{\zeta_k})^2 - \frac{1}{m^2} \right) (t_{\zeta_{k+1}} - t_{\zeta_k}), \quad (3.14)$$

por lo que $\tilde{w}_m(t_{\zeta_{k^*}}) \forall t_{\zeta_{k^*}} \in \{t_{\zeta_k}\}_{k=1}^N$ implementa y próxima $w_m(t) \forall t \in I_i$.

N (cantidad de instantes de tiempo tomados sobre el intervalo I_i) depende del paso y del método elegido para la implementación numérica, por lo que a partir de lo descrito se desprende que $\Delta\tau$ impone un máximo en la resolución del método elegido, donde

$$\max_{1 \leq k \leq N-1} (t_{\zeta_{k+1}} - t_{\zeta_k}) \ll \Delta\tau \quad \text{con } t_{\zeta_k} \in \{t_{\zeta_k}\}_{k=1}^N$$

Observación 3.5. m debe seleccionarse lo más grande posible para cumplir con los siguientes requisitos:

1. δ_m aproxima δ lo suficiente para que $Y'' * \delta_m(t) \cong Y''(t)$,
2. que (3.12) se verifique,
3. $t_i^* + \frac{n}{m} < t_{i+1} - \frac{n}{m}$ y $t_{i+1} + \frac{n}{m} < t_{i+1}^* - \frac{n}{m}$, y por lo tanto $m > \frac{4n}{\Delta\tau}$.

En principio, no hay restricción teórica a los valores máximos que pueden tomar m y n , pero debido a que el ancho de banda espectral de δ_m es del orden de m^2 , cuanto mayor sea m mayores son las perturbaciones que se introducen debido al ruido presente en la señal a procesar cuando se quiere detectar una conmutación.

Por otro lado, y desde el punto de vista de la implementación numérica, a medida que m aumenta, el costo computacional también se incrementa.

Observación 3.6. En cuanto a la elección de $\Delta\tau$, en principio solo debe cumplirse que $\Delta\tau \ll \tau_D$, para detectar solo una conmutación a la vez. Sin embargo, debido a que la conmutación puede ocurrir en cualquier instante de tiempo dentro del intervalo \bar{I}_i , esto conlleva a que la condición (3.13) no se aplica hasta que (3.9) sea evaluado para todo $t \in \bar{I}_i$. Este efecto trae aparejado un retardo entre la ocurrencia de una conmutación y la detección de la misma por medio de esta estrategia.

Para evitar una degradación en la performance de detección (lo cual trae aparejado una degradación del error de estimación como se verá en los capítulos siguientes), $\Delta\tau$ debe seleccionarse lo más pequeño posible para lograr que los retardos también sean pequeños, pero teniendo en cuenta el aumento del esfuerzo computacional que esto conlleva. Por ello se genera una relación de compromiso la cual se debe tener en cuenta a la hora del diseño y la elección de los parámetros, los cuales deben ser determinados y validados por simulación.

3.3. Detección de una conmutación para sistemas de múltiples salidas.

En las secciones previas se presentó un esquema de detección para sistemas de una sola salida. En este apartado se busca extender la estrategia de detección de una conmutación por medio de ventanas móviles a sistemas de múltiples salidas ($y = h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x)) \in \mathbb{R}^p$). Para el desarrollo de este apartado es necesario extender la noción de las derivadas Lie aplicado a campos vectoriales.

Definición 3.5. Sea η un campo vectorial lo suficientemente suave y $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ un mapa suave. Entonces denotamos $L_\eta^k \mu = (L_\eta^k \mu_1, \dots, L_\eta^k \mu_p)$.

Para el desarrollo de esta estrategia se introduce la siguiente hipótesis que permite establecer un criterio de detección.

Hipótesis 3.4. (Detectabilidad para sistemas de múltiples salidas) Existe una familia de conjuntos compactos $\{\mathcal{X}_k, k = 1, \dots, p\}$ tales que $\mathcal{X} = \cup_{k=1}^p \mathcal{X}_k$ y para cada k un número $\mu_k > 0$ tal que para cada par $q, q^* \in \mathcal{Q}$ con $q \neq q^*$

$$\left| L_{f_q} h_k(x) - L_{f_{q^*}} h_k(x) \right| \geq \mu_k \quad \forall x \in \mathcal{X}_k \quad (3.15)$$

para $k = 1, \dots, p$

Observación 3.7. Esta última hipótesis es la extensión de la Hipótesis 3.3 a sistemas de múltiples salidas. Ya que los conjuntos compactos \mathcal{X}_k cubren \mathcal{X} , esta suposición asegura que al menos una de las p salidas $y_k(t)$, verifica la condición de detectabilidad de una conmutación dada por (3.13) para cualquier t_s .

La detección de una conmutación para sistemas de múltiples salidas se lleva a cabo como se describe a continuación: se ponen en funcionamiento p detectores como los desarrollados en la sección previa, uno para cada una de las p salidas del sistema. Estos p detectores se diseñan de forma tal que todos comparten los mismos valores de $\Delta\tau$ y operan en los mismos intervalos I_i , pero sus respectivos valores m_k difieren, ya que se calculan según (3.12) y siguiendo los criterios establecidos en la Observación 3.5.

Si se supone que una conmutación ocurre a tiempo $t_s \in \bar{I}_i$ y que l de los p detectores, con $l \leq p$, proporcionan una estima $\hat{t}_s^{k_j}$ del tiempo de conmutación de acuerdo a (3.13), de forma tal que

$$\hat{t}_s^{k_j} = \min \left\{ t \in \partial I_s^{k_j} \right\}$$

donde

$$I_s^{k_j} = \left\{ t \in \bar{I}_i \text{ tal que } |w_{m_{k_j}}^{k_j}(t)| > \frac{\mu_{k_j} m_{k_j}}{2\sqrt{2\pi}} \right\}$$

y

$$w_{m_{k_j}}^{k_j}(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} y_{k_j}(\zeta) \left(\frac{m_{k_j}^5}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\frac{m_{k_j}(t-\zeta)^2}{2}} \left((t-\zeta)^2 - \frac{1}{m_{k_j}^2} \right) d\zeta$$

entonces la estima de los tiempos de conmutación t_s se obtiene como:

$$\hat{t}_s = \min \left\{ \hat{t}_s^{k_j} : 1 \leq j \leq l \right\} \quad (3.16)$$

3.4. Ejemplo.

A continuación se presenta un ejemplo en el que se implementa en simulación el esquema de estimación descrito en esta sección para un sistema conmutado con salida de dimensión uno y autónomo. Primero se validan todas las hipótesis que debe verificar el sistema para luego diseñar los parámetros del algoritmo y presentar los resultados de lo desarrollado teóricamente. A su vez se hacen algunas observaciones sobre el algoritmo relacionadas con la implementación del mismo, las cuales relajan ciertos cálculos en base a las características de la función de salida del sistema.

Sea el sistema conmutado (2.2) de \mathbb{R}^3 con los modos $\mathcal{Q} = \{1, 2, 3\}$ descrito según

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + a_i x_2 \\ \dot{x}_3 &= b_i + x_3(x_1 - c_i) \\ y &= \tanh(x_2) \end{cases} \quad (3.17)$$

donde a_i, b_i y c_i con $i = 1, 2, 3$ son parámetros constantes que toman los valores detallados en la Tabla 3.1.

TABLA 3.1: Constantes del sistema (3.17).

$a_1 = 0,2$	$b_1 = 0,2$	$c_1 = 5,7$
$a_2 = 0,1$	$b_2 = 0,1$	$c_2 = 14$
$a_3 = 0,15$	$b_3 = 2$	$c_3 = 4$

La señal de conmutación para este ejemplo verifica un $\tau_D = 1$ s y una duración de 30 s. La Tabla 3.2 presenta en detalle, solo a modo ilustrativo, la dinámica de la señal de conmutación de forma tal de poder contrastar con lo estimado en simulación.

TABLA 3.2: Dinámica de la señal de conmutación, $\sigma_0(t)$, para el sistema (3.17).

t_s [s]	0	2.1245	6.1024	11.7298	14.9385	17.6751	20.5002	24.8296	26.9388
$\sigma_0(t)$	2	3	1	2	3	1	3	2	3

Por otro lado el sistema verifica

$$|L_{f_i} h(x) - L_{f_j} h(x)| = 0,1 (1 - \tanh^2(x_2)) |x_2| |a_i - a_j| \quad \forall i, j \in \mathcal{Q}, \quad (3.18)$$

y ya que $1 - \tanh^2(x_2) \neq 0 \forall x_2 \in \mathbb{R}$, según (3.2), es posible detectar una conmutación si y solo si el estado $x_2 \neq 0$. Por lo que (3.2), solo se verifica siempre que los valores de x estén restringidos al conjunto $|x_2| \geq \mu_*$ para algún μ_*

Como esta condición no es factible a priori para este sistema, se propone una manera alternativa de calcular μ en (3.2), la cual se basa en la relación uno a uno entre el estado x_2 y la salida y , lo que permite reescribir (3.18) en términos de la señal de salida y del sistema como:

$$|L_{f_i} h(x) - L_{f_j} h(x)| = 0,1 (1 - y^2) |\operatorname{arctanh}(y)| |a_i - a_j| \quad \forall i, j \in \mathcal{Q}.$$

A partir de esta condición, es posible establecer una cota adaptativa como se describe a

continuación: para cada paso i del algoritmo de detección de una conmutación se tiene

$$\mu_i = 0,1 |1 - \bar{y}^2| |\operatorname{arctanh}(\bar{y})| \mu^* \quad \text{con} \quad \bar{y} = \max_{t \in \bar{I}_i} \{y(t)\} \quad (3.19)$$

donde μ^* es un parámetro de diseño. Nótese que la cota μ_i establecida mediante este cálculo, está asociada con el esquema de ventana móvil para la detección de una conmutación.

En términos de esfuerzo computacional, la incorporación de esta variante presenta mejoras en la simulación a la hora de detectar una conmutación. Para este ejemplo se toma el valor de $\mu^* = 0,05$.

El resto de los parámetros del esquema de detección toman los valores $\Delta\tau = 1 \times 10^{-2} s$, $m = 1 \times 10^4$ y $n = 8$. La elección de estos valores para estos parámetros se realizan de acuerdo con las Observaciones 3.5 y 3.6.

Observación 3.8. Desde el punto vista práctico, el criterio (3.13) resulta difícil de implementar, debido a la complejidad del cómputo del conjunto I_s . Por lo tanto en las simulaciones, se modifica el criterio de detección de una conmutación según:

$$\hat{t}_s = \min \left\{ t \in \bar{I}_i : |w_m(t)| \geq \frac{\mu_i m}{2\sqrt{2\pi}} \right\} \quad (3.20)$$

Los resultados de simulación del esquema de ventanas móviles para la detección y estimación se resumen a continuación.

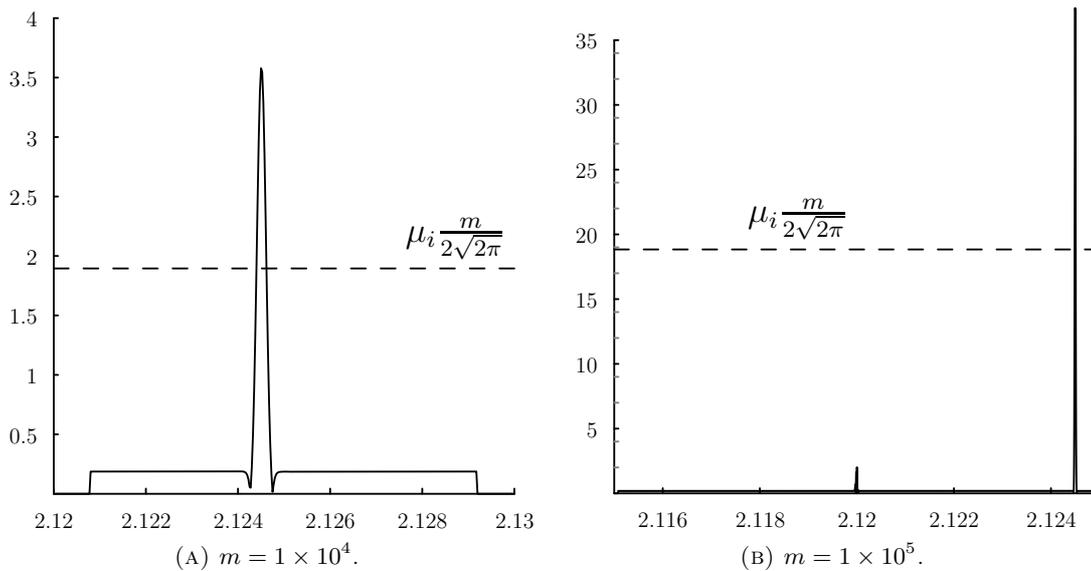


FIGURA 3.2: Detección de una conmutación. Señal $|w_m(t)|$ para el mismo instante de conmutación con diversos valores de m asociados al sistema (3.17) con señal de conmutación σ_0 .

La Figura 3.2 corresponde a la detección de una conmutación cuando ocurre el cambio del modo $q = 2$ al modo $q = 3$, en el instante $t_s = 2,1245 s$ (ver Tabla 3.2). El criterio de detección (3.20) es el implementado para $m = 10^4$ y $m = 10^5$, en ambos casos μ_i permanece constante y toma el valor $\mu_i = 4,7506e - 4$. De la comparativa para los diversos valores de m , se aprecia que a medida que se incrementa m , se tiene una mejora en la estimación \hat{t}_s de t_s .

La Tabla 3.3 presenta información de como el algoritmo de detección y los parámetros dinámicos relacionados evolucionan a lo largo de la simulación, en particular se observa como evoluciona la cota dinámica μ_i asociada a la ventana de tiempo donde se detecta la conmutación. Se observa que la estimación de los tiempos de conmutación \hat{t}_s coinciden hasta el cuarto decimal con los verdaderos tiempos de conmutación t_s según se indica en la Tabla 3.3. Este hecho refleja la efectividad del esquema propuesto.

TABLA 3.3: Resumen de los resultados de la simulación para el esquema de ventanas móviles para el sistema (3.17) con la señal de conmutación σ_0 .

$\hat{t}_s [s]$	$t_i [s]$	$t_{i+1} = t_k [s]$	μ_i
2,1245	2,12	2,13	$4,7506e - 4$
6,1024	6,095	6,1050	$7,2853e - 4$
11,7298	11,725	11,735	$3,1579e - 4$
14,9385	14,93	14,94	$8,6780e - 4$
17,6751	17,67	17,68	$9,3783e - 4$
20,5002	20,495	20,505	$9,7347e - 5$
24,8296	24,825	24,835	$5,1524e - 4$
26,9388	26,93	26,94	$4,9905e - 4$

3.5. Extensión para sistemas con salidas del tipo Lipschitz continuas

Hasta ahora los esquemas de detección descritos, tanto para sistemas de una salida como de múltiples salidas, se basan en la regularidad de h y en que la pérdida de la misma se produce solo cuando el sistema experimenta una conmutación. Luego por medio de la aproximación de la derivada generalizada de segundo orden de $y(t)$, se detecta un pico asociado en el instante de conmutación t_s . En esta sección se presenta una variante del algoritmo desarrollado previamente, donde también se hace uso del esquema de ventanas móviles y de la aproximación de la derivada generalizada de segundo orden, pero para sistemas donde h solo verifica continuidad Lipschitz. Al igual que en las secciones previas primero se procede con sistemas que tienen salida de dimensión

uno, para facilitar la comprensión y el desarrollo del marco teórico, para luego extenderlo a sistemas de múltiples salidas basándose en la idea de replicar el algoritmo con cada una de las $p > 1$ salidas.

3.5.1. Sistema de una salida.

Sea el sistema (2.2) con $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz continua y t_s el instante de conmutación como en la Definición 3.2. Para el caso en el que h es diferenciable en $x(t_s)$, en este instante de tiempo la derivada de la función de salida verifica que

$$y'(t_s^-) = L_{f_q} h(x(t_s)), \quad y'(t_s^+) = L_{f_{q^*}} h(x(t_s)).$$

Bajo esta situación, la primera derivada presenta una discontinuidad del tipo salto finito, y se puede utilizar esta característica para detectar una conmutación y estimar t_s , de forma similar a lo previamente desarrollado. Esta descripción simple y precisa de $y'(t)$ en términos del gradiente de h y del campo vectorial que rige la dinámica del sistema, es posible debido a que la diferenciabilidad de h en $x(t_s)$ habilita el uso de regla de la cadena.

Si el instante de tiempo t^* es tal que el campo escalar de salida h no es diferenciable en $x(t^*)$, la derivada de la función de salida en t^* , $y'(t^*)$, no existe en el sentido clásico. Un análisis más riguroso puede llevarse a cabo por medio de las herramientas matemáticas asociadas al problema de optimización de campos no suaves (*non-smooth optimization problem*) como la derivada de Clarke y los gradientes generalizados (ver [27]), pero desde el punto de vista del algoritmo desarrollado para la estimación y detección de una conmutación, lo relevante consiste en si esta pérdida en la diferenciabilidad se manifiesta como un punto no regular en t^* sobre $y(t)$ en el sentido de la Definición 3.3.

Una condición que asegura que el algoritmo puede detectar este punto no regular en el instante t^* es que la derivada en sentido generalizado de orden 2 de la salida pueda expresarse como:

$$\partial^{(2)}y(t) = \eta(t) + \sum_{k=0}^p a_k \delta^{(k)}(t - t^*) \quad (3.21)$$

con η continua a trozos y $|a_k| \ll |a_0|$ para $1 \leq k \leq p$. Es decir que $\partial^{(2)}y(t)$ pueda expresarse como la suma de una función generalizada regular más una función generalizada de soporte en t^* .

Si $y(t)$ verifica (3.21), donde $t^* \notin \{t_{s_i}\}_{i=1}^{\infty}$, el sistema no experimenta una conmutación en ese instante de tiempo por lo que las trayectorias del sistema evolucionan bajo el mismo campo vectorial f_q . Sin embargo debido a que a_0 es el coeficiente dominante en (3.21), cuando el

algoritmo procesa $y(t)$ puede interpretar esta característica como un salto en la primera derivada asociada al instante t^* si $|a_0| > \frac{\mu m}{2\sqrt{2\pi}}$. Por lo tanto, el algoritmo puede detectar la ocurrencia de una conmutación incluso si el sistema no cambia de modo, sino que esto puede deberse a la falta de diferenciabilidad o a algún punto no suave en h .

Bajo estas condiciones, en principio la mera detección de un salto en la primera derivada de la salida no implica que el sistema conmute de un modo a otro.

Observación 3.9. Si h no es diferenciabilidad o presenta un punto no suave en $x(t^*)$ y no se verifica la condición (3.21) asociada al instante t^* , desde el punto de vista del algoritmo de detección y estimación de una conmutación, este punto es transparente.

Detección de una conmutación

Debe notarse que la existencia de una cota superior M sobre Y'' y una cota inferior μ sobre $|y'(t_s^+) - y'(t_s^-)|$ son fundamentales para detectar un salto en la primera derivada de la salida, por lo que a continuación se presentan condiciones suficientes que aseguran la existencia de un salto debido a una conmutación.

Dada h localmente Lipschitz continua, se define el conjunto \mathcal{X}_h como aquel conjunto donde h es diferenciable. De acuerdo con el Teorema de Rademacher (ver [11]) el conjunto \mathcal{X}_h verifica $\text{mes}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_h) = 0$ (conjunto de medida nula). Esto permite restringir la Hipótesis 3.3 al conjunto de diferenciabilidad, con lo que se introduce la siguiente Hipótesis que es una extensión directa de la Hipótesis 3.3 sobre el conjunto \mathcal{X}_h .

Hipótesis 3.5. (Detectabilidad de conmutación) Existe $\mu > 0$ tal que para cualquier par $q, q^* \in \mathcal{Q}$ con $q \neq q^*$

$$\left| L_{f_q} h(x) - L_{f_{q^*}} h(x) \right| \geq \mu \quad \forall x \in \mathcal{X}_h \quad (3.22)$$

Hipótesis 3.6. También se supondrá que se cumple lo siguiente:

- $\nabla h : \mathcal{X}_h \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz continua y diferenciable, en \mathcal{X}_h .
- existe $M_h > 0$ tal que $\|J_{\nabla h}(x)\| \leq M_h$ para todo $x \in \mathcal{X}_h$
- para cada $q \in \mathcal{Q}$, f_q es diferenciable en \mathcal{X}_h y existe un $M_f > 0$ tal que $\|\nabla f_q(x)\| \leq M_f$ para todo $x \in \mathcal{X}_h$.

Observación 3.10. De la Hipótesis 3.6 y dado que \mathcal{X} es un conjunto compacto, existe $M > 0$ tal que $|Y''(t)| < M$ para todo t . De ser necesario esta última Hipótesis puede modificarse proponiendo una mayor regularidad en h y los campos f_q .

Observación 3.11. Las Hipótesis 3.5 y 3.6 aseguran el marco de trabajo necesario para que (3.12) se verifique y se mantenga el criterio de detección de un salto en la primera derivada de y dado por (3.13).

Como se mencionó previamente, para estos sistemas donde la salida verifica que es Lipschitz continua, dado el instante de tiempo t_s en el que verifica que $x(t_s) \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_h$, un salto en y' a tiempo t_s no necesariamente se debe a una conmutación en el sistema. Dado este comportamiento, el instante de tiempo dado por (3.13) no necesariamente está asociado a una conmutación. Por lo tanto, para los sistemas Lipschitz continuos distinguimos entre un *salto* y una *conmutación*. El primero hace referencia a un salto en y' el cual se detecta por medio de (3.12) con (3.13) como estimación del tiempo en donde ocurre este salto.

Para evitar la detección de una *falsa conmutación*, a cada instante de tiempo dado por (3.13) (posible instante de conmutación) se lo somete a un test de validación que contempla la característica de h y permite discriminar si es un salto debido a una conmutación en el sistema.

Definición 3.6 (Estimación del tiempo de conmutación para sistemas con salidas Lipschitz continuas). Sea \hat{t}_s dado por (3.13) el instante de tiempo estimado asociado a la detección de un salto y sea $i^* \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{t}_s \in I_{i^*}$ (por lo que $I_s = I_{i^*}$), si

$$h^{-1}(y([t_{i^*}; t_{i^*+1}])) \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_h) \neq \emptyset, \quad (3.23)$$

el salto es ignorado, caso contrario \hat{t}_s se establece como la estimación del instante de conmutación, lo cual valida una conmutación en el sistema.

Dado que es necesario implementar numéricamente este criterio de validación, a continuación se presenta una versión de (3.24) que instrumenta esta validación en base a lo desarrollado en la Sección 3.2.

Observación 3.12. Sea \hat{t}_s como en la Definición 3.6. Sea la secuencia de instantes de tiempos $\{t_{\zeta_k}\}_{k=1}^N$ asociada a la ventana de tiempo I_{i^*} donde para $t_{\zeta_{k^*}} \in \{t_{\zeta_k}\}_{k=1}^N$ se verifica que $t_{\zeta_{k^*}} \leq \hat{t}_s \leq t_{\zeta_{k^*+1}}$, si

$$(h^{-1}(y(t_{\zeta_{k^*}})) \cup h^{-1}(y(t_{\zeta_{k^*+1}}))) \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_h) \neq \emptyset, \quad (3.24)$$

el salto es ignorado, caso contrario \hat{t}_s se establece como la estimación del instante de conmutación, lo cual valida una conmutación en el sistema.

3.5.2. Detección de una conmutación para sistema de múltiples salidas.

En este apartado se extiende la estrategia a sistemas de múltiples salidas de forma que se tiene $y = h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x)) \in \mathbb{R}^p$. La idea general se basa en extender lo desarrollado en la Sección 3.3 teniendo en cuenta el conjunto de diferenciabilidad asociado a h y sus características. Por lo tanto, dado que cada componente h_i del mapa de salida h es Lipschitz continua, cada una de ellas es diferenciable en el conjunto \mathcal{X}_{h_i} y por lo tanto $\text{mes}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_{h_i}) = 0$ (conjunto de medida nula). Dados estos conjuntos, se define $\mathcal{X}_h = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{X}_{h_i}$ como el conjunto donde h es diferenciable, el cual verifica que $\text{mes}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_h) = 0$.

La Hipótesis siguiente es una extensión directa de las Hipótesis 3.5 y 3.4 para sistema de múltiples salidas Lipschitz continuas.

Hipótesis 3.7. (Detectabilidad de modo para sistemas de múltiples salidas Lipschitz continuas) Existe un número $\mu > 0$ tal que para cualquier par $q, q^* \in \mathcal{Q}$ con $q \neq q^*$

$$\left\| L_{f_q} h(x) - L_{f_{q^*}} h(x) \right\| \geq \mu \quad \forall x \in \mathcal{X}_h. \quad (3.25)$$

También se supone que la Hipótesis 3.6 se verifica para cada h_i .

Observación 3.13. En busca de una generalización, la Hipótesis 3.7 abarca lo establecido por las Hipótesis 3.3, 3.4 y 3.5, donde se reemplaza \mathcal{X} por \mathcal{X}_h según sea el caso, sin pérdida de generalidad para $p \geq 1$.

Para detectar una conmutación en los sistemas Lipschitz continuos de múltiples salidas, se procede de manera similar a lo desarrollado en la Sección 3.3, donde se diseñan p detectores de salto similares, uno para cada una de las p salidas del sistema teniendo cuenta la característica de la función de salida.

Si ocurre un salto a tiempo $t_s \in \bar{I}_i$ y l de los p detectores, con $l < p$, proporcionan una estimación $\hat{t}_s^{k_j}$ acorde a (3.13), la estimación del instante de tiempo donde ocurre el salto, \hat{t}_s , queda establecida según (3.16). Pero la misma no necesariamente está asociada a una conmutación en el sistema. Por lo que para evitar una falsa conmutación, se debe aplicar un proceso de validación similar al implementado por (3.24) sobre \hat{t}_s .

La detección y estimación de un instante de conmutación para sistemas Lipschitz continuos de múltiples salidas en base a lo descrito y definido para estos sistemas, resulta en una extensión de la Definición 3.6 como se presenta a continuación.

Definición 3.7 (Estimación del tiempo de conmutación para sistemas Lipschitz de múltiples salidas). Sea t_s dado por (3.16) el instante de tiempo estimado asociado a la detección de un salto en $i^* \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{t}_s \in I_{i^*}$ (por lo que $I_s = I_{i^*}$), bajo estas condiciones si se verifica (3.24), el salto es ignorado, caso contrario \hat{t}_s se establece como la estimación del instante de conmutación, lo cual valida una conmutación en el sistema.

Observación 3.14. Sin pérdida de generalidad se puede establecer la Definición 3.7 como regla para detectar y estimar el instante de una conmutación sin importar la característica del sistema, ya que (3.13), (3.16) y (3.24) están contempladas por esta definición.

3.6. Ejemplo: Sistema conmutado con salida Lipschitz continua.

A continuación se presentan los resultados obtenidos de implementar vía simulación numérica, la extensión del algoritmo de detección a un sistema conmutado autónomo con salida de dimensión uno Lipschitz continua. Con el fin de ejemplificar las particularidades del algoritmo, se somete a un mismo sistema a dos señales de conmutación. En una primera instancia se analizan y presentan los resultados generales del algoritmo bajo las características que presenta un sistema Lipschitz continuo, para luego validar el comportamiento del algoritmo bajo la condición (3.24) y se detecta una falsa conmutación debido a las características de la función de salida que se propone en este ejemplo.

Al igual que en el Ejemplo 3.4, primero se validan todas las hipótesis y propiedades que debe verificar el sistema para luego diseñar los parámetros generales del algoritmo. Para ambos ejemplos se presentan los resultados que validan lo desarrollado teóricamente para ambas señales de conmutación propuestas. En base a ciertas propiedades que verifica el sistema propuesto en esta sección se hacen algunas observaciones que relajan la implementación del algoritmo.

Se considera el siguiente sistema conmutado (2.2) de \mathbb{R}^3 con los respectivos modos $\mathcal{Q} = \{1, 2, 3, 4\}$ descrito por los campos vectoriales

$$\begin{aligned}
f_1 &= \begin{pmatrix} 0,1 (x_{3,1}^2 x_{2,1}) \\ -0,1 (x_{3,1}^2 x_{1,1}) \\ x_{1,1} - x_{3,1} \end{pmatrix} ; & f_2 &= \begin{pmatrix} x_{2,2}^2 x_{3,2} \\ -x_{2,2}^3 \\ x_{1,2} - x_{3,2}^3 \end{pmatrix} \\
f_3 &= \begin{pmatrix} -x_{1,3} + x_{2,3} + 2 \\ x_{2,3}^3 \\ x_{1,3} - 3 \tanh(x_{3,3}) \end{pmatrix} ; & f_4 &= \begin{pmatrix} -x_{1,4} + 1 \\ 2 \\ x_{1,4} - 4 \sin(x_{3,4}) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

con una función de salida lineal definida por tramos según

$$h(x) = \begin{cases} 2 x_3 & \text{si } |x_3| < 0,5 \\ x_3 + 0,5 & \text{si } x_3 \geq 0,5 \\ x_3 - 0,5 & \text{si } x_3 \leq -0,5 \end{cases} \tag{3.27}$$

Observando la dinámica de la función de salida se nota que presenta puntos de no diferenciabilidad cuando $|x_3(t)| = 0,5$, lo que define el conjunto de $\mathcal{X}_h = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_3| \neq 0,5\}$.

TABLA 3.4: Detectabilidad de una conmutación asociada al sistema (3.26) - (3.27).

	$x_3 < 0$	$x_3 > 0$
$ L_{f_1} h(x) - L_{f_2} h(x) $	$2 x_3 x_3^2 - 1 $	$ x_3 x_3^2 - 1 $
$ L_{f_1} h(x) - L_{f_3} h(x) $	$2 3 \tanh(x_3) - x_3 $	$ 3 \tanh(x_3) - x_3 $
$ L_{f_1} h(x) - L_{f_4} h(x) $	$2 4 \sin(x_3) - x_3 $	$ 4 \sin(x_3) - x_3 $
$ L_{f_2} h(x) - L_{f_3} h(x) $	$2 3 \tanh(x_3) - x_3^3 $	$ 3 \tanh(x_3) - x_3^3 $
$ L_{f_2} h(x) - L_{f_4} h(x) $	$2 4 \sin(x_3) - x_3^3 $	$ 4 \sin(x_3) - x_3^3 $
$ L_{f_3} h(x) - L_{f_4} h(x) $	$2 4 \sin(x_3) - 3 \tanh(x_3) $	$ 4 \sin(x_3) - 3 \tanh(x_3) $

En cuanto a la detectabilidad de una conmutación requerida para esta estrategia, la Tabla 3.4 presenta los diversos valores de $|L_{f_q} h(x) - L_{f_{q^*}} h(x)|$, con $q, q^* \in \mathcal{Q}$, y $q \neq q^*$, que resultan nulos cuando $x_3 \in \mathcal{A}$, siendo \mathcal{A} el conjunto de *no detectabilidad*

$$\mathcal{A} = \{0, 1, 2,9847, 2,47458, 1,53941, 1,58733, -2,9847, -2,47458, -1,53941, -1,58733\}.$$

Al igual que en el ejemplo propuesto en la Sección 3.4, a priori no es posible computar la cota μ

asociada a la ecuación (3.25), lo que imposibilita la verificación de la Hipótesis 3.7. Para evitar este inconveniente, de forma similar al ejemplo planteado en la sección anterior, se recurre a un cálculo alternativo de μ , basado en la relación uno a uno entre x_3 y la función de salida $y = h(x)$, ya que $x_3 \in F(y)$ donde $F(y) := \{x \in \mathbb{R} : h(x) = y\}$.

Esta característica permite obtener una cota que se adapta en forma dinámica de la siguiente manera : para cada ventana de tiempo I_i del algoritmo de detección de conmutación se tiene

$$\mu_i = \min_{q, q^* \in \mathcal{Q}} \{|L_{f_q} h(x) - L_{f_{q^*}} h(x)|\} \mu^* \quad \text{con } x_3 \in F(y) \quad \forall t \in I_i \quad (3.28)$$

donde μ^* es un parámetro de diseño.

Por lo tanto para m fijo, la cota inferior de $|w_m(t)|$ asociada a la ventana de tiempo I_i , se define como $\omega_i = \frac{\mu_i m}{2\sqrt{2\pi}}$. Esto permite redefinir el criterio de detección (3.13) como el establecido por (3.20) con el correspondiente cálculo de μ_i para este sistema. Esto provee una mejora en términos del esfuerzo computacional asociado a la detección de una conmutación en la simulación numérica. Finalmente se adopta $\mu^* = 0,1$ para este sistema.

3.6.1. Ejemplo 1.

En este primer ejemplo se observa como el algoritmo opera de manera similar a lo desarrollado previamente, pero con la diferencia que la función de salida presenta puntos de no regularidad.

Para esta primera simulación se toma la señal de conmutación $\sigma_1(t)$ descrita por la Tabla 3.5, y donde el sistema (3.26) - (3.27) parte de la condición inicial $x_0 = (-2,9, -1,02, 0,5)$. Para los parámetros de diseño del algoritmo de detección, se toma un ancho de ventana $\Delta\tau = 0,01$ s, $m = 1 \times 10^4$ y $n = 8$.

TABLA 3.5: Dinámica de la señal de conmutación, $\sigma_1(t)$.

t_s [s]	0	1,2608	3,5225	4,6199	6,7299	9,1987
$\sigma_1(t)$	3	1	4	3	2	1

En la Figura 3.3 se presenta el valor absoluto de $w_m(t)$ dado por (3.9) junto al umbral ω asociado a la ventana de tiempo correspondiente, para dos instantes de conmutación diferentes: en la Figura 3.3 (A) en $t_s = 1,2608$ s, cuando el sistema cambia del modo $q = 3$ al modo $q = 1$ y en la Figura 3.3 (B) en $t_s = 3,5225$ s cuando el sistema cambia del modo $q = 1$ al modo $q = 4$. En estas figuras se puede observar el comportamiento dinámico de la cota.

Para una mejor comprensión del algoritmo desarrollado, en la Tabla 3.6 se resumen los resultados más relevantes asociados a la estrategia de detección para esta simulación. De la misma se puede observar la efectividad del esquema propuesto para detectar y estimar los instantes de conmutación.

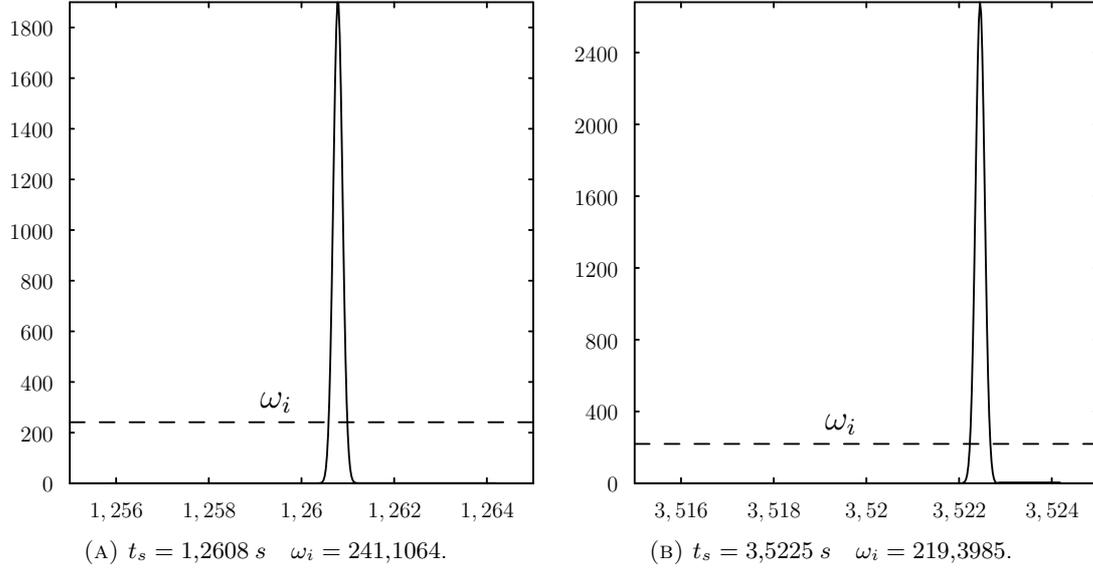


FIGURA 3.3: Detección de una conmutación. Señal $|w_m(t)|$ para diferentes instantes de conmutación asociadas al sistema (3.26)-(3.27) con señal de conmutación σ_1 .

TABLA 3.6: Resumen de los resultados de la simulación para el esquema de ventanas móviles para el sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_1 .

t_s [s]	\hat{t}_s [s]	t_{k_i} [s]	$t_{k_{i+1}}$ [s]	ω_i	$\max\{ w_m(t) \}$
1,2608	1.2606	1.255	1.265	241.1064	1899.9
3,5225	3.5223	3.515	3.525	219.3985	2680.9
4,6199	4.6198	4.615	4.625	306.6461	1271.2
6,7299	6.7297	6.725	6.735	224.5231	5539.5
9,1987	9.1984	9.19	9.2	362.0244	5722

Observación 3.15. Debe notarse que $|Y''(t)| = 0$ porque lo que no es necesario verificar que se cumpla la Hipótesis 3.6. También debe notarse que (3.12) será válida para cualquier valor de $m \in \mathbb{N}$.

3.6.2. Ejemplo 2 - Tratamiento de una falsa conmutación.

Debido a que la señal de salida presenta puntos no regulares, si los mismos no son tenidos en cuenta en la estrategia, debido al principio de diseño del algoritmo, esta pérdida de regularidad en la señal de salida es interpretada como una conmutación, ya que se manifiestan como una

discontinuidad de salto finito en la primera derivada de la señal de salida. Bajo esta condición el algoritmo detecta una *falsa conmutación*.

A continuación se presenta una variación del ejemplo previo, en el cual se muestra como el algoritmo trata el problema de detección de una falsa conmutación. Para esta simulación se utiliza la misma condición inicial y los mismos parámetros de diseño, pero se aplica la señal de conmutación $\sigma_2(t)$ descrita en la Tabla 3.7, la cual fuerza el comportamiento de una falsa conmutación.

TABLA 3.7: Dinámica de la señal de conmutación $\sigma_2(t)$.

t_s [s]	0	1,2475	2,7824	4,0017	6,965	8,98
$\sigma(t)$	1	3	4	2	1	3

La Figura 3.4 ilustra la detección de una falsa conmutación debido a la no diferenciabilidad de la señal de salida en $t_{i^*} \approx 2,3714$ s, ya que $y(t_{i^*}) = -1$. En la Figura 3.4 (A) se puede observar la evolución $y(t)$ en la ventana de tiempo $I_{i^*} = [2,365, 2,375]$, mientras que la Figura 3.4 (B) presenta el valor de $|w_m(t)|$ asociado a esta ventana de tiempo y el salto debido a la no diferenciabilidad de $y(t)$. Como se mencionó en la Sección 3.5 esta falsa conmutación debe descartarse en base al criterio (3.24). A fines prácticos y teniendo en cuenta la característica de la función de salida del sistema, resulta más directo y menos complejo en términos de cómputo, validar la conmutación según: si

$$| |y(t)| - 1 | \geq 0,001 \text{ con } t \in \text{clos}(I_s) \quad (3.29)$$

la conmutación detectada se valida como una conmutación.

Para ilustrar este criterio, en la Figura 3.4 (A) se observa de forma explícita como actúa la condición de validación (3.29), donde $y(t) \in [-1,001, -0,999] \forall t \in \text{clos}(I_s)$ y bajo esta condición el salto detectado por (3.20) no es asociado a una conmutación en el sistema. En cuanto al diseño del entorno de los puntos $y(t) = 1$ e $y(t) = -1$, el mismo está directamente relacionado con la elección de m en (3.7), ya que el diseño de este parámetro determina la varianza de la función Gaussiana δ_m y por lo tanto la definición del intervalo de tiempo $\text{clos}(I_s)$. En simulación la elección de m verifica que $0,001 \geq \frac{10}{m}$.

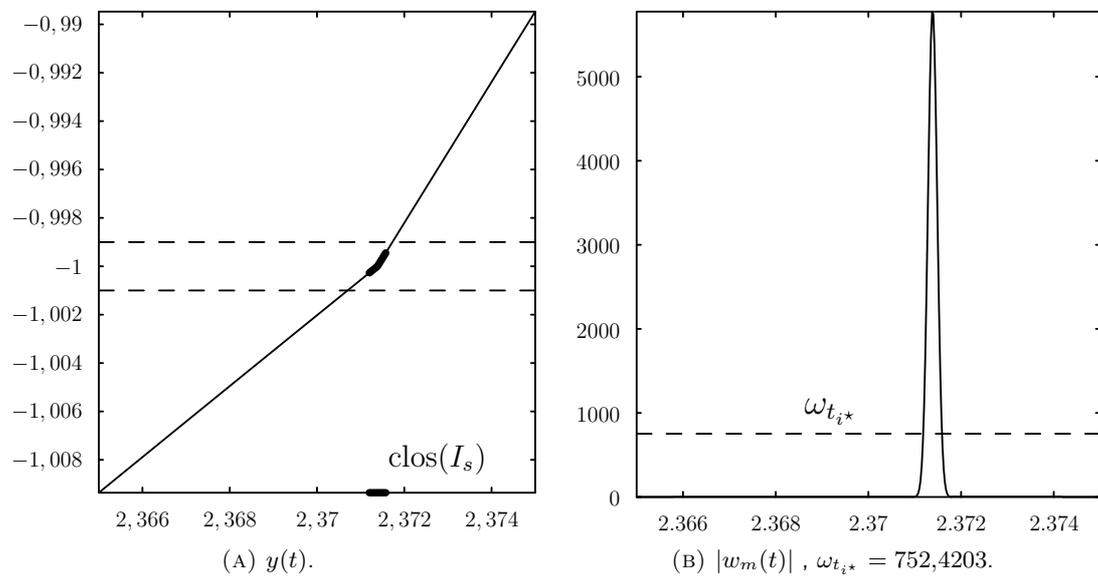


FIGURA 3.4: Ventana de tiempo asociada al el esquema de validación de un salto en t_{i^*} cuando se detecta una falsa conmutación para el sistema (3.26)-(3.27) con señal de conmutación σ_2 .

Capítulo 4

Estimación de modo y estados. Observadores con decaimiento exponencial

En el Capítulo 3 a partir de la introducción de la Hipótesis (3.3) de *detectabilidad de una conmutación* (y sus variantes desarrolladas a lo largo de dicho capítulo) se logra desacoplar el problema de *detección y estimación de un instante de conmutación* del de *determinar el modo activo y estimar los estados* asociado al sistema conmutado (2.2). A lo largo del capítulo se exponen los fundamentos que han permitido el desarrollo de un algoritmo capaz de detectar y estimar los instantes de conmutación en sistemas bajo diversas condiciones de regularidad en la señal de salida. Con el objetivo de resolver el problema de observación completo planteado en la Sección 2.4, este capítulo se centra en establecer las bases que sustentan el desarrollo de una estrategia para determinar el modo actual y los estados continuos de una clase de sistemas conmutados no lineales (2.2). Para este fin, es necesario introducir y describir los objetos dinámicos que hacen posible esta tarea, así como su diseño e interacción con el sistema conmutado. En particular se hace uso de lo que se definirá como *banco de subsistemas* y *banco de observadores*.

Básicamente un *banco de observadores* consiste en un conjunto de observadores, donde cada uno corresponde a un subsistema que compone el sistema conmutado. La utilización de un banco de observadores es una estrategia recurrente en la problemática de estimación de estados y la determinación del modo, en el marco de los sistemas conmutados. En el contexto de sistemas conmutados lineales, se pueden mencionar trabajos como los de [17], [14],[13],[21], entre otros, donde se utilizan diversas clases de observadores para conformar el *banco de observadores*. Con respecto a los sistemas conmutados no lineales los trabajos [3] y [35] también emplean el concepto de banco de observadores para abordar la problemática de la estimación de modo y estado. Sin embargo, las condiciones de diseño impuestas, así como las condiciones que debe verificar el

sistema en estos trabajos, resultan muy restrictivas, lo que limita el conjunto de sistemas a los que se puede extender estas estrategias. Además, la determinación del modo depende del tipo de banco de observadores implementado y de la dinámica impuesta para los mismos.

En relación a la estrategia desarrollada en este capítulo, la inclusión de un *banco de subsistemas* dentro de la estrategia permite flexibilizar la tarea de selección del modo activo, evitando que dicha selección esté exclusivamente vinculada a la dinámica del *banco de observadores*. De forma general la estrategia para la estimación de los estados y el modo del sistema conmutado (2.2), consiste en los siguientes pasos:

- (a) diseñar un observador para cada modo f_q , y dejarlos a evolucionar en forma simultánea, (*banco de observadores*);
- (b) dejar que un subconjunto de subsistemas (f_q, h) se ejecute en algunos momentos específicos (*banco de subsistemas*);
- (c) estimar el modo actual del sistema;
- (d) tomar los estados estimados proporcionados por el observador correspondiente al modo establecido en el inciso (c) como los estados estimados del sistema conmutado.

Uno de los requisitos fundamentales para este esquema de estimación implica la existencia y el diseño de un observador para cada subsistema que compone el sistema conmutado (2.2). Dado que el diseño y la síntesis de un observador para un sistema no lineal dependen en gran medida de su descripción y características particulares, en este capítulo se propone una estructura genérica que los observadores que forman el banco de observadores deben cumplir.

Bajo estas características estructurales, el observador debe asegurar que la norma del error de salida presente un decaimiento exponencial controlado. Aunque esta descripción impone restricciones, ya que no todos los sistemas no lineales admiten un observador con estas características, en principio, permite que la estrategia de estimación de modos y estados sea independiente del tipo de observador implementado, siempre y cuando este último cumpla con este tipo de decaimiento en el error de estimación de salida.

Por lo que a partir de lo desarrollado en este capítulo y en conjunto con las estrategias desarrolladas en el Capítulo 3, se presenta un algoritmo que articula estas tareas, ofreciendo así una solución integral al problema de observación planteado en la Sección 2.4 para una cierta clase de sistemas conmutados (2.2). Al final de este capítulo se presenta un ejemplo donde se muestra vía simulación numérica la estrategia completa de observación mediante la ejecución del algoritmo

aquí desarrollado.

4.1. Banco de observadores y subsistemas.

Como se mencionó anteriormente, la estrategia de estimación de estados y modos desarrollada en este capítulo se basa en los conceptos de *banco de observadores* (*bank of observers*) y *banco de subsistemas* (*bank of subsystems*) y en cómo interactúan eventualmente entre sí para lograr el objetivo de estimación propuesto. En esta sección se definen y se presentan formalmente estos sistemas dinámicos, junto a las condiciones de diseño requeridas para cumplir con el objetivo de estimación. Estas condiciones de diseño están asociadas a la naturaleza híbrida inherente a los sistemas conmutados.

4.1.1. Banco de observadores

Definición 4.1. Dado un observador para cada subsistema que compone al sistema conmutado descrito por (2.2), se define un *banco de observadores* asociado al sistema conmutado como, un sistema dinámico compuesto por cada uno de estos observadores.

Dado que los subsistemas que componen los sistemas conmutados a tratar en esta tesis responden a dinámicas no lineales, es necesario, en primera instancia, abordar la problemática de observación en sistemas no lineales.

En la literatura existen diversos observadores, basado en diferentes técnicas, que abordan y dan solución al problema de estimar los estados de un sistema dinámico no lineal ([2], [7], [9], y [32]). Dado un sistema no lineal, la condición de observabilidad local (ver por ejemplo [19] para más detalles y definiciones precisas) no garantiza la existencia o síntesis de un observador, a diferencia de lo que sucede con los sistemas lineales. Según la técnica seleccionada para el diseño del observador, el sistema no lineal debe cumplir condiciones adicionales (ver, por ejemplo, [7], [22]).

Para lograr cierta generalización y en base a la literatura existente sobre el diseño de observadores para sistemas no lineales, se considera una estructura general para los observadores del banco de observadores, y se asume que se cumplen los requisitos que esta estructura impone sobre sistema (2.2).

Hipótesis 4.1. Dado el sistema (2.2), es posible diseñar para cada subsistema (f_q, h) con $q \in \mathcal{Q}$,

un observador cuya dinámica viene dada por

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_q &= f_q(\hat{x}_q) - G_q(\hat{x}_q)K(\theta) [h(\hat{x}_q) - \mathcal{Y}(t, t_0, x_0, q)] \\ \hat{y}_q &= h(\hat{x}_q) \end{cases} \quad (4.1)$$

que verifica que para todo $\theta > 0$

$$\|\hat{x}_q(t) - \phi_q(t, t_0, x_0)\| \leq \tilde{G}_q k(\theta) e^{-\theta(t-t_0)} \|\hat{x}_q(t_0) - x_0\| \quad \forall t \geq t_0, \quad (4.2)$$

donde,

- (a) $G_q : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ es un mapa de al menos clase \mathcal{C}^1 ,
- (b) $K : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$ continua,
- (c) $k(\theta)e^{-\theta t} > 0$, no depende de q y para cada t es estrictamente decreciente con respecto a θ ,
- (d) \tilde{G}_q es una cota asociada a $G_q(\hat{x}_q)$.

La Hipótesis 4.1 establece la estructura general que deben cumplir los observadores que componen el banco de observadores. Esto limita el alcance de la estrategia desarrollada en este capítulo ya que no todo (f_q, h) asociado a (2.2) admite un observador de estas características. Esto se debe a que este tipo de observadores (con error de estimación exponencialmente decreciente) exige una cierta regularidad en el mapa de salida $\mathcal{O}_q = \{h_1, L_{f_q} h_1, \dots, L_{f_q}^n h_p\}$, sin embargo existe una gran cantidad de sistemas que verifican estas hipótesis.

La característica impuesta en el inciso (c), que exige un decaimiento exponencial con respecto a θ para un t fijo, está particularmente relacionada con la forma en que se diseña o se selecciona la dinámica del observador, generalmente asociada a algún criterio de optimización. Por ejemplo, en [22], se logra mediante la resolución de la ecuación de Riccati, mientras que en [8], se utiliza una función de Lyapunov apropiada que cumple con esta dinámica. Esta característica exigida en los observadores que conforman el banco de observadores es de gran importancia dentro del esquema que se desarrolla a continuación para la estimación de estados y modo.

Observación 4.1. En la mayoría de los observadores presentes en la literatura, G_q se relaciona con la matriz de observabilidad $d\mathcal{O}_q$. Debido a que en $d\mathcal{O}_q$ intervienen las derivadas de Lie h con

respecto a f_q y \mathcal{X} es un conjunto compacto, es posible obtener \tilde{G}_q como:

$$\overline{\sigma}_q = \max_{\hat{x}_q \in \mathcal{X}} \overline{\sigma}(G_q(\hat{x}_q)), \quad \underline{\sigma}_q = \min_{\hat{x}_q \in \mathcal{X}} \underline{\sigma}(G_q(\hat{x}_q)), \quad \tilde{G}_q = \frac{\overline{\sigma}_q}{\underline{\sigma}_q} \quad (4.3)$$

En lo que sigue, se asume que (4.3) se verifica para el observador de la Hipótesis. 4.1

Lema 4.1. Dado un observador para cada subsistema que compone el sistema conmutado (2.2) cuya dinámica viene dada por (4.1), para cada $q \in \mathcal{Q}$, existe un $\theta = \theta^*$ (el mismo para todos los observadores) tal que, se verifica que:

$$\|h(\hat{x}_q(t)) - h(\phi_q(t, x_0))\| \leq M \quad \forall t \geq t_e \quad (4.4)$$

con $M > 0$ y $t_e > 0$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, sea $t_0 = 0$ y para simplificar la notación se denota, $\phi_q(t, 0, \cdot) = \phi_q(t, \cdot)$, para $q \in \mathcal{Q}$.

A su vez se denota $\hat{x}_q(0) \in \mathcal{X}$ a la condición inicial del observador asociada al modo q con $q \in \mathcal{Q}$. A partir de (4.2) se tiene que el error de estimación verifica

$$\|\hat{x}_q(t) - \phi_q(t, x_0)\| \leq \tilde{G}_q k(\theta) e^{-\theta t} \|\hat{x}_q(0) - x_0\|; \quad \forall t \geq 0. \quad (4.5)$$

Se define la cota superior del error de estimación del estado inicial del observador asociado al modo q como:

$$\gamma_q = \max_{\bar{x} \in \partial \mathcal{X}} \{\|\hat{x}_q(0) - \bar{x}\|\}, \quad (4.6)$$

lo que permite definir a su vez las constantes

$$\tilde{G} = \max_{q \in \mathcal{Q}} \tilde{G}_q \quad \alpha = \max_{\xi \in \mathcal{X}} \left\| \frac{\partial h}{\partial x}(\xi) \right\| \quad y \quad \gamma = \max_{q \in \mathcal{Q}} \{\gamma_q\}. \quad (4.7)$$

Entonces para todo $t \geq 0$ y de la ecuación (4.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \|h(\hat{x}_q(t)) - h(\phi_q(t, x_0))\| &\leq \alpha \|\hat{x}_q(t) - \phi_q(t, x_0)\| \leq \alpha \tilde{G}_q k(\theta) e^{-\theta t} \|\hat{x}_q(0) - x_0\| \\ &\leq \alpha \tilde{G}_q \gamma_q k(\theta) e^{-\theta t} \leq \alpha \tilde{G} \gamma k(\theta) e^{-\theta t}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ya que $k(\theta)e^{-\theta t_e}$ es estrictamente decreciente con respecto a θ , entonces existe un θ^* tal que

$$k(\theta^*)e^{-\theta^* t_e} \leq \frac{M}{\alpha \tilde{G} \gamma}. \quad (4.9)$$

Sea $\theta = \theta^*$. De (4.8) se verifica que para todo $t \geq t_e$

$$\begin{aligned} \|h(\hat{x}_q(t)) - h(\phi_q(t, x_0))\| &\leq \alpha \tilde{G} \gamma k(\theta^*) e^{-\theta^* t} = \alpha \tilde{G} \gamma k(\theta^*) e^{-\theta^* t_e} e^{-\theta^*(t-t_e)} \\ &\leq \alpha \tilde{G} \gamma k(\theta^*) e^{-\theta^* t_e} \leq M \end{aligned}$$

y el lema queda demostrado. □

Observación 4.2. El Lema 4.1, establece una condición de diseño que tiene en cuenta la característica híbrida del sistema: se impone que $t_e \ll \tau_D/2$. Este requerimiento puede ser más o menos conservativo dependiendo de los objetivos de performance requeridos, pero el mismo asegura que antes de que ocurra una nueva conmutación, el error de observación se encuentra dentro de una banda establecida/conocida. Esta característica resulta primordial en el criterio desarrollado para la estimación del modo.

Observación 4.3. En principio, no hay restricciones teóricas en cuanto al valor que pueda tomar el θ^* establecido por el Lema 4.1. Sin embargo, este impone condiciones en el ancho de banda necesarias para cumplir con la dinámica impuesta a los observadores. Desde el punto de vista de la implementación numérica, esto puede resultar en un costo computacional elevado a medida que aumentan los valores de θ^* . Con el fin de tener un mayor control en la implementación y reducir el costo computacional asociado, se propone una variación en la aplicación del Lema 4.1: se establece un $\bar{\theta}^* > 0$, a partir del cual $\theta^* = \bar{\theta}^*$ y M se determina según (4.9), con γ definido por (4.6)-(4.7). Aquí, $\bar{\theta}^*$ se elige de tal manera que cumpla con la Observación 4.2

Estas últimas dos observaciones aplicadas al diseño del banco de observadores conforman la base del algoritmo de la estrategia desarrollada ya que el análisis de $\|h(\hat{x}_q) - y(t)\|$ permite obtener información de cualitativa y cuantitativa de los estados y modo del sistema conmutado (2.2).

Al conformar un banco de observadores según la Hipótesis (4.1) y considerar las Observaciones 4.3 y 4.2 asociadas al Lema 4.1, dado que todos los observadores tienen la misma dinámica de decaimiento bajo la misma entrada $y(t)$, se garantiza que, transcurrido un lapso de tiempo t_e , al menos uno de los observadores, correspondiente al modo activo del sistema, verifica que su error de salida se encuentra por debajo de la cota M . Esto permite, descartar aquellos modos que no verifican esta condición y, al mismo tiempo, dado que $t_e \leq \tau_D$, el error de estimación

proporcionado por los observadores que cumplen con la condición es representativo de cada posible modo, ya que no ocurre ninguna conmutación durante este lapso de tiempo.

4.1.2. Banco de subsistemas y estimación de estados y modos.

Definición 4.2. Se define el *banco de subsistemas* como un sistema dinámico que está conformado por (algunos de) los subsistemas que componen (2.2), cuya dinámica queda establecida según:

$$\begin{cases} \dot{x}_q = f_q(x_q) \\ y_q = h(x_q) \end{cases} \quad \forall q \in \tilde{\mathcal{Q}} \quad (4.10)$$

donde $f_q \in \mathcal{P}$ y $\tilde{\mathcal{Q}} \subseteq \mathcal{Q}$.

Cabe resaltar que la dinámica del banco de subsistemas no siempre está compuesta por la de todos los subsistemas que conforman el sistema conmutado.

Definido todos los elementos que intervienen en la estrategia, el algoritmo diseñado para estimar el modo del sistema, \hat{q} , consta de los siguientes pasos generales:

- a) comparar los errores de salida entre, la salida de cada observador del banco de observadores y la del sistema: $e_{y_q}(t) = \hat{y}_q(t) - y(t)$, y
- b) comparar los errores de estado entre los estados de cada subsistema del banco de subsistemas y el del correspondiente observador: $e_{x_q}(t) = \hat{x}_q(t) - x_q(t)$.

La incorporación del banco de subsistemas como objeto dinámico dentro de la estrategia desarrollada, como verá más adelante, cumple con el rol de dar soporte al banco de observadores cuando este no es capaz de determinar el modo del sistema. La característica fundamental que permite llevar a cabo esta tarea se desarrolla en el Apéndice A, por lo que es instrumental para la comprensión del algoritmo desarrollado. La idea general de como un banco de subsistema, a partir de un banco de observadores, es capaz de determinar el modo del sistema conmutado se presenta en la Figura A.1. El principio de funcionamiento consiste en que si el sistema está evolucionando bajo el modo q^* y se tiene un banco de observadores y subsistemas compuestos por las dinámicas correspondientes a q y q^* , si el par observador-subsistema comparten la misma condición inicial, es decir $\hat{x}_q(0) = x_q(0)$ y $\hat{x}_{q^*}(0) = x_{q^*}(0)$, se verifica que $\|e_{x_{q^*}}(t)\| < \|e_{x_q}(t)\|$ para $t > t_1$. La trayectoria del subsistema correcto se mantiene lo suficientemente cerca de la trayectoria que genera el observador correspondiente al mismo modo en comparación al los otros posibles modos.

En base a la Hipótesis 4.1 y lo mencionado en la Observación 4.1 para la estrategia de estimación desarrollada en este capítulo, la estimación de \hat{t}_s se lleva a cabo por medio de (3.13) o (3.16) y denotamos se denota $\{t_k\}, k \in \mathbb{N}$ a la secuencia de instantes de tiempos en los que se pone en ejecución un banco de observadores.

En particular, un banco de observadores se pone en ejecución bajo dos circunstancias posibles

i) a instante inicial, por lo que $k = 1$ y $t_1 = 0$ s,

ii) en el instante t_{i+1} cuando se detecta una conmutación para $\hat{t}_s \in I_i = [t_i; t_{i+1}]$ donde $k > 1$.

Observación 4.4. En base a la Hipótesis 4.1 y lo mencionado en la Observación 4.1 se requiere una cierta regularidad en la función de salida, por lo que la estimación de \hat{t}_s se lleva a cabo por medio de (3.13) o (3.16).

4.2. Algoritmo de estimación de estados y modos.

El algoritmo para la estimación de modo y estado procede de la siguiente manera: para cada paso $k \in \mathbb{N}$ del algoritmo, se definen $\Gamma_k \subset \mathcal{Q}$, M_k y t_k como se describe a continuación.

l) A tiempo t_k el banco de observadores se inicializa con la misma condición inicial $\hat{x}_q(t_k) = x^*$ para todo $q \in \Gamma_k$ y, de acuerdo a (4.1), se tiene para cada observador una estimación de estados $\hat{x}_q(t)$ junto a una estimación de la señal de salida $\hat{y}_q(t)$.

Para el intervalo $[t_k, t_k + t_e]$, cada modo del banco de observadores genera una trayectoria de salida distinta, donde al menos una de las normas del error de salida $\|e_{y_q}(t_k + t_e)\|$ (la que corresponde al modo activo), estará por debajo de la cota superior M_k establecida por el Lema 4.1.

Como $t_e \ll \tau_D$, en el intervalo $[t_k, t_k + t_e]$ el sistema evoluciona en el modo $\sigma(t_k) = q_k$ el cual es desconocido, con lo que se tiene que los e_{y_q} son representativos de cada subsistema.

El conjunto $\Gamma_k \subset \mathcal{Q}$ de los posibles modos activos se redefine como:

$$\Gamma_k = \{q \in \Gamma_k \text{ tal que } \|e_{\hat{y}_q}(t_k + t_e)\| < M_k\} \quad (4.11)$$

a) Si al redefinir el conjunto Γ_k , resulta que $\Gamma_k = \{q^*\}$, entonces se toma $\hat{q}_k = q^*$ y los estados estimados de (2.2) se establecen como $\hat{x}(t) = \hat{x}_{\hat{q}_k}(t)$ para todo $t \in [t_k + t_e, t_{k+1})$.

- b) Si al redefinir el conjunto Γ_k el mismo tiene más de un elemento (cardinal de conjunto mayor a 1), se establece un banco de subsistemas como se definió en (4.10) donde se toma a Γ_k en reemplazo de \mathcal{Q} . Se lo deja evolucionar por un periodo de tiempo $[t_k + t_e, t_k + t_e + \Delta t]$ (con Δt dado por el Lema A.1 en el Apéndice A), con condición inicial $x_q(t_k + t_e) = \hat{x}_q(t_k + t_e)$ para cada subsistema $q \in \Gamma_k$.

Si se satisface la condición del Lema A.1 presente en el Apéndice, la estimación del modo se establece de acuerdo al criterio

$$\hat{q}_k = \underset{q \in \Gamma_k}{\operatorname{argmin}} \| e_{x_q}(t_k + t_e + \Delta t) \| \quad (4.12)$$

y los estados estimados del sistema conmutado (2.2) se establecen como $\hat{x}(t) = \hat{x}_{\hat{q}}(t)$ para todo $t \in [t_k + t_e + \Delta t, t_{k+1})$.

- II) cuando una nueva conmutación a tiempo t_s es detectada por medio de (3.13) o (3.16) con $\hat{t}_s \in I_i$, el algoritmo procede como se describe a continuación:

- a) $k \rightarrow k + 1$ y se toma $t_{k+1} = t_{i+1}$,
- b) los estados estimados de (2.2) se toman como $\hat{x}(t) = \hat{x}(t_{k+1})$ para el intervalo $t \in [t_{k+1}, t_{k+1} + t_e)$ y eventualmente para $t \in [t_{k+1}, t_{k+1} + t_e + \Delta t)$ y
- c) ya que para el instante de tiempo t_{k+1} se cuenta con \hat{q}_k como estimación del modo del sistema, entonces Γ_{k+1} se define como $\Gamma_{k+1} = \mathcal{Q} \setminus \{\hat{q}_k\}$.
- d) Se redefine el banco de observadores de acuerdo al nuevo conjunto Γ_{k+1} ,
- e) los estados se inicializan tomando $x^* = \hat{x}(t_{k+1})$ y
- f) M_{k+1} queda establecida según lo establecido en la Observación 4.3 tomando x^* en vez de $\hat{x}_q(0)$. Nótese que en este caso $\gamma_q = \gamma$ para todo $q \in \Gamma_{k+1}$.

Observación 4.5. A instante inicial, el algoritmo procede como se describe a continuación: sea el sistema y el algoritmo inicializados en $t = 0$. Se toma $t_1 = 0$, $\Gamma_1 = \mathcal{Q}$, $x^* \in \mathcal{X}$ arbitrario y M_1 como en el Lema 4.1, donde γ viene dado por (4.6)-(4.7) con x^* en reemplazo de $\hat{x}_q(0)$.

Si el modo conmuta en el instante t_s y se cumple que $\hat{t}_s < t_e$, o $\hat{t}_s < t_e + \Delta t$ bajo la situación descrita en Ib), se toma $t_1 = \hat{t}_s$, y x^* y Γ_1 como se indicó previamente.

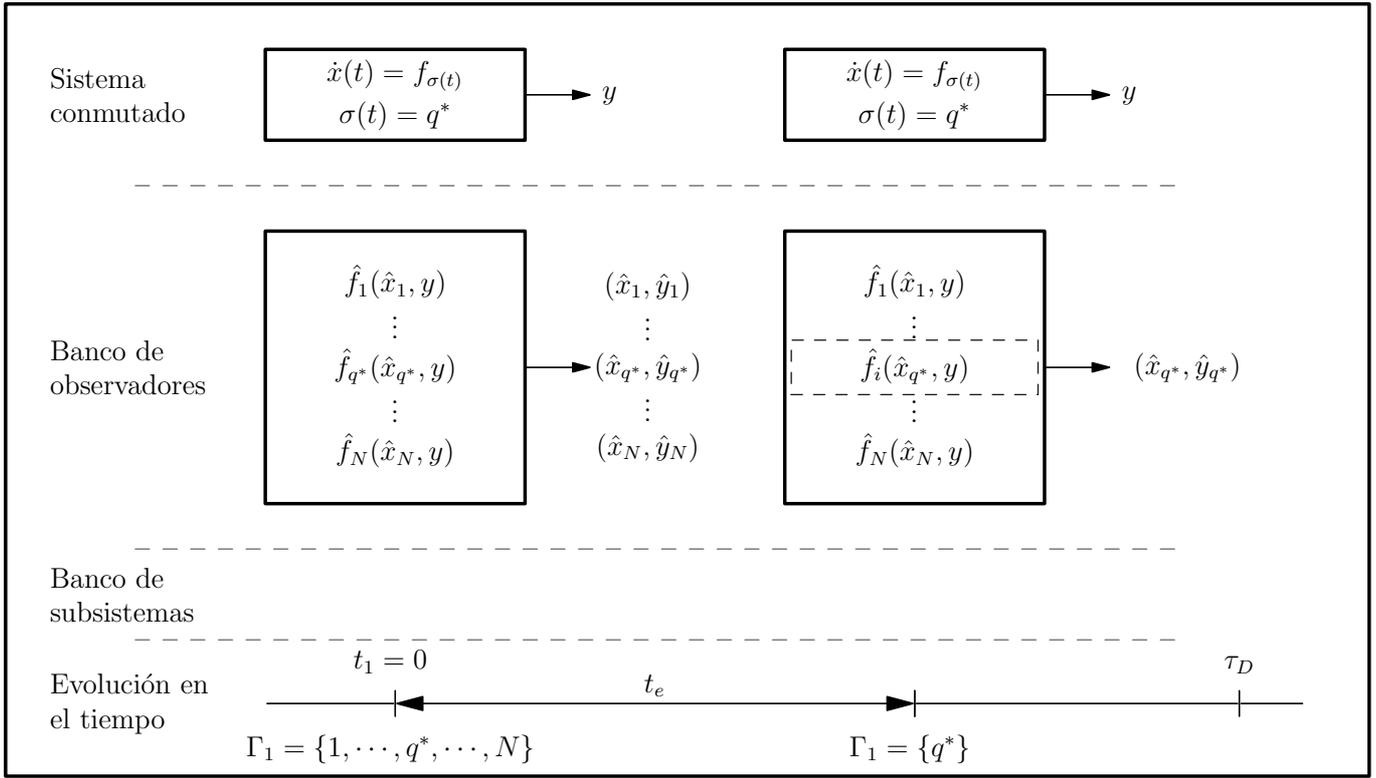
4.2.1. Diagramas esquemáticos

Para facilitar la comprensión del principio de funcionamiento del algoritmo y como evolucionan e interactúan entre si los diversos elementos involucrados en el proceso de estimación de estados y en la determinación del modo actual del sistema, en las Figuras 4.1 y 4.2 se presenta un esquema simplificado de como opera el algoritmo a instante inicial ($t = 0s$) y cuando se detecta una conmutación a instante \hat{t}_s , para un sistema conmutado compuesto por N subsistemas.

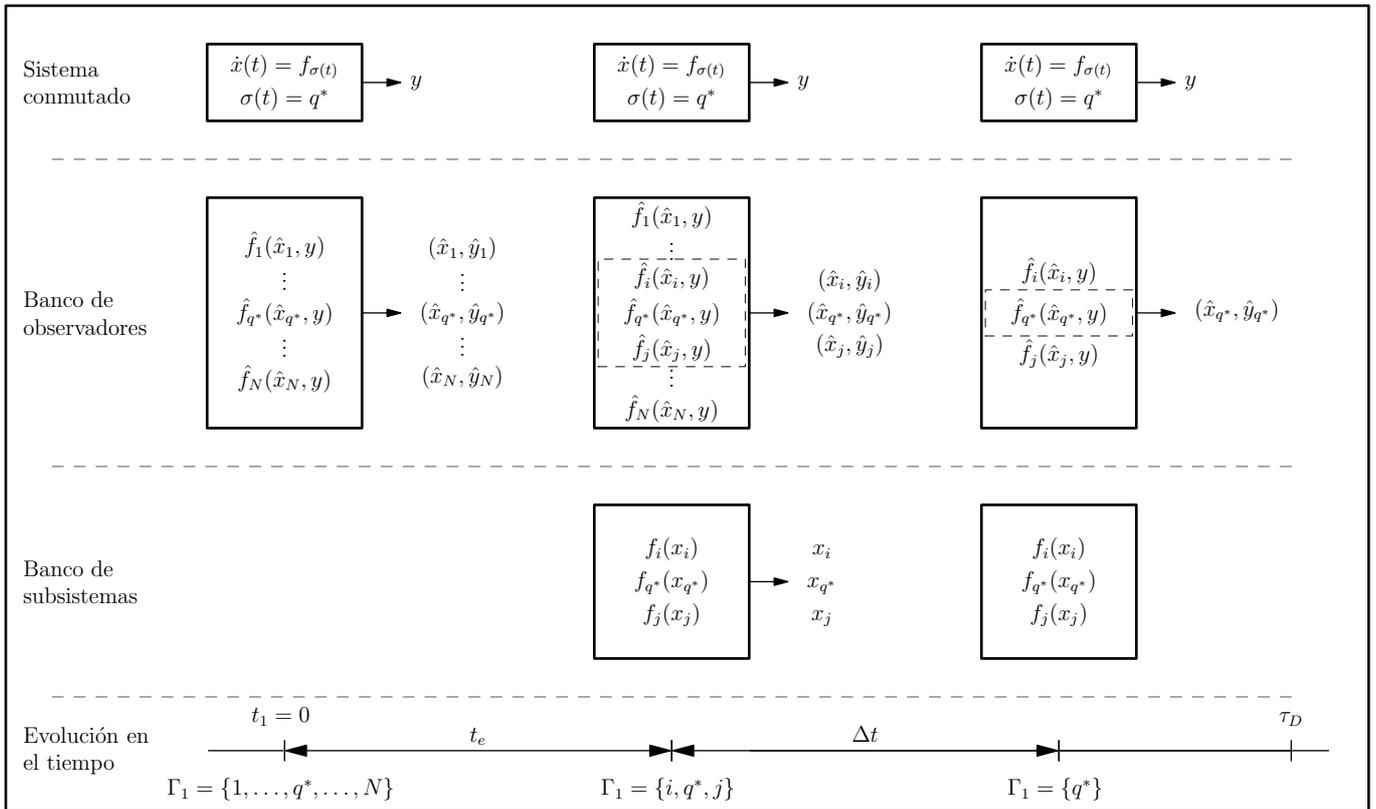
1 - La Figura 4.1 presenta la evolución del algoritmo a instante inicial, en el ejemplo el modo actual del sistema es q^* , por lo que los estados $x(t)$ evolucionan conforme a la dinámica establecida por f_{q^*} . Como no se posee información previa de modo, el banco de observadores queda conformado por los N observadores en donde al cabo de un tiempo t_e se determina Γ_1 a partir de (4.11). En el esquema (A), del banco de observadores solo se cumple $\|e_{y_{q^*}}(t_e)\| < M_1$ por lo que $\Gamma_1 = \{q^*\}$. A partir de este instante el modo queda determinado como $\hat{q}_0 = q^*$ y los estados estimados $\hat{x}(t) = \hat{x}_{q^*}(t)$. En el esquema (B) del banco de observadores se verifican $\|e_{y_i}(t_e)\| < M_1$, $\|e_{y_{q^*}}(t_e)\| < M_1$ y $\|e_{y_j}(t_e)\| < M_1$, por lo que $\Gamma_1 = \{i, q^*, j\}$. A partir de este instante se establece un banco de subsistemas como se definió en (4.10), en este ejemplo conformado por los subsistemas f_i, f_{q^*} y f_j con condición inicial asociada a la estima que proporciona su correspondiente observador $\hat{x}_i(t_e)$, $\hat{x}_{q^*}(t_e)$ y $\hat{x}_j(t_e)$. Transcurrido un tiempo Δt , según lo establecido por el Lema A.1, en el instante $t_e + \Delta t$, $\|\hat{x}_{q^*} - x_{q^*}\| < \|\hat{x}_i - x_i\|$ y $\|\hat{x}_{q^*} - x_{q^*}\| < \|\hat{x}_j - x_j\|$. Por lo que la estimación del modo viene dada por (4.12), en este ejemplo $\hat{q}_0 = q^*$ y $\hat{x} = \hat{x}_{q^*}$.

2 - La Figura 4.2 describe la evolución del algoritmo cuando el sistema experimenta una conmutación. El sistema está evolucionando bajo la dinámica impuesta por f_{q^*} y los estados estimados por su correspondiente observador $\hat{x}(t) = \hat{x}_{q^*}$. A instante t_s el sistema conmuta del modo q^* al j , y por medio de (3.13) o (3.16) se obtiene $\hat{t}_s \in I_{i^*}$ donde a instante $t_{k+1} = t_{i+1}$: (i) se reconfigura el banco de observadores a partir de todos los posibles modos menos el asociado a q^* , (ii) se calcula M_{k+1} tomando $\hat{x}_{q^*}(t_{k+1})$ como condición inicial. Al cabo de un tiempo t_e se determina Γ_{k+1} por medio de (4.11). En el esquema (A), del banco de observadores solo se cumple $\|e_{y_i}(t_{k+1} + t_e)\| < M_{k+1}$ por lo que $\Gamma_{k+1} = \{i\}$. A partir del instante $t_{k+1} + t_e$ el modo queda determinado como $\hat{q}_k = i$ y los estados estimados $\hat{x}(t) = \hat{x}_i(t)$. En el esquema (B), del banco de observadores se verifican $\|e_{y_i}(t_{k+1} + t_e)\| < M_{k+1}$ y $\|e_{y_j}(t_{k+1} + t_e)\| < M_{k+1}$, por lo que $\Gamma_{k+1} = \{i, j\}$. A partir de este instante se establece un banco de subsistemas como se definió en (4.10), en este ejemplo conformado por los subsistemas f_i y f_j con condición inicial

asociada a la estima que proporciona su correspondiente observador $\hat{x}_i(t_{k+1} + t_e)$ y $\hat{x}_j(t_{k+1} + t_e)$. Transcurrido un tiempo Δt , según lo establecido por el Lema [A.1](#), en el instante $t_{k+1} + t_e + \Delta t$, $\|\hat{x}_j - x_j\| < \|\hat{x}_i - x_i\|$. Por lo que la estimación del modo viene dada por [\(4.12\)](#), en este ejemplo $\hat{q}_{k+1} = i$ y $\hat{x} = \hat{x}_i$.

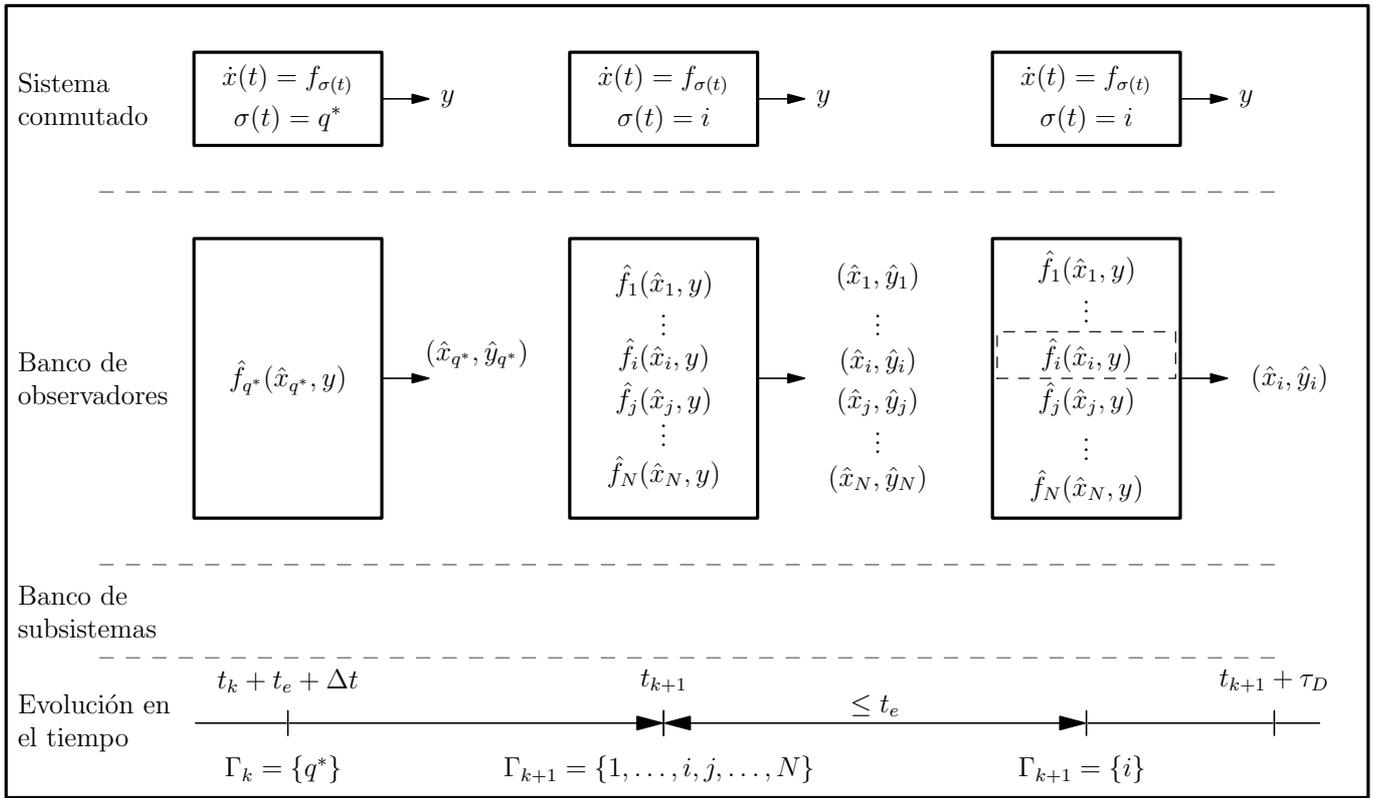


(A) Sin acción del banco de subsistemas.

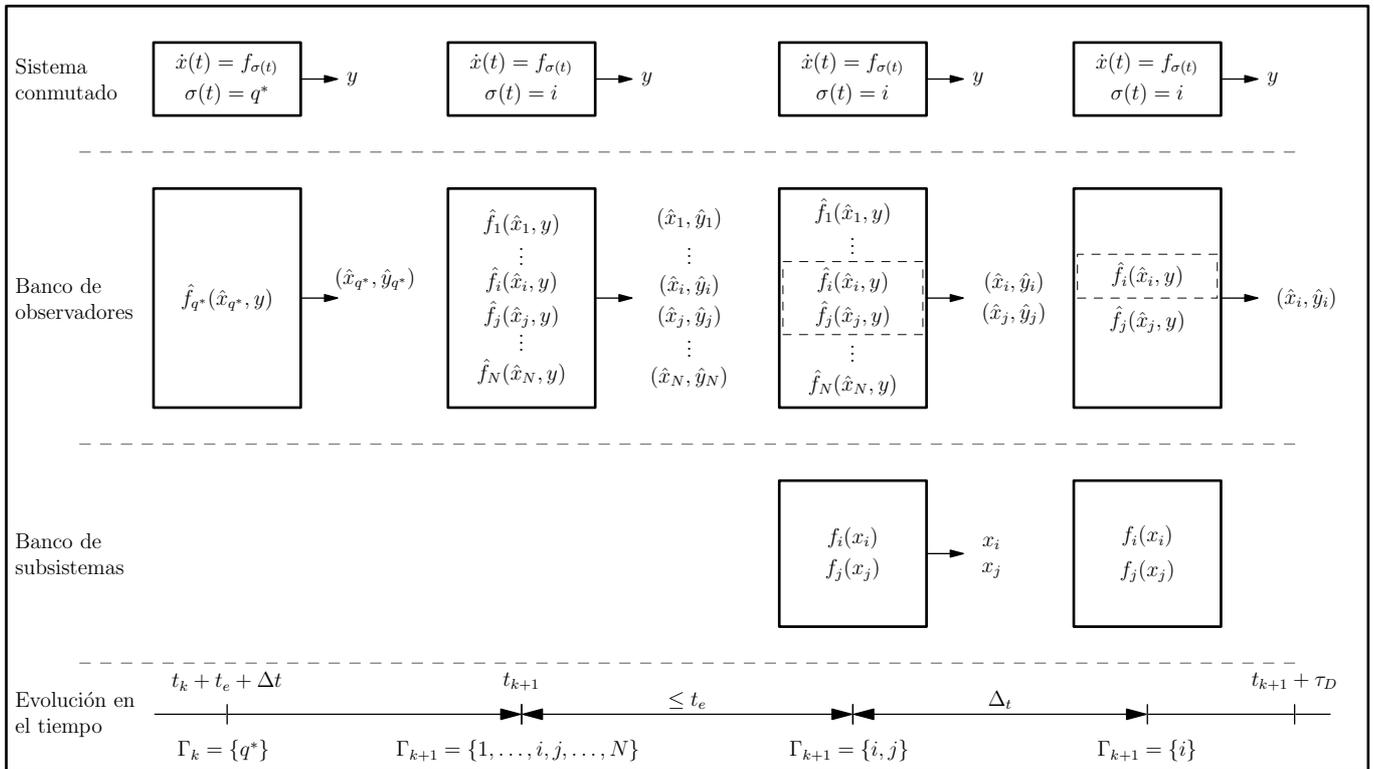


(B) Con acción del bando de subsistemas.

FIGURA 4.1: Diagrama esquemático de como opera el algoritmo para estimar los estados y determinar el modo a instante inicial ($t = 0$).



(A) Sin acción del banco de subsistemas.



(B) Con acción del bando de subsistemas.

FIGURA 4.2: Diagrama esquemático de como opera el algoritmo para estimar los estados y determinar el modo cuando se detecta una conmutación.

4.3. Ejemplo

En esta sección se presenta un ejemplo numérico en el que se implementa el algoritmo desarrollado en la Sección 4.3 para un sistema conmutado autónomo con salida de dimensión uno (función de salida), para estimar el modo y los estados continuos del sistema. Como se mencionó previamente, junto con las estrategias de detección y estimación de una conmutación desarrolladas en el Capítulo 3, se pone en funcionamiento la estrategia de observación completa, que permite dar una primera solución al problema de observación planteado para este tipo de sistemas conmutados.

Para mostrar el funcionamiento del algoritmo que se desarrolla en este capítulo y la estrategia de observación en su totalidad, el ejemplo que se presenta continuación se apoya en lo desarrollado para el sistema (3.17) de la Sección 3.4, como una continuación del mismo ya que como se mostrara a continuación, el sistema (3.17) verifica las hipótesis necesarias para este algoritmo.

Aplicando la misma metodología que en los ejemplos previos, primero se validan todas las hipótesis y propiedades que el sistema debe verificar para aplicar el algoritmo, para luego diseñar los parámetros del mismo. Finalmente se presentan los resultados obtenidos que verifican lo desarrollado teóricamente y ponen de manifiesto la performance del algoritmo. En el desarrollo de lo que sigue, se presentan algunas observaciones sobre el algoritmo relacionadas con su implementación. Estas observaciones permiten simplificar el cálculo de algunos parámetros que intervienen en la estrategia y reducir el costo computacional total.

Sea el sistema conmutado de \mathbb{R}^3 presentado en la Sección 3.4 descrito según (3.17) donde se toma como señal de conmutación $\sigma_0(t)$, descrita en la Tabla 3.2, con $\tau_D = 1 s$ y una duración de 30 s. Al igual que lo planteado previamente la dinámica de $\sigma_0(t)$ solo se presenta a modo ilustrativo de forma tal de poder llevar a cabo la simulación y contrastar con los resultados que arroja el algoritmo de estimación .

Para empezar con la verificación de las hipótesis del sistema, el mapa de salida asociado al sistema (3.17), $\mathcal{O}_q(x) = \left\{ L_{f_q}^j h(x), j = 0, \dots, 2 \ q = 1, \dots, 3, \right\}$ resulta

$$\mathcal{O}_q(x) = \begin{bmatrix} \tanh(x_2) \\ 0,1 (x_1 + a_q x_2) \operatorname{sech}^2(x_2) \\ \operatorname{sech}^2(x_2) (-0,1 (x_1 + x_3) + 0,1 (x_1 + a_q x_2) (0,1 a_q - 0,2 (x_1 + a_q x_2) \tanh(x_2))) \end{bmatrix},$$

notamos que $d\mathcal{O}_q(x) = \nabla\mathcal{O}_q(x)$ es de rango completo si se verifica que $x_2 \neq 0$, con lo que cada subsistema que compone al sistema conmutado resulta localmente débilmente observable. De la relación uno a uno entre y y x_2 se deduce que el sistema conmutado es genéricamente observable.

En cuanto al banco de observadores, en base a la característica del mapa de observabilidad, para cada subsistema se implementa un observador de alta ganancia como el desarrollado en [22]. Este tipo de observadores verifica la Hipótesis 4.1 y la Observación 4.1.

En el diseño del observador, se considera un valor de $\theta = 10$. Para esta elección de θ , se verifica la Observación 4.2 para un tiempo $t_e = 0,1$ s.

Observación 4.6. Previo a la implementación del esquema de estimación, es necesario tener una aproximación de los valores de \mathcal{X} y Δt vía simulación numérica

1. \mathcal{X} es estimado como se describe a continuación. Se asume que todos los posibles estados iniciales del sistema pertenecen a una esfera \mathcal{X}_0 de radio 3 centrada en $x_0 = (3,9, -3,2, 0,03)$ y condiciones iniciales $\{x_0^j, j = 1, \dots, 300\}$ se toman de forma aleatoria sobre \mathcal{X}_0 . También se genera un conjunto de señales de conmutación aleatorias $\{\sigma_i, i = 1, \dots, 50\}$ donde cada una de ellas verifique $\tau_D = 1$ s y una duración total de 30 s. Para cada par *condición inicial-señal de conmutación*, se obtiene la trayectoria asociada $x(t, \sigma_i, x_0^j)$, y para la misma se calcula el valor $x_i^j = \max_{0 \leq t \leq 30} \|x(t, \sigma_i, x_0^j)\|$. Finalmente, teniendo las siguientes métricas

$$\bar{x} = \frac{1}{15000} \sum_{j=1}^{50} \sum_{i=1}^{300} x_i^j = 9,2518 \quad \text{y} \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{15000} \sum_{j=1}^{50} \sum_{i=1}^{300} (x_i^j - \bar{x})^2} = 5,0981$$

se obtiene una aproximación de \mathcal{X} como

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq \bar{x} + 3\sigma_x = 24,65\}. \quad (4.13)$$

2. Una estima de Δt se obtiene como se describe a continuación; se seleccionan de forma aleatoria 2000 puntos $\{x_0^k, k = 1, \dots, 2000\}$ en \mathcal{X} , y para cada esfera de radio 0,01 centrada en cada x_0^k se seleccionan tres puntos $\{x_j^k, j = 1, \dots, 3\}$ de forma aleatoria. Haciendo una comparación con la Figura A.1, los puntos x_0^k , juegan el rol de x_0 y los puntos x_j^k , (donde el subíndice j hace referencia al j -ésimo modo del sistema), el de $x_{q_0^*}$ o x_{q_0} . Una vez establecido el modo $q^* \in \mathcal{Q}$ del sistema conmutado, y para cada k , se tiene la trayectoria del sistema conmutado para dicho modo tomando como condición inicial x_0^k . En simultáneo,

las trayectorias de los subsistemas y de sus correspondientes observadores del banco de observadores tomando como condición inicial $x_j^k, j = 1, \dots, 3$, también son generadas. Estos sistemas evolucionan hasta el tiempo $\delta t_k^{q^*}$ s donde se verifica la desigualdad (A.2) para alguna de las trayectorias generadas. Este proceso se repite tres veces, correspondiente con cada selección diferente de q^* asociado a este ejemplo en particular. Finalmente, se obtienen los parámetros

$$\bar{\delta t} = \frac{1}{6000} \sum_{q^* \in \mathcal{Q}} \sum_{k=1}^{2000} \delta t_k^{q^*} = 0,0382 \quad \text{and} \quad \sigma_{\delta t} = \sqrt{\frac{1}{6000} \sum_{q^* \in \mathcal{Q}} \sum_{k=1}^{2000} (\delta t_k^{q^*} - \bar{\delta t})^2} = 0,052,$$

que permiten estimar Δt como

$$\Delta t = \bar{\delta t} + 3\sigma_{\delta t} = 0,1912 \text{ s.} \quad (4.14)$$

Los parámetros para la simulación en el esquema de estimación de estados se eligen de la siguiente manera. Tiempo de simulación: 30 s, condición inicial de los estados y de los estados estimados: $x_0 = (3,9, -3,2, 0,03)$ y $\hat{x}_0 = (4,1, -3, 0,5)$ respectivamente.

- Por medio de la simulación se pudo verificar que el valor de M_k calculado en (4.6)-(4.7) para \mathcal{X} según (4.13), resulta muy conservativo en cuanto a que está muy sobredimensionando. Para poder relajar el cálculo de esta cota, a continuación se propone un esquema que no solo simplifica el cómputo de M_k , sino que también mejora la performance del algoritmo.

M_{k+1} se define como se describe a continuación: sea \tilde{t} el tiempo en el cual el modo actual del sistema, \hat{q} , es estimado. Luego

1. si $\tilde{t} = t_k + t_e$, entonces $M_{k+1} = \tilde{M} e^{-\tilde{\theta}(t_{k+1}-t_k)}$, donde $\tilde{M} = \min_{q \in \Gamma_k - \{\hat{q}\}} \| \hat{x}_{\hat{q}}(\tilde{t}) - \hat{x}_q(\tilde{t}) \|$
2. si $\tilde{t} = t_k + t_e + \Delta t$, entonces $M_{k+1} = \tilde{M} e^{-\tilde{\theta}(t_{k+1}-t_k-\Delta t)}$, donde $\tilde{M} = \| e_{x_{\hat{q}}}(\tilde{t}) \|$.

con $\tilde{\theta} < \theta$, de modo que la dinámica con que varía M_k resulta más lenta que la dinámica de estimación de los observadores. Una vez que el algoritmo determina t_{k+1} , se determina el valor de M_{k+1} .

En este ejemplo se toma $\tilde{\theta} = 1$ y $M_1 = 1$, las que se calculan conforme a lo establecido por la Observación 4.5.

- A su vez por medio de la simulación, se pudo encontrar que Δt dado por (4.14) resulta demasiado conservativo, siendo $\Delta t = 0,08 s$ un valor más adecuado, el cual verifica todas las hipótesis necesarias y mejora la performance de estimación.

Los resultados de la simulación asociados al esquema de estimación de estados y modo se presenta a continuación. Como se mencionó al comienzo de esta sección, el algoritmo aquí desarrollado, se adosa al algoritmo de detección y estimación de una conmutación implementado en el ejemplo de la Sección 3.4, dando así continuidad a la estrategia de observación completa, aplicada al sistema conmutado (3.17). Esto remarca el desacople que existe entre algoritmos que conforman la estrategia observación, a la hora de su diseño.

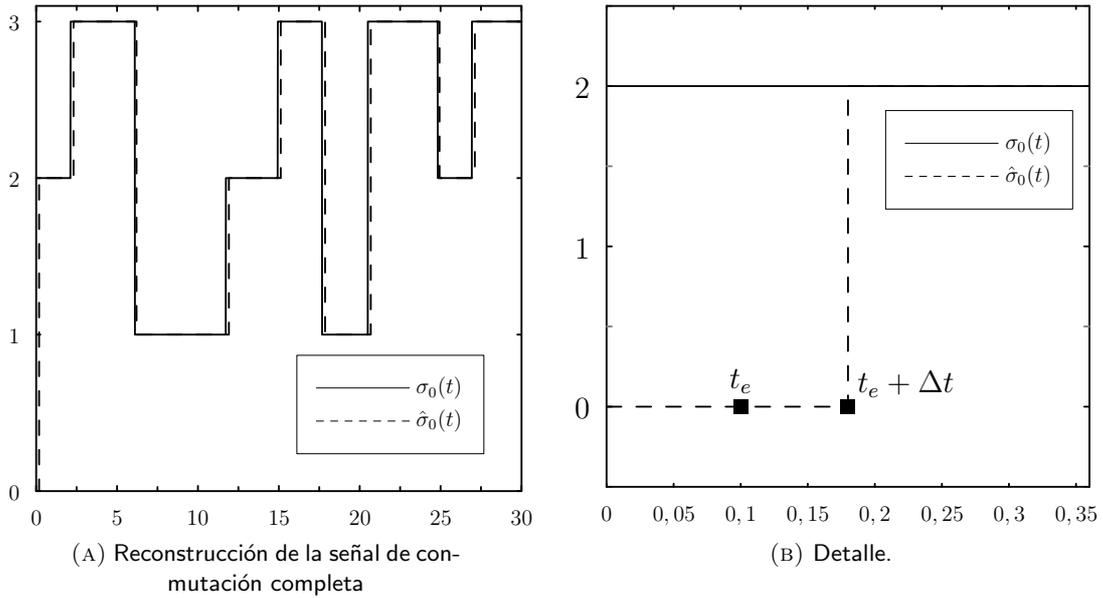


FIGURA 4.3: Señal de conmutación estimada $\hat{\sigma}_0(t)$ y detalle del proceso de estimación a estado inicial $t = 0 s$.

La Figura 4.3 (A) presenta la señal de conmutación $\sigma_0(t)$ (ver Tabla 3.2) junto a su estimación $\hat{\sigma}_0(t)$, y la Figura 4.3 (B) muestra en detalle el comportamiento de la dinámica de estimación de la señal de conmutación a estado inicial $t = 0 s$. Para $t \in [0; t_e + \Delta t)$, se toma $\hat{\sigma}_0 = 0$ ya que no se tiene información de la señal de conmutación. Nótese que, dados los valores de M_1 y $\tilde{\theta}$, una vez transcurrido el tiempo t_e , Γ_1 tiene más de un elemento. Por lo tanto, se debe poner a evolucionar un banco de subsistemas para estimar el modo actual del sistema. Esto introduce un retardo, inevitable y propio del algoritmo, a la hora de estimar el modo actual del sistema.

Este comportamiento también se puede observar con mayor detalle en la Figura 4.4, donde se presentan las dos posibles situaciones σ_0 que pueden suceder durante la estimación de modo. En la Figura 4.4 (A) se muestra una conmutación cuando el sistema cambia del modo $q = 3$ al modo $q = 1$ asociado al tiempo $t_s = 6,1024 s$. y la estimación del nuevo modo. Transcurrido $I_\tau = 1 \times 10^{-2} s$ donde ocurre y es detectado t_s , Γ_3 solo tiene un elemento por lo que, el nuevo modo es estimado a tiempo $t_3 + t_e$. En la Figura 4.4 (B) se presenta el cambio de modo cuando el sistema pasa de $q = 1$ a $q = 2$ a tiempo $t_s = 11,7298 s$ y la estimación de \hat{q}_4 . En este caso Γ_4 posee más de un elemento, por lo que el nuevo modo se estima a tiempo $t_4 + t_e + \Delta t$. Inmediatamente se pone a evolucionar un banco de subsistemas en esta ocasión.

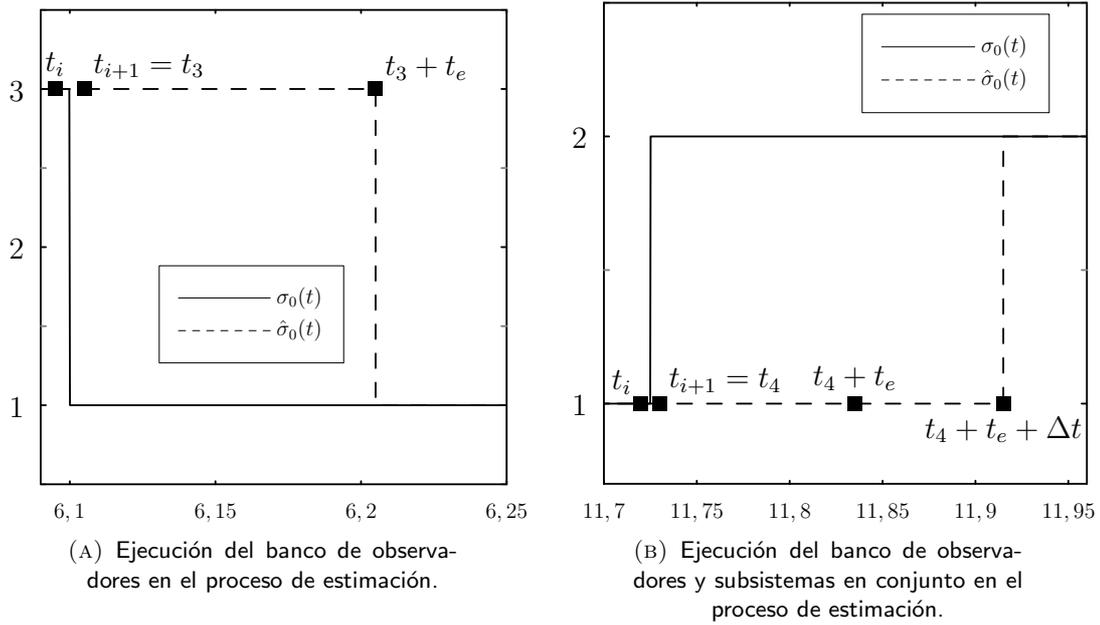


FIGURA 4.4: Detalle del proceso de estimación de σ_0 para diversos instantes de \hat{t}_s .

La Tabla 4.1 presenta información adicional acerca de la simulación; la misma da cuenta de cómo el algoritmo de detección interactúa con el algoritmo de estimación de modo y estados (se repiten los resultados presentes en la Tabla 3.3 a modo comparativo) y cómo evolucionan los diversos parámetros asociados a la estrategia de observación.

TABLA 4.1: Resumen de los resultados de la simulación para el esquema completo de observación para el sistema (3.17) con la señal de conmutación σ_0 .

$\hat{t}_s [s]$	$t_i [s]$	$t_{i+1} = t_k [s]$	μ_i	M_k	\tilde{M}	$\tilde{t} [s]$
2,1245	2,12	2,13	$4,7506e - 4$	2,7324	$4,3243e - 4$	2,31
6,1024	6,095	6,1050	$7,2853e - 4$	$8,7970e - 6$	0,0789	6,205
11,7298	11,725	11,735	$3,1579e - 4$	$2,8302e - 4$	0,0014	11,9150
14,9385	14,93	14,94	$8,6780e - 4$	$6,0285e - 5$	0,0022	15,12
17,6751	17,67	17,68	$9,3783e - 4$	$1,5483e - 4$	0,0015	17,86
20,5002	20,495	20,505	$9,7347e - 5$	$9,5257e - 5$	$6,7435e - 4$	20,685
24,8296	24,825	24,835	$5,1524e - 4$	$9,6190e - 6$	0,1928	24,935
26,9388	26,93	26,94	$4,9905e - 4$	0,0235	$8,2714e - 4$	27,12

Finalmente, el proceso de estimación completo puede observarse en las Figuras 4.5 a 4.8. En la Figura 4.5 se presenta la evolución temporal de $x_1(t)$ junto a $\hat{x}_1(t)$, mientras que en la Figura 4.6 se puede observar la evolución del error de estimación para este estado. En esta última figura se aprecia como se degrada el error de estimación en torno a los instantes de conmutación. Esto

se debe al hecho de que la estimación de los estados permanece en un valor fijo durante el lapso de tiempo $t_k + t_e$ o $t_k + t_e + \Delta t$. A su vez debe notarse que una vez que es determinado el modo actual del sistema conmutado, la caída exponencial del error de estimación permite obtener una estimación adecuada del estado.

La estimación del estado x_3 se presenta en la Figura 4.7 y 4.8, donde se observa un comportamiento similar al descrito para el estado x_1 .

En cuanto al estado x_2 no se presenta ninguna figura, ya que x_2 guarda una relación uno a uno con la función de salida.

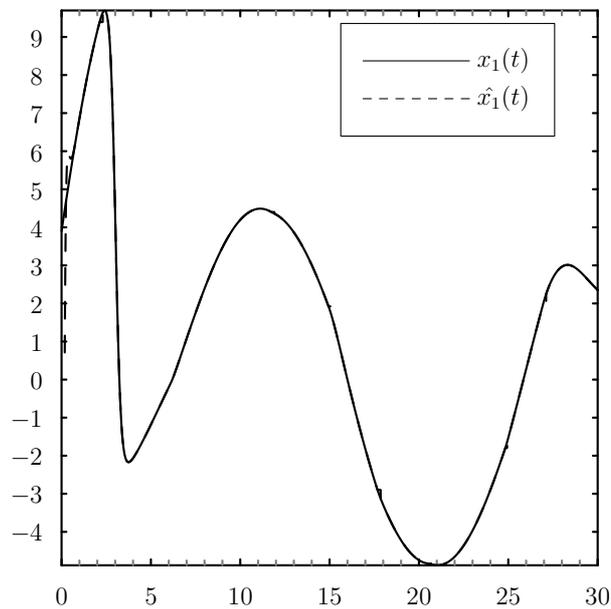
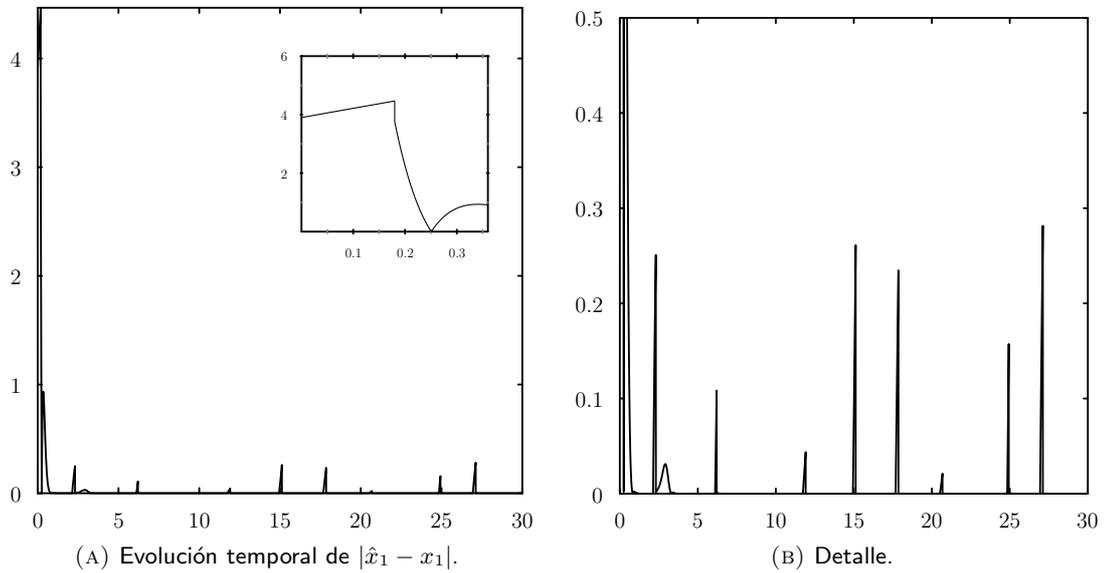
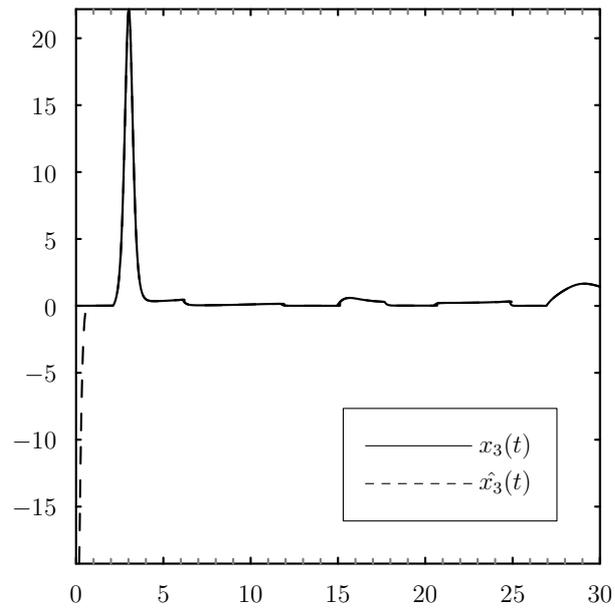


FIGURA 4.5: Evolución temporal de x_1 y \hat{x}_1 asociados al sistema (3.17) con señal de conmutación σ_0 .

FIGURA 4.6: Norma del error de estimación para el estado x_1 .FIGURA 4.7: Evolución temporal de x_3 y \hat{x}_3 asociados al sistema (3.17) con señal de conmutación σ_0 .

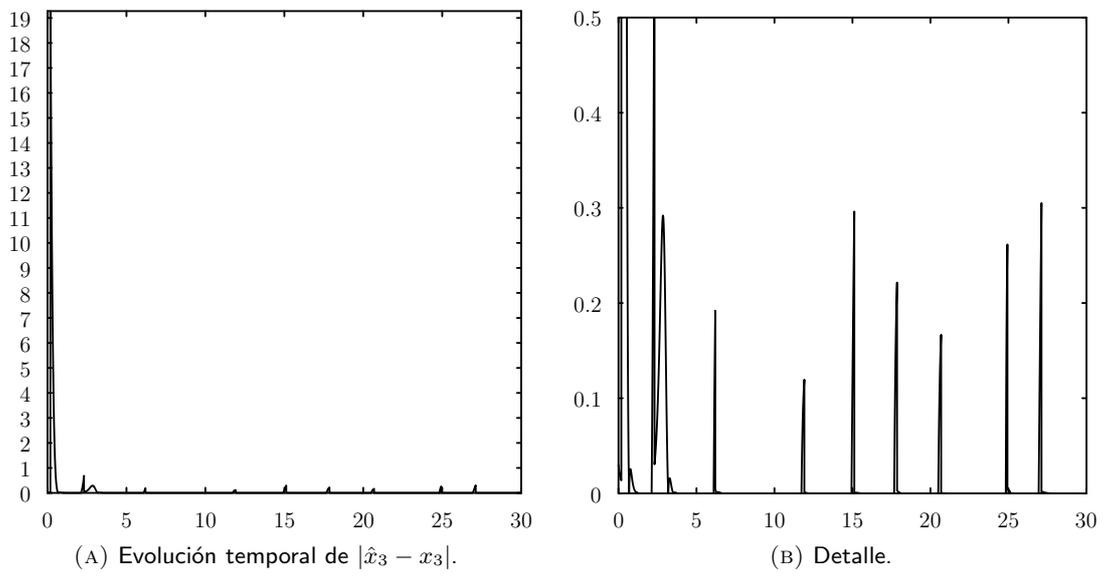


FIGURA 4.8: Norma del error de estimación para el estado x_3 .

Capítulo 5

Estimación de modo y estados para sistemas Lipschitz continuos

En el Capítulo 3, se expusieron los fundamentos y se desarrolló un algoritmo destinado a la detección y estimación de conmutaciones en sistemas conmutados no lineales, bajo diversas condiciones de regularidad de la señal de salida. En el Capítulo 4, se propuso un algoritmo basado en la concepción de un banco de observadores y un banco de subsistemas, con el propósito de estimar los modos y los estados del sistema conmutado. Debido a la Hipótesis 3.3 (Detectabilidad de una conmutación), que posibilita el diseño de las dinámicas de ambos algoritmos por separado, la combinación de estas estrategias ofrece una solución inicial al desafío de observación planteado en el contexto de sistemas conmutados no lineales sobre un conjunto de sistemas que verifican ciertas características. Específicamente, en el esquema desarrollado en el capítulo precedente, la estimación de modos y estados depende explícitamente de la capacidad de sintetizar un observador para cada subsistema, caracterizado por un decaimiento exponencial conocido en la norma del error de salida. Esta particularidad se pone de manifiesto de forma explícita en los Lemas 4.1 y A.1, fundamentales para la estimación del modo basada en la dinámica impuesta por el banco de observadores.

Por otro lado, dentro del ámbito de la teoría de sistemas no lineales, si bien el problema de sintetizar un observador sigue siendo un problema abierto, la literatura específica abarca una amplia variedad de observadores que exhiben un decaimiento exponencial en la dinámica del error de estimación. Por lo general, este tipo de observadores requiere que el sistema no lineal asociado cumpla ciertas condiciones de observabilidad, y la síntesis de los mismos se encuentra estrechamente relacionada con la regularidad del mapa de observabilidad y que el mismo defina un difeomorfismo, lo cual impone restricciones en la aplicabilidad del algoritmo desarrollado solo a

sistemas conmutados cuyos subsistemas satisfagan las hipótesis necesarias.

En particular, el observador planteado no resuelve sistemas conmutados cuya función o mapa de salida solo verifica Lipschitz continuidad, como se abordó en la Sección 3.5. Esto se debe a que no es posible sintetizar un observador para cada subsistema que cumpla con las hipótesis requeridas para conformar el banco de observadores. Aunque el observador propuesto en el Capítulo anterior resuelve de manera efectiva el problema de observación planteado para esta tesis, demostrando un buen desempeño, las hipótesis impuestas en el diseño del banco de observadores, junto con las restricciones en el diseño de los observadores para los subsistemas, restringen considerablemente el conjunto de sistemas sobre los cuales se puede aplicar la estrategia desarrollada.

En este capítulo se busca desarrollar el marco teórico que permita relajar las hipótesis y condiciones de diseño sobre los subsistemas con el objetivo de generalizar un observador (bajo las hipótesis y el planteo del problema desarrollado en Capítulo 2) el cual pueda aplicarse a sistemas conmutados no lineales Lipschitz continuos. Esto permite ampliar el alcance de la estrategia, permitiendo abarcar un conjunto más amplio de sistemas conmutados que incluye aquellos que presentan puntos no regulares tanto en los campos vectoriales como en la función o mapa de salida.

En busca de una estrategia de observación genérica, el objetivo central consiste en separar la estimación del modo, en el sentido de que esta tarea pueda diseñarse y llevarse a cabo independiente de las estrategias y dinámicas del resto de los elementos que intervienen en el algoritmo. Esto permite un desacople en las tres tareas que lleva a cabo el esquema de observación: **(a)** detectar y estimar los instantes de conmutación, **(b)** estimar el modo (reconstruir la señal de conmutación $\sigma(t)$), **(c)** estimar los estados del sistema.

Utilizando desarrollos e ideas previas, la articulación de este capítulo consiste en:

- Utilizar el esquema de detección y estimación de una conmutación para sistemas con funciones o mapa de salida Lipschitz continuo desarrollado en el Capítulo 3.
- Desarrollar una estrategia de detección de modos basada en un *banco de descartadores* (*bank of discarders*). El concepto de *descartador* se toma de [20], donde un descartador es la unidad básica que compone el observador desarrollado en ese artículo. En esta tesis se demuestra que la estimación de modos se puede realizar asignando un *descartador* a cada subsistema o modo del sistema. Esto conlleva a la creación de un *banco de descartadores*.
- Utilizar un esquema de banco de observadores adecuado para estimar los estados del sistema conmutado. En particular para generalizar aún más la estrategia, para la estimación de

estados de cada subsistema que conforma el banco de observadores, se recurre a una modificación del observador presentado en [20] para estimar los estados del sistema. Aunque este modelo de observador se adapta bien a las restricciones impuestas por el modelo matemático del sistema, en particular a la no diferenciabilidad del mapa de salida, las estimaciones que proporciona se encuentran en la región del espacio de estados donde se encuentra el estado real. En este trabajo se modifica ese observador para obtener estimaciones de los estados del sistema.

- Presentar un algoritmo que articule las tres tareas en el proceso de estimación de estado y conforme el observador para el objetivo planteado: detección y estimación de las conmutaciones, estimación de modos y estimación de estado.

A partir de la estrategia desarrollada en este capítulo se presentan dos variaciones del algoritmo de estimación que tienen en cuenta diferentes aspectos:

1. una primera variación que aborda una problemática inherente a los sistemas conmutados con salida Lipschitz continua: la imposibilidad de detectar algunas conmutaciones a causa de la no diferenciablez en el mapa de salida
2. una segunda variación la cual implementa un banco de observadores a partir de cualquier observador para sistemas continuos no lineales donde la dinámica del error de estimación pueda seleccionarse adecuadamente. Esta variación puede llevarse a cabo ya que la reconstrucción de la señal de conmutación no depende del proceso de estimación del estado.

Para el desarrollo de este capítulo además las Hipótesis 2.1 y 2.2 se debe agregar la siguiente Hipótesis impuesta para el desarrollo de los descartadores.

Hipótesis 5.1. Se toman muestras de la salida del sistema de acuerdo a la secuencia de tiempos dada por el conjunto $\mathcal{T} = \{t_k = t_0 + k \Delta T, k \in \mathbb{N}_0\}$ siendo las muestras de la salida $\mathcal{Y}_s = \{y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_k), \dots\}$ la única información accesible.

Observación 5.1. Aunque en principio ΔT es arbitrario, en lo que sigue se realizarán algunas suposiciones al respecto.

Cabe destacar que esta Hipótesis 5.1, también formulada en [20], sirve como base para el desarrollo $\gamma - \epsilon$ observabilidad y el $\gamma - \epsilon$ descartador (ver Apéndice B). Estos conceptos son mencionados y resumidos a lo largo de este capítulo.

5.1. Estimación de modo

Como se mencionó previamente la estrategia para la estimación del modo se basa en el concepto de *descartador* (*discarder*) como sistema dinámico, presentado formalmente en [20]. Para evitar repetir contenido y hacer foco en el uso del mismo, **las nociones fundamentales de como se construye y los principio de funcionamiento de un descartador como sistema dinámico se resumen en el Apéndice B, como así también sus propiedades y las condiciones necesarias que se utilizan a lo largo de este capítulo.**

El resultado que se presenta a continuación es fundamental, ya que permite llevar a cabo la estimación del modo mediante la implementación de un *banco de descartadores*.

Lema 5.1. Sean ϵ y γ dos números positivos tales que para todo $q \in \mathcal{Q}$ el subsistema (f_q, h) del sistema conmutado (2.2) es $q - \gamma - \epsilon$ observable. Se asume que a tiempo τ^* , x^* es el estado del sistema (2.2) y q^* su modo. Si la Hipótesis 3.5 (o 3.7) se verifica y $c \in \mathcal{X}_h$ es tal que $\|x^* - c\| < \epsilon$ entonces para cada $q \in \mathcal{Q} \setminus q^*$, existe un τ_d tal que $\forall t > \tau_d + \tau^*$,

$$\|h(\phi_q(t, \tau^*, c)) - h(\phi_{q^*}(t, \tau^*, x^*))\| \geq 2\gamma$$

mientras se verifique

$$\|h(\phi_{q^*}(t, \tau^*, c)) - h(\phi_{q^*}(t, \tau^*, x^*))\| < \gamma$$

.

Demostración. Dado que $c \in \mathcal{X}_h$, las aproximaciones de primer orden de h alrededor de τ^* para los sistemas q y q^* resultan:

$$\begin{aligned} h(\phi_q(t, \tau^*, c)) &\approx h(c) + \nabla h(c) f_q(c)(t - \tau^*) = h(c) + L_{f_q} h(c)(t - \tau^*), \\ h(\phi_{q^*}(t, \tau^*, c)) &\approx h(c) + \nabla h(c) f_{q^*}(c)(t - \tau^*) = h(c) + L_{f_{q^*}} h(c)(t - \tau^*). \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$h(\phi_q(t, \tau^*, c)) - h(\phi_{q^*}(t, \tau^*, c)) \approx [L_{f_q} h(c) - L_{f_{q^*}} h(c)](t - \tau^*)$$

y de (3.25) se tiene

$$\|h(\phi_q(t, \tau^*, c)) - h(\phi_{q^*}(t, \tau^*, c))\| = \|L_{f_q}h(c) - L_{f_{q^*}}h(c)\|(t - \tau^*) \geq \mu(t - \tau^*)$$

Sea $\tau_d = \frac{3\gamma}{\mu}$. Entonces $\forall t > \tau_d + \tau^*$,

$$\|h(\phi_q(t, \tau^*, c)) - h(\phi_{q^*}(t, \tau^*, c))\| > 3\gamma,$$

donde para esos valores de t se verifica que,

$$\begin{aligned} & \|h(\phi_q(t, \tau^*, c)) - h(\phi_{q^*}(t, \tau^*, x^*))\| = \\ & \|h(\phi_q(t, \tau^*, c)) - h(\phi_{q^*}(t, \tau^*, c)) + h(\phi_{q^*}(t, \tau^*, c)) - h(\phi_{q^*}(t, \tau^*, x^*))\| \geq \\ & \|h(\phi_q(t, \tau^*, c)) - h(\phi_{q^*}(t, \tau^*, c))\| - \|h(\phi_{q^*}(t, \tau^*, c)) - h(\phi_{q^*}(t, \tau^*, x^*))\| > 3\gamma - \gamma. \end{aligned}$$

□

Observación 5.2. Del Lema 5.1 se desprende que si la celda de centro c que contiene el estado del sistema conmutado pertenece tanto al $q^* - \gamma - \epsilon$ -descartador como al $q - \gamma - \epsilon$ -descartador, este último descartador suprimirá esa celda en algún instante de tiempo t_k de la forma $t_{k-1} < \tau_d + \tau^* \leq t_k$, mientras que el primero de ellos conserva la celda siempre que se verifique la propiedad de consistencia. De esto se desprende que, si $\hat{D}_q^{t_k}$ y $\hat{D}_{q^*}^{t_k}$ son los conjuntos de búsqueda a tiempo t_k de sus respectivos descartadores, se tiene que $\#\hat{D}_q^{t_k} < \#\hat{D}_{q^*}^{t_k}$.

5.1.1. Banco de descartadores

La idea esbozada por la observación anterior resulta fundamental, ya que describe el principio básico de funcionamiento de como detectar el modo a partir implementar $q - \gamma - \epsilon$ -descartadores en simultáneo, uno por cada subsistema. Por lo tanto para estimar el modo, se construye un *banco de descartadores* de la siguiente manera.

Sea γ y ϵ números positivos fijos, y supongamos que cada subsistema (f_q, h) , $q \in \mathcal{Q}$ de (2.2) es $\gamma - \epsilon$ -observable. Sean también $\Theta \in \text{comp}(\mathcal{X})$ y la secuencia $\mathcal{T}_\Theta = t_k, \dots, t_{k+\bar{N}} \subset \mathcal{T}$, $\bar{N} \in \mathbb{N}$ tal que $t_{k+\bar{N}} - t_k \geq \tau_d > t_{k+\bar{N}-1} - t_k$ y $\mathcal{Y}_\Theta = \{(t_k), \dots, y(t_{k+\bar{N}})\}$ la subsucesión correspondiente de la salida del sistema (2.2). El *banco de descartadores* está compuesto por un $q - \gamma - \epsilon$ -descartador

para cada $q \in \mathcal{Q}_p \subseteq \mathcal{Q}$:

$$\mathbf{D}_{q,\epsilon,\gamma}^{t_k, t_{k+\bar{N}}}(\Theta) = \left\{ \Theta_q^{t_k} = \hat{\Theta}, \Theta_q^{t_{k+1}}, \dots, \Theta_q^{t_{k+\bar{N}}} \right\} \quad \forall q \in \mathcal{Q}_p \quad (5.1)$$

donde $\hat{\Theta}$ es el conjunto de los centros de las celdas de la grilla que cubre Θ y los $\Theta_q^{t_i}$ es la sucesión de conjuntos que resultan del descartador (ver Apéndice B y la nomenclatura asociada). La estimación del modo \hat{q} en el instante $t_{k+\bar{N}}$ vendrá dada por dado por:

$$\hat{q} = \underset{q \in \mathcal{Q}_p}{\operatorname{argmax}} \#(\Theta_q^{t_{k+\bar{N}}}) \quad (5.2)$$

Para facilitar la comprensión del principio de funcionamiento del banco de descartadores en la estimación de modos, en la Figura 5.1 se presenta un esquema simplificado de como opera la reducción del conjunto de búsqueda para un banco de descartadores compuesto por dos $q - \gamma - \epsilon$ -descartadores. En el esquema, el modo j es el modo actual del sistema, por lo que los estados x evolucionan conforme a la dinámica establecida por f_j e i es el otro posible modo presente en el banco de descartadores. En este caso, según la notación previa $\bar{N} = 3$ y para el tiempo t_{k+3} , $\Theta_i^{t_{k+3}} = \phi_i(t_{k+3}, t_{k+2}, \Theta_i^{t_{k+2}}) \cap h^{-1}(y(t_{k+3})) = \emptyset$. Por lo que la estimación del modo a tiempo t_{k+3} viene dada por (5.2), en este ejemplo $\hat{q} = j$ ya que $\#(\Theta_i^{t_{k+3}}) = 0$.

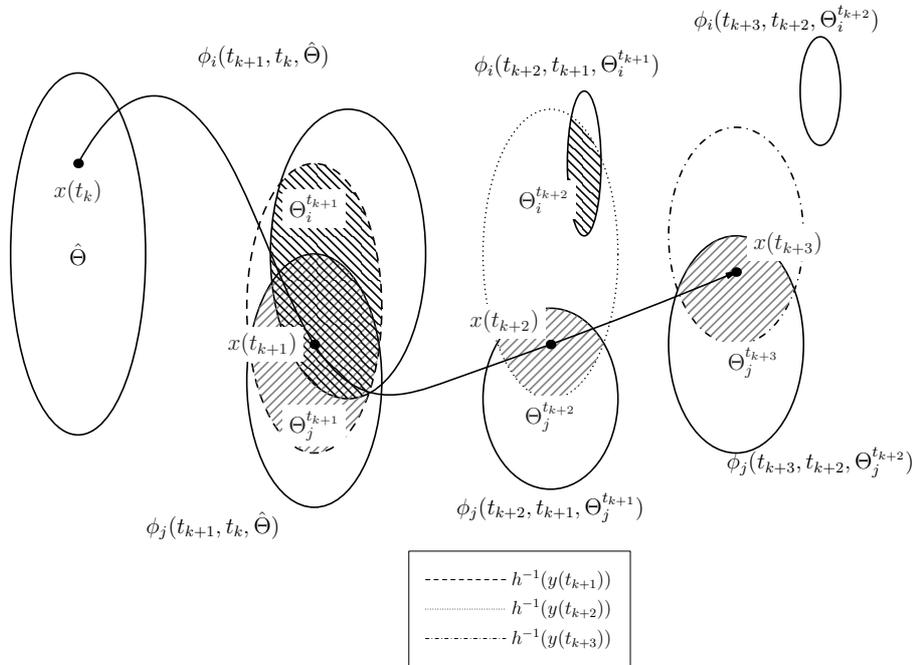


FIGURA 5.1: Principio básico de funcionamiento del banco de descartadores para la estimación de modo.

- Observación 5.3.**
1. Dado que el par $\gamma - \epsilon$ establecen la dinámica de descarte, todos los $q - \gamma - \epsilon$ -descartadores del banco de descartadores comparten los mismos valores de γ y ϵ .
 2. El conjunto de los posibles modos \mathcal{Q}_p es un subconjunto propio del conjunto \mathcal{Q} excepto al inicio del proceso de estimación donde $\mathcal{Q}_p = \mathcal{Q}$, como se verá a continuación.
 3. El tiempo de descarte $\tau_d = \tau_d(\gamma)$ depende de γ .

5.2. Estrategia de estimación de estados

La estrategia de estimación de estados se puede esbozar como se describe a continuación.

Se construye un banco de observadores, a partir de cada subsistema que compone a (2.2). Una vez que una conmutación es detectada, se ponen a evolucionar en simultáneo todos los observadores a partir de la misma condición inicial, y cada uno de ellos proporciona una estimación de estado $\hat{x}_q(t)$, con $q \in \mathcal{Q}_p$. La estimación del estado del sistema conmutado se obtiene mediante:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\#(\mathcal{Q}_p)} \sum_{q \in \mathcal{Q}_p} \hat{x}_q(t).$$

Una vez que el modo actual del sistema, supóngase q^* , es detectado, solo el observador correspondiente a ese modo queda activo y la estimación del estado queda establecida como

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_{q^*}(t)$$

hasta que se detecta la nueva conmutación.

Observación 5.4. En principio cualquier observador de tiempo continuo válido para sistemas Lipschitz continuos puede utilizarse, siempre y cuando la tasa de decrecimiento del error de estimación de estados pueda diseñarse adecuadamente. Sin embargo, estos observadores requieren condiciones de observabilidad más fuertes, lo que acotan su espectro de aplicación. Para lograr una generalización y utilizar condiciones de observabilidad débiles, como las de $\gamma - \epsilon$ -observable (ver Apéndice B) y no depender de la regularidad del campo de salida, se utilizará una modificación del observador presentado en [20], que denominaremos como q -observador, que presenta un buen desempeño bajo estas condiciones.

5.2.1. El q -observador

Para diseñar el q -observador, primero se presenta la noción de *conjunto-búsqueda de un q -secuenciador* (*search-set q -sequencer*). Sean $q \in \mathcal{Q}$ fijo y el subsistema (f_q, h) del sistema conmutado (2.2) dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_q(t) &= f_q(x_q(t)) \\ y(t) &= h(x_q(t)) \end{cases} \quad (5.3)$$

Sean las sucesiones \mathcal{T} y $\mathcal{Y}_s \subset \mathbb{R}^p$ fijas, establecidas por las Hipótesis 5.1, donde \mathcal{Y}_s resulta de tomar muestras de la salida del sistema (5.3), en los instantes de tiempo dados por \mathcal{T} , correspondiente a la condición inicial $x_q(t_0) = x_0$.

Dada la subsucesión $\Upsilon = \{\tau_i = t_{k_i}, i \in \mathbb{N}_0, k_0 = 0\} \subset \mathcal{T}$ y otras dos sucesiones decrecientes de números positivos $\Sigma = \{\epsilon_i, i \in \mathbb{N}_0\}$, $\Gamma = \{\gamma_i, i \in \mathbb{N}_0\}$, el *conjunto-búsqueda de un q -secuenciador* se construye a partir de una concatenación arbitraria de $q - \gamma_i - \epsilon_i$ -descartadores:

$$\mathcal{S}_q(\cdot, \mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma, \mathcal{Y}_s) := \mathbf{D}_{q, \epsilon_0, \gamma_0}^{\tau_0, \tau_1} \triangleright \mathbf{D}_{q, \epsilon_1, \gamma_1}^{\tau_1, \tau_2} \triangleright \cdots \triangleright \mathbf{D}_{q - \epsilon_i, \gamma_i}^{\tau_i, \tau_{i+1}} \triangleright \cdots (\cdot). \quad (5.4)$$

Observación 5.5. En [20] el concepto de observador se aplica al *conjunto-búsqueda de un q -secuenciador* (*search-set q -sequencer*). Dado que la salida del q -secuenciador resulta en una sucesión de *conjuntos-búsqueda*, este no proporciona un estado estimado x_q del sistema (5.3), sino que establece un conjunto del espacio de estados en donde se encuentra el estado. Por lo tanto este esquema no resulta útil si se pretende utilizar esta estimación con fines de control. Para evitar este inconveniente, se introduce la siguiente definición.

Definición 5.1. Dados Υ, Σ y Γ como se definió previamente y sea $D^{t_0} \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ tal que $x_0 \in D^{t_0}$. Un q -observador $\mathcal{O}_q(\cdot, \mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma, \mathcal{Y}_s)(\cdot)$ para el sistema (5.3) se obtiene del *conjunto-búsqueda de un q -secuenciador* correspondiente como se describe a continuación.

Si $\mathcal{S}_q(D^{t_0}, \mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma, \mathcal{Y}_s) = \{\hat{D}_q^{t_k}, k \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathcal{O}_q(D^{t_0}, \mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma, \mathcal{Y}_s) = \{\hat{x}_q(t_k), k \in \mathbb{N}_0\}$, donde la estimación \hat{x}_q de los estados del sistema viene dado por

$$\hat{x}_q(t_k) = \frac{1}{\#(\hat{D}_q^{t_k})} \sum_{\xi \in \hat{D}_q^{t_k}} \xi. \quad (5.5)$$

Observación 5.6. A partir de esta definición, si la Hipótesis del Teorema 3.13 de [20] se verifica, entonces existen $\Delta T^q > 0$ y $K^q \in \mathbb{N}$ y dos sucesiones decrecientes de números positivos $\Sigma^q = \{\epsilon_i^q, i \in \mathbb{N}_0\}$ y $\Gamma^q = \{\gamma_i^q, i \in \mathbb{N}_0\}$ con $\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i^q = \epsilon_*^q$ tales que si $\mathcal{T}^q = \{t_k = t_0 + k\Delta T^q, k \in$

\mathbb{N}_0 y $\Upsilon^q = \{\tau_i = t_0 + iK^q\Delta T^q, i \in \mathbb{N}_0\}$ la estimación de estados $\{\hat{x}_q(t_k), k \in \mathbb{N}\}$ que establece el observador $\mathcal{O}_q(D^{t_0}, \mathcal{T}^q, \Upsilon^q, \Sigma^q, \Gamma^q, \mathcal{Y}_s)$, verifica que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{x}_q(t_k) - x_q(t_k)\| < \epsilon_*$.

Observación 5.7. Este último resultado establece que dado un modo *fijo* (es decir que la evolución dinámica y la salida \mathcal{Y}_s del sistema, quedan establecidas por un modo en particular, supongase q), la estimación de estados \hat{x}_q , del correspondiente q -observador converge, bajo las hipótesis adecuadas a los estados x_q del sistema. Con el fin de construir una estrategia que permita dar solución al problema de observación planteado para los sistemas conmutados Lipschitz continuos, el algoritmo que se describe a continuación implementa un banco de q -observadores de forma tal que para cada instante de tiempo el $\sigma(t_k)$ -observador proporciona la estimación del estado actual.

5.3. Algoritmo de estimación de estados y modo

Una vez detectada una conmutación, el algoritmo que permite estimar los estados y el modo del sistema (2.2) consiste en los siguientes pasos:

1. construir un q -observador para cada subsistema (f_q, h) , $q \in \mathcal{Q}_p$, *banco de q -observadores* (*bank of q -observers*) y dejarlos evolucionar en simultáneo.
2. diseñar para cada \mathcal{Q}_p un *banco de descartadores* y dejarlos evolucionar también en simultáneo por un lapso de tiempo τ_d .
3. de acuerdo a (5.2), estimar \hat{q} , el modo actual del sistema.
4. establecer los estados estimados según la ecuación (5.5) para $q = \hat{q}$, hasta la próxima conmutación.

Todos los q -observadores que componen el banco de q -observadores utilizan los mismos conjuntos $\mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma, \mathcal{Y}_s$, mientras que todos los descartadores utilizan los conjuntos $\mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma_d, \mathcal{Y}_s$, donde Γ_d se obtiene a partir de Γ como se presenta en lo que sigue.

Observación 5.8. Las secuencias $\mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma$ y \mathcal{Y}_s quedan descritas como se describe a continuación. De acuerdo con la Observación 5.6, si las hipótesis del Teorema 3.13 de [20] se verifican para cada subsistema (f_q, h) del sistema (2.2), entonces para cada $q \in \mathcal{Q}$ existe un $\Delta T^q > 0$, $K^q \in \mathbb{N}$ y dos sucesiones $\Sigma^q = \{\epsilon_i^q, i \in \mathbb{N}_0\}$ y $\Gamma^q = \{\gamma_i^q, i \in \mathbb{N}_0\}$.

Sean $\Delta T = \min_{q \in \mathcal{Q}} \Delta T^q$, $K = \min\{n \in \mathbb{N} : n\Delta T \geq K^q \Delta T^q, \forall q \in \mathcal{Q}\}$ y $\forall i \in \mathbb{N}_0, \gamma_i = \min_{q \in \mathcal{Q}} \gamma_i^q$, y $\epsilon_i = \min_{q \in \mathcal{Q}} \epsilon_i^q$. Se establece $\mathcal{T} = \{t_k = t_0 + k\Delta T, k \in \mathbb{N}_0\}$, $\Upsilon = \{\tau_i = t_0 + iK\Delta T, i \in \mathbb{N}\}$, $\Sigma = \{\epsilon_i, i \in \mathbb{N}_0\}$, $\Gamma = \{\gamma_i, i \in \mathbb{N}_0\}$, e \mathcal{Y}_s dado por la Hipótesis 5.1.

En lo que sigue se asume que el sistema comienza a evolucionar a tiempo t_0 con condición inicial desconocida $x(t_0) = x_0 \in \mathcal{K} = \mathcal{X} \cap h^{-1}(y(t_0))$ y se denota con $\{t_{c_m}, m \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathcal{T}$ a los instantes de tiempo en los cuales todos los observadores y todos los descartadores de los correspondientes bancos evolucionan simultáneamente.

El algoritmo opera como se detalla a continuación.

- I) $\nu = 0$, $t_{c_0} = t_0$ y para este caso $\mathcal{Q}_p = \mathcal{Q}$ ya que no se dispone de información sobre el modo del sistema. Para cada q -observador del banco, la dinámica inicial queda determinada por $\gamma_0 - \epsilon_0$ según lo dado por Γ y Σ y el *conjunto-búsqueda* inicial D^* es el conjunto de centros de las celdas de radio ϵ_0 que cubren \mathcal{K} . Para cada descartador del banco, $\hat{\Theta}$ en (5.1) se toma como $\hat{\Theta} = D^*$, la dinámica queda establecida por $\gamma_0^d \in [\frac{\gamma_0}{4}, \gamma_0]$ y el tiempo de descarte $\tau_d^0 = \tau_d(\gamma_0^d)$ como en el Lema 5.1. La estimación de estados queda establecida según

$$\hat{x} = \frac{1}{\#(\mathcal{Q}_p)} \sum_{q \in \mathcal{Q}_p} \hat{x}_q \quad (5.6)$$

donde, para cada q , \hat{x}_q es la estimación del estado proporcionada por el correspondiente q -observador, de acuerdo con (5.5).

Sea l tal que $t_{l-1} < t_0 + \tau_d^0 \leq t_l$. A partir de t_l (cuando la estimación del modo \hat{q}_0 según (5.2) está disponible), solo el \hat{q}_0 -observador queda activo, y la estimación de estados queda determinada por

$$\hat{x}(t_j) = \hat{x}_{\hat{q}_0}(t_j) = \frac{1}{\#(\hat{D}_{\hat{q}_0}^{t_j})} \sum_{\xi \in \hat{D}_{\hat{q}_0}^{t_j}} \xi, \quad j \geq l. \quad (5.7)$$

Esta estimación de estados se mantiene hasta que se detecta una nueva conmutación. Donde para ese instante de tiempo se establece $\nu = 1$.

- II) $\nu > 0$. Sea $\hat{q}_{\nu-1}$ el modo estimado para $t > t_{c_{\nu-1}}$ y los estados estimados establecidos

según el $\hat{q}_{\nu-1}$ -observador. A partir de la Observación 3.14, dada una conmutación en el sistema, la misma se detecta por medio de (3.16), a tiempo $\hat{t}_s \in I_i = [t_{k_i}, t_{k_{i+1}}]$, con $\hat{t}_s > t_{c_{\nu-1}} + \tau_d^{\nu-1}$, donde $\tau_d^{\nu-1} = \tau_d(\gamma_{\nu-1}^d)$. Luego se establece $t_{c_\nu} = t_{k_{i+1}}$, $\mathcal{Q}_p = \mathcal{Q} \setminus \{\hat{q}_{\nu-1}\}$, $\gamma_m = \gamma_{i+1} \in \Gamma$, $\epsilon_\nu = \epsilon_{i+1} \in \Sigma$, y $\gamma_\nu^d \in [\frac{\gamma_\nu}{4}, \gamma_\nu]$. Finalmente, $D^* = \hat{D}_{i+1}$, donde \hat{D}_{i+1} es el conjunto-búsqueda a instante $t_{k_{i+1}}$ del $\hat{q}_{\nu-1}$ -secuenciador $\mathcal{S}_{\hat{q}_{\nu-1}}$ correspondiente al (único) observador que se encuentra en funcionamiento a tiempo $t_{k_{i+1}}$.

A partir del tiempo t_{c_ν} los bancos de q -observadores y q -descartadores, con $q \in \mathcal{Q}_p$, evolucionan en simultáneo, siendo D^* en conjunto-búsqueda inicial para todos los observadores estando la dinámica de todos ellos determinada por γ_ν y ϵ_ν . Para cada descartador del banco se establece $\hat{\Theta} = D^*$, y la dinámica queda regida por γ_ν^d , siendo $\tau_d^\nu = \tau_d(\gamma_\nu^d)$ el tiempo de descarte. La estimación de estados se calcula mediante (5.6).

Sea l tal que $t_{l-1} < t_{c_\nu} + \tau_d^\nu \leq t_l$. Del instante t_l en adelante (cuando la estimación del modo \hat{q}_ν dado por (5.2) queda disponible), únicamente el \hat{q}_ν -observador queda activo, y la estimación de estados que establecida según

$$\hat{x}(t_j) = \hat{x}_{\hat{q}_\nu}(t_j) = \frac{1}{\#(\hat{D}_{\hat{q}_\nu}^{t_j})} \sum_{\xi \in \hat{D}_{\hat{q}_\nu}^{t_j}} \xi, \quad j \geq l. \quad (5.8)$$

y esta estimación se mantiene hasta que una nueva conmutación sea detectada. En ese momento, ν se incrementa a $\nu + 1$.

Diagramas esquemáticos

Para facilitar la comprensión del principio de funcionamiento del algoritmo y como evolucionan e interactúan entre sí los diversos elementos involucrados en el proceso de estimación de estados y en la determinación del modo actual del sistema, en las Figuras 5.2 y 5.3 se presenta un esquema simplificado de como opera el algoritmo a instante inicial ($t = 0s$) y cuando se detecta una conmutación a instante \hat{t}_s , para un sistema conmutado compuesto por N subsistemas.

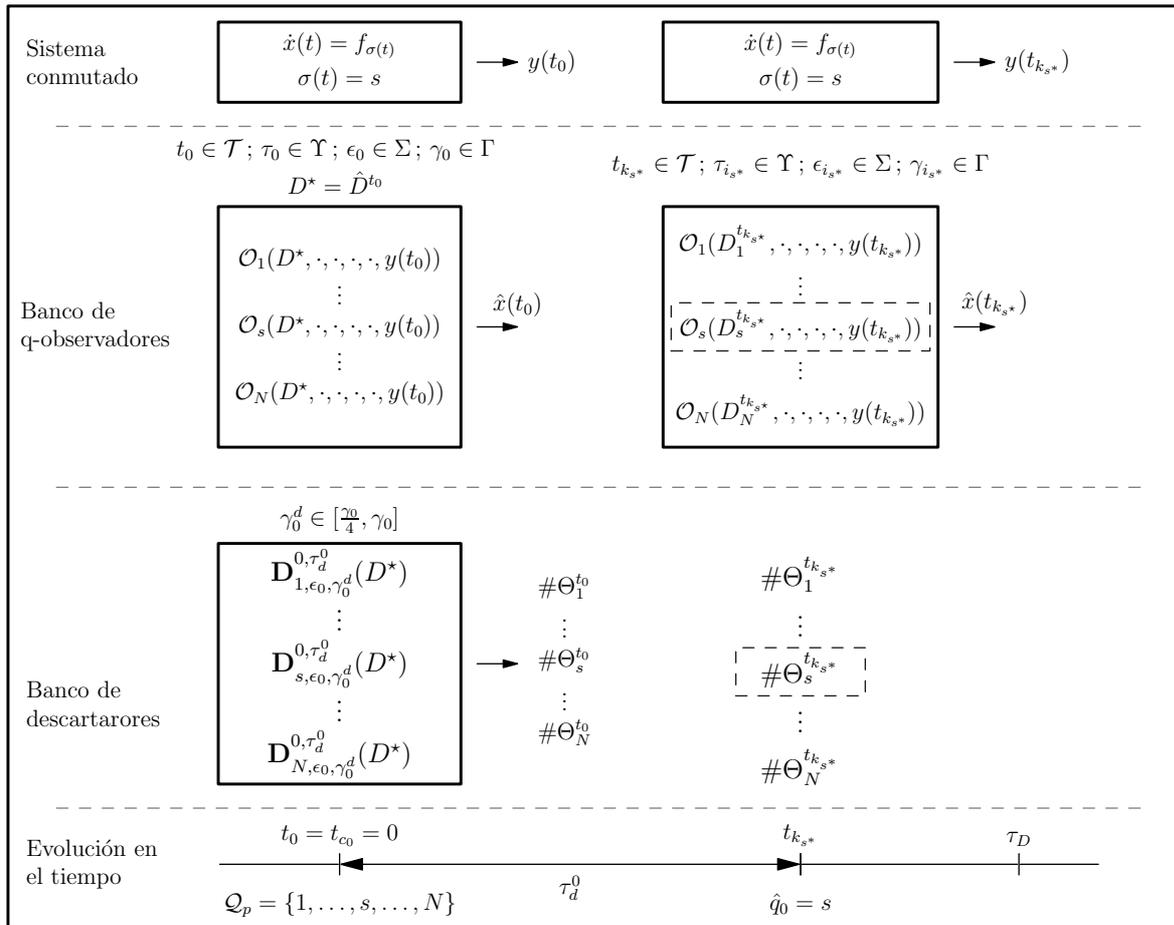


FIGURA 5.2: Diagrama esquemático de como opera el algoritmo estimación de estados y determinación de modo para sistemas con salida Lipschitz continua a instante inicial.

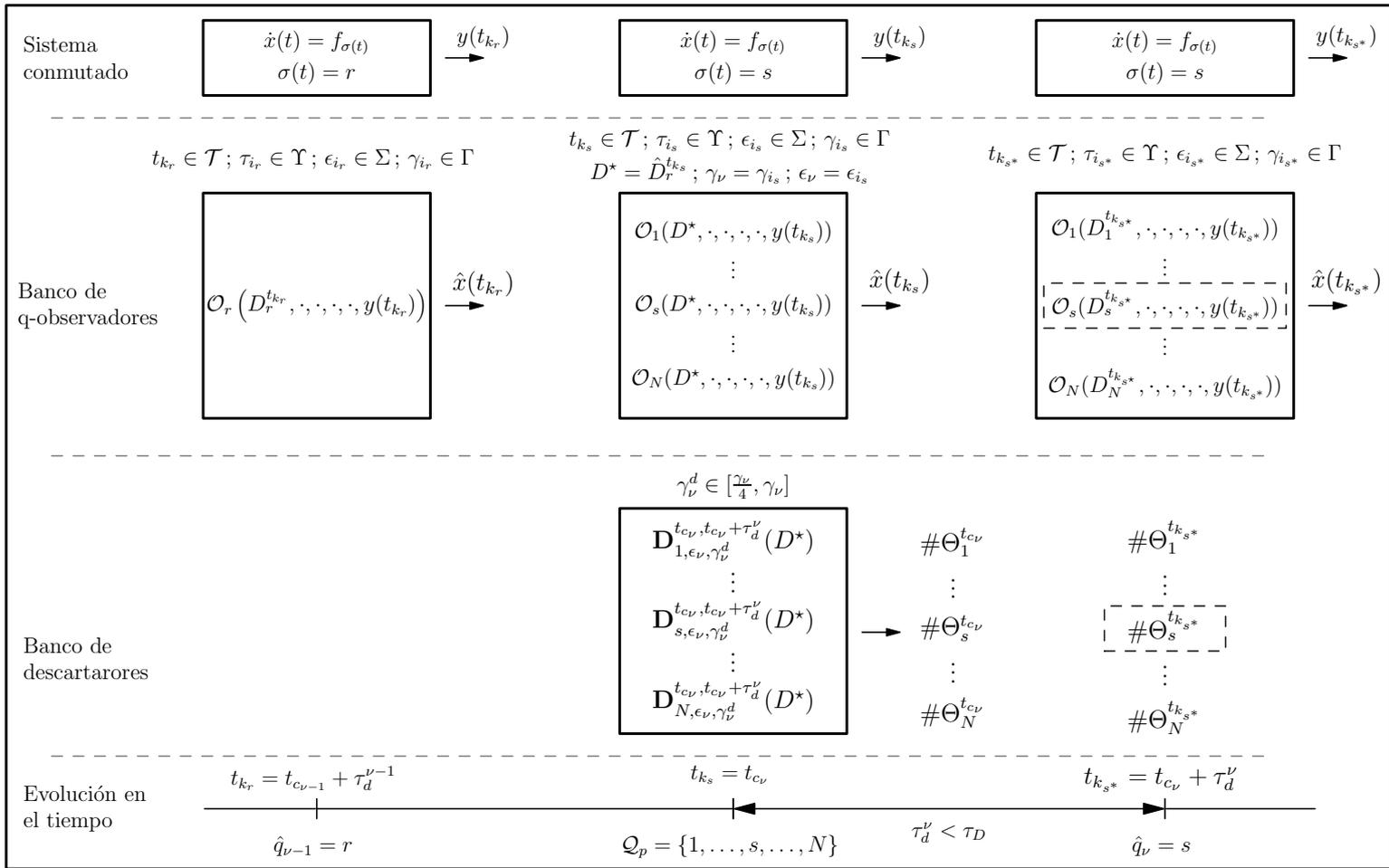


FIGURA 5.3: Diagrama esquemático de como opera el algoritmo estimación de estados y determinación de modo para sistemas con salida Lipschitz continua cuando se detecta una conmutación.

En lo que sigue se presentan dos modificaciones al algoritmo de observación desarrollado las cuales permiten: **(a)** dar solución al problema de la pérdida de detección de una conmutación, lo cual es un problema inherente a los sistemas que presentan un punto no regular en el mapa (o función) de salida. **(b)** Implementar un observador arbitrario, dentro del esquema de observación.

5.3.1. Variación del algoritmo para subsanar la no detección de una conmutación

A partir de un comportamiento presente en los sistemas Lipschitz continuos, en particular aquellos que presentan un punto no regular en el mapa o función de salida, y como el algoritmo de observación interactúa con el sistema, bajo ciertas condiciones esta no regularidad enmascara una conmutación y el algoritmo no la detecta, lo cual imposibilita la tarea de estimación, tanto del estado como del modo. A continuación se presenta formalmente el problema y una variación

del algoritmo para solucionar este problema.

Sea el instante de tiempo t_s tal que se verifica $x(t_s) \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_h$, por lo tanto $\left. \frac{dh(x(t))}{dt} \right|_{t=t_s}$ no existe. Bajo estas condiciones puede suceder que el salto que en la derivada de $y(t)$ a tiempo t_s debido a que el sistema experimenta una conmutación, que sería la ν -ésima conmutación, es enmascarada por la no-regularidad de $h(x(t))$ en el instante t_s .

Este efecto impide la detección del cambio de modo por medio de 3.16 (en base a lo expuesto en la Observación 3.14) y como consecuencia, el algoritmo no registra la conmutación. Por lo tanto, dado que el $\hat{q}_{\nu-1}$ -secuenciador no coincide con el sistema para $t_k \geq t_s$, acorde con el Lema 5.1, existe $t_{k^*} > t_s$, $t_{k^*} \in \mathcal{T}$ tal que el *conjunto-búsqueda* $\hat{D}_{\hat{q}_{\nu-1}}^{t_{k^*}}$, proporcionado por el $\hat{q}_{\nu-1}$ -secuenciador verifica $\#(\hat{D}_{\hat{q}_{\nu-1}}^{t_{k^*}}) = 0$.

Ante esta situación el algoritmo procede de la siguiente manera. Sean $t_{c_\nu} = t_{k^*}$ y $\mathcal{Q}_p = \mathcal{Q} \setminus \{\hat{q}_{\nu-1}\}$, $\gamma_\nu = \gamma_{k^*} \in \Gamma$, $\epsilon_\nu = \epsilon_{k^*} \in \Sigma$, y $\gamma_\nu^d \in [\frac{\gamma_\nu}{4}, \gamma_\nu]$. Además sea $D^* = \hat{D}_{\hat{q}_{\nu-1}}^{t_{k^*}-n}$ donde $\hat{D}_{\hat{q}_{\nu-1}}^{t_{k^*}-n}$ es el *conjunto-búsqueda* proporcionado por el $\hat{q}_{\nu-1}$ -secuenciador a tiempo $t_{k^*}-n$ donde $t_{k^*-(n+1)} < t_{k^*} - \tau_d^{\nu-1} \leq t_{k^*}-n$.

A tiempo t_{c_ν} los bancos de q -observadores y de q -descartadores con $q \in \mathcal{Q}_p$ comienzan a evolucionar en simultáneo, siendo D^* el *conjunto-búsqueda* inicial para todos los observadores. La dinámica de todos ellos está determinada por γ_ν y ϵ_ν . Por cada descartador del banco de descartadores se toma $\hat{\Theta} = D^*$, con la dinámica establecida por γ_ν^d , siendo $\tau_d^\nu = \tau_d(\gamma_\nu^d)$ el tiempo de descarte. La estimación de los estados se obtiene mediante (5.6).

Sea k tal que $t_{k-1} < t_{c_\nu} + \tau_d^\nu \leq t_k$. A partir de t_k en adelante (cuando la estimación del modo \hat{q}_ν dada por (5.2) está disponible), solo el \hat{q}_ν -observador queda activo, y la estimación de los estados es regida por (5.6) hasta que se detecta una nueva conmutación. En este instante ν se incrementa a $\nu + 1$.

Esta variación del algoritmo es puesta a prueba más adelante.

5.3.2. Variación del algoritmo para un observador arbitrario

Si bien la implementación del q -observador para estimar los estados de los subsistemas dentro del esquema de observación es la versión más genérica posible debido a las pocas condiciones que deben verificar, el esquema de observación desarrollado logra desacoplar la estimación del modo del observador implementado para estimar los estados de los subsistemas. Esto significa que, en principio, se puede utilizar este algoritmo adaptando el observador de estados según las características específicas de los subsistemas. A continuación se presenta la modificación del algoritmo

junto a los requisitos y los pasos que permiten implementar esta variación

Sea $\hat{x}(t)$ la estimación de los estados $x(t)$ del sistema (2.2) proporcionado por un observador, y $e(t) = \|x(t) - \hat{x}(t)\|$. Se supone que para tal observador existe una función β estrictamente decreciente y continua, con $\beta(0) = 1$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = 0$ tal que

$$e(t) \leq e(\tau)\beta(t - \tau) \quad \forall t, \tau \text{ con } t \geq \tau. \quad (5.9)$$

También se asume que los N observadores en el banco son de este tipo.

Las modificaciones del algoritmo son, para este caso, las siguientes.

I) $\nu = 0$.

Se modifica la condición inicial del banco de observadores, y la estimación de los estados de la siguiente manera. Se toma una misma condición inicial arbitraria $\hat{x}_q(t_0) \in \mathcal{K}$ para todos los observadores del banco de observadores. Mientras el modo no se estime, la estimación de los estados queda determinada según (5.6). Una vez que se tiene una estimación del modo \hat{q}_0 en t_k , la estimación de los estados queda determinada como $\hat{x}(t_j) = \hat{x}_{\hat{q}_0}(t_j), j \geq k$.

II) $\nu > 0$.

Se modifica el conjunto de búsqueda inicial $\hat{\Theta}$ del banco de descartadores, la inicialización de los observadores y la estimación de los estados como se presenta a continuación.

Sean $d_\nu = 2\beta(t_{c_\nu} - t_{c_{\nu-1}}) \max\{\|\xi - \xi^*\|, \xi, \xi^* \in \hat{\Theta}_{\hat{q}_{\nu-1}}^{t_{c_{\nu-1}}}\}$, y \mathcal{K} el hiper-cubo con lados de longitud d_ν de centros $\hat{x}(t_{c_\nu})$. $\hat{\Theta}$ se forma como el conjunto de centros de las celdas de radio ϵ_ν que cubren el conjunto $\mathcal{K} \cap h^{-1}(y(t_{c_\nu}))$.

Las condiciones iniciales de los observadores del banco de observadores se establecen como $\hat{x}_q(t_{c_\nu}) = \hat{x}(t_{c_\nu}), q \in \mathcal{Q}_p$. Mientras no se tenga una estimación del modo, la estimación de los estados viene dada por (5.6). Una vez que se tiene una estimación del modo \hat{q}_ν a tiempo t_l , la estimación de los estados queda descrita por $\hat{x}(t_j) = \hat{x}_{\hat{q}_\nu}(t_j), j \geq l$.

III) Pérdida de la detección de la ν -ésima conmutación.

Ante esta situación se modifica la estimación de t_{k^*} cuando se detecta la pérdida de estimación del modo, el *conjunto-búsqueda* inicial $\hat{\Theta}$ de los descartadores del banco, la inicialización de los observadores y la estimación como se describe a continuación.

Sea $e_y(t) = \|\hat{y}(t) - y(t)\|$ el error de estimación de la salida del $q_{\nu-1}$ observador. Se toma $t_{k^*} = \min\{t_k > t_{c_{\nu-1}} : e_y(t_{k+n}) - e_y(t_k) > \mu(t_{k+n} - t_k)\}$ donde μ se establece como en la Hipótesis 3.5 o 3.7, y n como se indica en la Sección 5.3.1.

Sean $d_{k^*} = 4\beta(t_{k^*} - t_{c_{\nu-1}}) \max\{\|\xi - \xi^*\|, \xi, \xi^* \in \hat{\Theta}_{\hat{q}_{\nu-1}}^{t_{c_{\nu-1}}}\}$, \mathcal{K} el hipercubo de lados de longitud d_{k^*} centrados en $\hat{x}(t_{k^*})$. Se toma $\hat{\Theta}$ como el conjunto de centros de las celdas de radio ϵ_{k^*} que cubren $\mathcal{K} \cap h^{-1}(y(t_{k^*}))$.

Siguiendo los lineamientos descritos en la Sección 5.3.1 y con $t_{c_\nu} = t_{k^*}$, la condición inicial de los observadores del banco de observadores se establece como $\hat{x}_q(t_{c_\nu}) = \hat{x}(t_{c_\nu})$, $q \in \mathcal{Q}_p$. Mientras no se tiene la estimación del modo, la estimación de estados se calcula por medio de (5.6). Una vez que \hat{q}_ν está disponible a tiempo t_l , la estimación de los estados se actualiza según $\hat{x}(t_j) = \hat{x}_{\hat{q}_\nu}(t_j)$, $j \geq l$.

5.4. Ejemplos

En lo que sigue se presentan varios ejemplos numéricos con el fin de aplicar el algoritmo desarrollado en este capítulo a un sistema conmutado no lineal Lipschitz continuo autónomo con función de salida Lipschitz continua y validar su desempeño en relación al objetivo de observación planteado. Como se mencionó a lo largo de este capítulo nos valemos de lo desarrollado en el Capítulo 3 para la detección y estimación de una conmutación en sistemas con salida Lipschitz continua.

Para analizar y mostrar el funcionamiento del algoritmo en su totalidad nos valemos de lo desarrollado en la Sección 3.6 dándole continuidad a ese ejemplo, ya que el sistema descrito por (3.26) junto a la función de salida (3.27) se enmarca dentro de los sistemas con salida Lipschitz continua ya que la función de salida presenta puntos de no regularidad. Con el fin de evaluar los diversos aspectos del algoritmo y las variaciones del mismo, se somete al sistema (3.26)-(3.27) a diversas señales de conmutación y condiciones iniciales.

Ya que los ejemplos que se presentan a continuación se basan en el mismo sistema, siguiendo la misma metodología aplicada en los ejemplos de los capítulos previos, primero se validan todas las hipótesis y propiedades que debe verificar el sistema, las cuales permiten aplicar el algoritmo, para luego diseñar los parámetros del mismo.

Para probar la γ - ϵ -observabilidad de cada subsistema del sistema (3.26)-(3.27) consideramos el mapa de salida $\mathcal{O}_q(x) = \{L_{f_q}^j h(x), j = 0, \dots, 2; q = 1, \dots, 4\}$ para cada campo vectorial y

cada región del espacio de estados donde la función de salida es lineal:

$$\mathcal{O}_1(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 - x_3 \\ \frac{x_2 (x_3)^2}{5} + 2 x_3 - 2 x_1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2x_3 \\ 2 x_1 - 2 x_3 \\ \frac{x_2 (x_3)^2}{10} + x_3 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_2(x) = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -2(x_3)^3 + 2x_1 \\ 2(x_2)^2 x_3 - 6(x_3)^2 (-x_3)^3 + x_1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_3 \\ -(x_3)^3 + x_1 \\ (x_2)^2 x_3 - 3(x_3)^2 (-x_3)^3 + x_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_3(x) = \begin{bmatrix} 2 x_3 \\ 2 x_1 - 6 \tanh(x_3) \\ 2(x_2 - x_1) + 6 (\tanh^2(x_3) - 1) (x_1 - 3 \tanh(x_3)) + 4 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 - 3 \tanh(x_3) \\ x_2 - x_1 + 3 (\tanh^2(x_3) - 1) (x_1 - 3 \tanh(x_3)) + 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_4(x) = \begin{bmatrix} 2 x_3 \\ 2 x_1 - 8 \sin(x_3) \\ 2 - 8 \cos(x_3) (x_1 - 4 \sin(x_3)) - 2 x_1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 - 4 \sin(x_3) \\ 1 - 4 \cos(x_3) (x_1 - 4 \sin(x_3)) - x_1 \end{bmatrix}$$

Dado que cada matriz de observabilidad $d\mathcal{O}_q(x) = J_{\mathcal{O}_q}(x)$, es de rango completo, cada subsistema es débilmente localmente observable para cada región del espacio de estado donde la función de salida (3.26) es lineal. Dado que el subconjunto del espacio de estados donde no se verifica esta propiedad (donde la función de salida no es diferenciable) es de medida cero, cada subsistema es genéricamente localmente débilmente observable y consecuentemente $\gamma - \epsilon$ -observable.

5.4.1. Ejemplo 1

En este primer ejemplo se muestra el funcionamiento del algoritmo, principalmente cómo la detección y estimación de una conmutación interactúa con la estimación de los estados y del modo y cómo se articulan las diversas partes que componen el algoritmo de observación. Para ello se toma como señal de conmutación $\sigma_1(t)$, descrita por la Tabla 3.5, como condición inicial para el sistema $x_0 = (-2,9, -1,02, 0,5)$ y con un objetivo en el error final de estimación (en el diseño de los q -observadores) de $\epsilon_* = 0,01$.

Para diseñar los parámetros asociados a los q - γ - ϵ -descartadores del banco de descartadores y de los q -observadores, se procedió a calcular de forma aproximada, mediante simulación, el conjunto \mathcal{X} por medio de un procedimiento similar al descrito en el Ejemplo de la Sección 4.3. A continuación se detalla el procedimiento aplicado en este ejemplo.

Se asume que todos los posibles estados iniciales del sistema están contenidos en un cubo \mathcal{X}_0 de centro x_0 y de lados de longitud 9 en dirección de los ejes x_1, x_2 . Se seleccionan al azar las condiciones iniciales $\{x_0^j, j = 1, \dots, 9702\}$ dentro del conjunto \mathcal{X}_0 . En simultáneo se generan aleatoriamente señales de conmutación $\{\sigma_i, i = 1, \dots, 50\}$ con un tiempo de permanencia (dwell time) $\tau_D = 1$ s y duración de 10 s. Para cada condición inicial y cada señal de conmutación, se genera una trayectoria $x(t, \sigma_i, x_0^j)$ y se computa el valor $\bar{x}_i^j = \max_{0 \leq t \leq 10} \|x(t, \sigma_i, x_0^j)\|$. Finalmente, a partir de estos valores se determinan los parámetros

$$\bar{x} = \frac{1}{15000} \sum_{j=1}^{50} \sum_{i=1}^{300} \bar{x}_i^j = 8,84 \quad \text{y} \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{15000} \sum_{j=1}^{50} \sum_{i=1}^{300} (\bar{x}_i^j - \bar{x})^2} = 3,66 \quad (5.10)$$

que permiten obtener una estimación de \mathcal{X} según:

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq \bar{x} + 2\sigma_x = 16,16\}. \quad (5.11)$$

A partir de esta estima de \mathcal{X} , para determinar los parámetros del sistema, se construye una malla de puntos $\{\xi_j, j \in \mathcal{J}\}$ sobre el conjunto \mathcal{X} . Luego para cada campo vectorial f_q que compone el sistema (3.26), la constante de Lipschitz L_{f_q} se computa como $L_{f_q} = \max_{j \in \mathcal{J}} \|J_{f_q}(\xi_j)\|$, donde $J_{f_q}(\xi_j)$ es la matriz Jacobiana de f_q evaluada en cada ξ_j . De forma similar, la norma de cada f_q se obtiene según $\|f_q\| = \max_{j \in \mathcal{J}} \|f_q(\xi_j)\|$. Los resultados de este proceso se resumen en la Tabla 5.1.

Finalmente las constantes del sistema se toman como:

$$L_f = \max_{q \in \mathcal{Q}} L_{f_q} = 576,5 \quad \text{y} \quad \|f\| = \max_{q \in \mathcal{Q}} \|f_q\| = 3103,7 \quad (5.12)$$

TABLA 5.1: Detalle de las constantes dinámicas asociadas al sistema (3.26) - (3.27) discriminadas por modo.

q	1	2	3	4
L_{f_q}	19,87	576,4	244,1	3,998
$\ f_q\ $	280,8	3103,7	734	21,09

Basado en estos valores y a partir del error de estimación deseado ϵ_* , de acuerdo con [20] los parámetros iniciales para la grilla de puntos sobre D^{t_0} y la dinámica inicial asociada al proceso de descarte se establecen como $\epsilon_0 = 0,1858$ y $\gamma_0 = 0,4087$ respectivamente, siendo $K = 22$ y $\Delta T = 7,54 \times 10^{-6} s$ según la Observación 5.8. Para el banco de descartadores asociado a la estimación de los modos, la dinámica de descarte queda determinada mediante $\gamma_{\nu}^d = \frac{\gamma_{\nu}}{2}$.

Aunque estos valores de K y ΔT aseguran la convergencia del observador y resuelven los problemas de descarte y consistencia, resultan demasiado conservadores. En simulación se encontró que con $K = 60$ y $\Delta T = 0,005 s$ se mantiene un buen desempeño del observador.

En cuanto a los parámetros para la detección de conmutaciones, se elige τ^* , el tiempo de cada ventana I_i , como $\tau^* = 2 \Delta T = 0,01 s$, mientras que con $m = 1 \times 10^4$ y $n = 8$ se obtiene un buen desempeño en las simulaciones.

Finalmente, para el cálculo de τ_d^{ν} en el Lema 5.1, se utiliza el valor aproximado de μ asociado a la ventana de tiempo donde se detectó un salto mediante (3.13). Por lo tanto, si $\hat{t}_s \in I_i$, se tiene que $\tau_d^{\nu} = \frac{3\gamma_{\nu}}{\mu_i}$ donde μ_i se calcula mediante (3.28).

La simulación comienza en $t_0 = 0$ con la condición inicial x_0 y $\mathcal{K} = \mathcal{X}_0 = \mathcal{X} \cap h^{-1}(y(0)) = [-5,4, -1,4] \times [-3,02, 3,28] \times \{1,6\}$. A continuación se presentan y se analizan los resultados que arroja la simulación. En particular se hace foco en el análisis de la estimación de estados y modo, dado que los resultados que arroja la estrategia para la estimación y detección de un instante de conmutación ya fueron presentados y analizados en el Capítulo 3.

La Figura 5.4 presenta $\sigma_1(t)$ junto a su estimación $\hat{\sigma}_1(t)$, detallada en la Figura 5.5 (A). Se observa que para $t \in [0; \tau_d^0)$, con $\tau_d^0 = 0,6130 s$, $\hat{\sigma}_1(t) = 0$ ya que para este intervalo de tiempo no se dispone de información sobre la señal de conmutación. Notar que se obtiene una estimación del modo recién a tiempo $t = \tau_d^0$ ya que no se produce ninguna conmutación previamente. La

estimación viene dada por (5.2) donde para ese instante más de un $q - \gamma - \epsilon$ -descartador del banco de descartes con $q \in \mathcal{Q}$ verifica $\#\Theta_q^{\tau_d^0} \neq 0$: más precisamente $\#\Theta_3^{\tau_d^0} = 51$ y $\#\Theta_4^{\tau_d^0} = 21$. Esto se aprecia claramente en la Figura 5.5 (B) donde se presenta la evolución temporal de $\#\Theta_q^t$ para $t \in [0; \tau_d^0)$ con $q \in \mathcal{Q}$. Adicionalmente se presentan dos ejemplos de detección de modo, en las Figuras 5.6 y 5.7. La primera conmutación ($\nu = 1$ en el algoritmo), donde el modo cambia de $q = 3$ a $q = 1$ en $t = 1,2608 s$ se muestra en la Figura 5.6 (B). La evolución del banco de descartadores comienza a $t_{c_1} = 1,265 s$ y evoluciona hasta $t_{c_1} + \tau_d^1 = 1,7889 s$ dado que $\tau_d^1 = 0,5239 s$, y el modo se estima a $t_1 = 1,435 s$. En este instante solo $\Theta_1^{t_1} \neq \emptyset$, como se muestra en 5.6 (B). En la Figura 5.7 (A) se muestra el cambio de modo de $q = 1$ a $q = 4$ en $t_s = 3,5225 s$. En este caso $t_{c_2} = 3,525 s$, $t_{c_2} + \tau_d^2 = 3,925 s$ con $\tau_d^2 = 0,4 s$ y en la Figura 5.7 (B) muestra que la estimación se realiza en $t_2 = 3,5650 s$ cuando solo $\#\Theta_4^{t_2} \neq 0$.

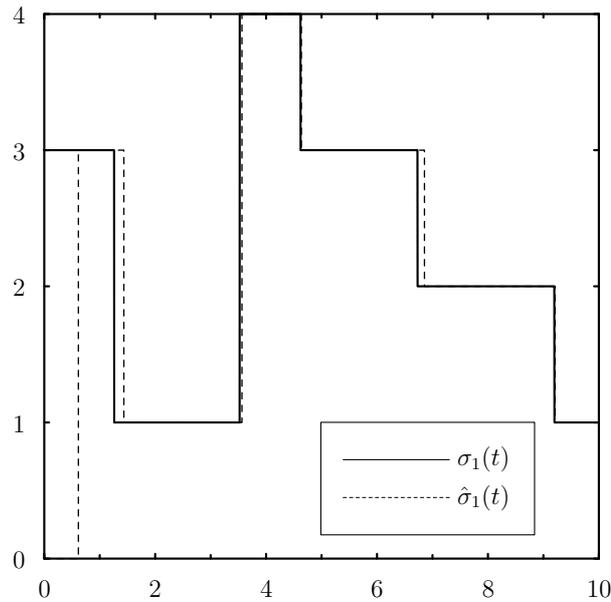


FIGURA 5.4: Señal de conmutación estimada $\hat{\sigma}_1(t)$.

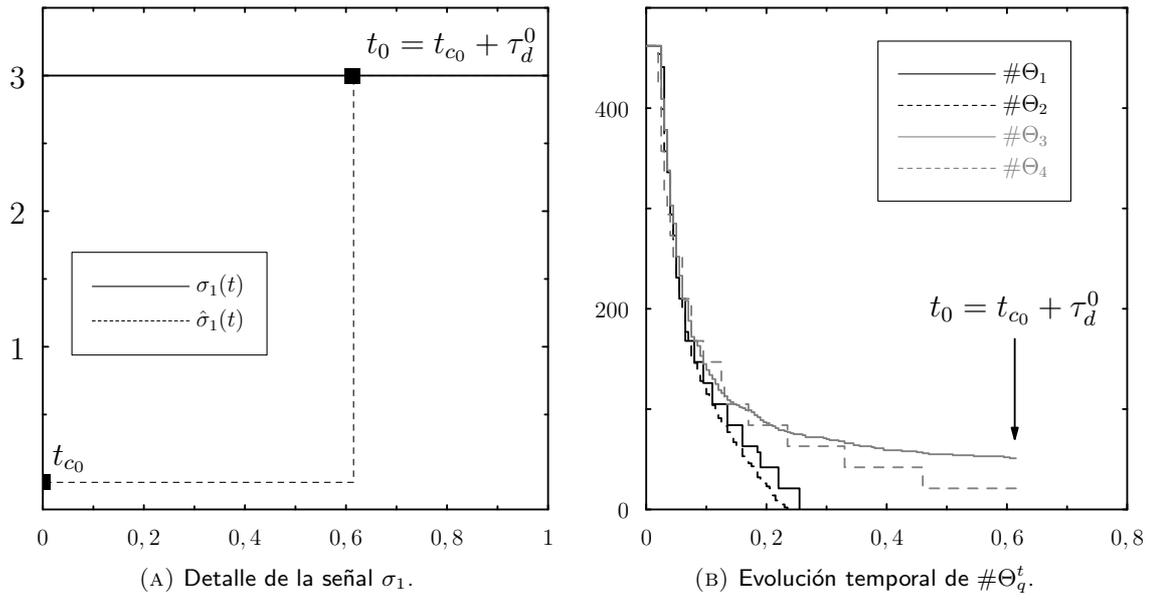


FIGURA 5.5: Detalle del esquema de detección de modo para $\sigma_1(t)$ a instante inicial, $t_s = 0$.

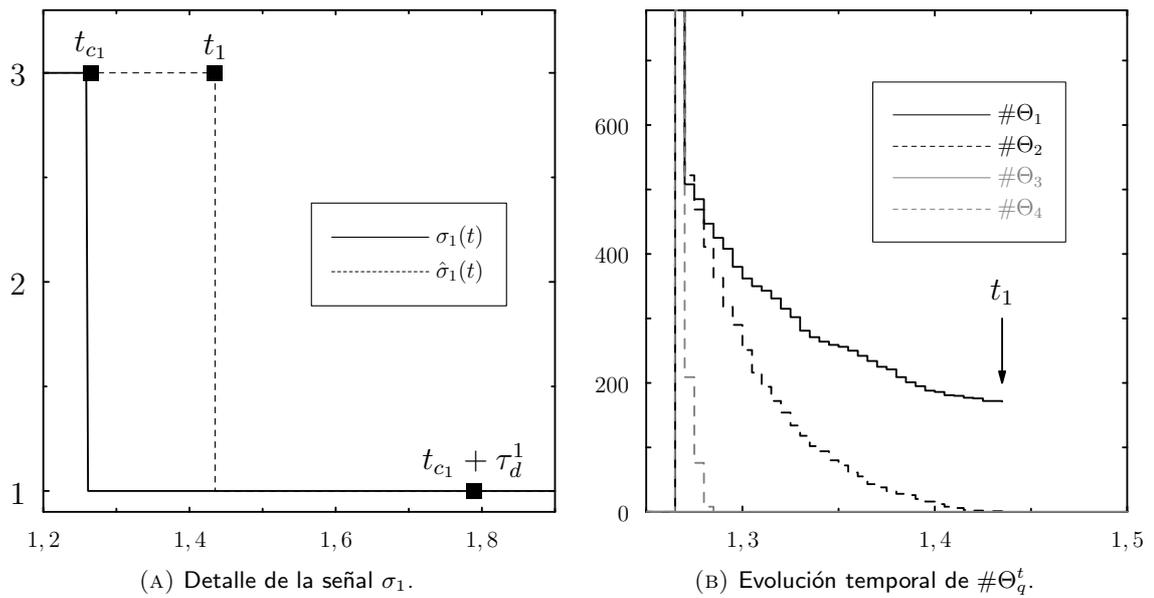


FIGURA 5.6: Detalle del esquema de detección de modo para $\sigma_1(t)$ a instante $t_s = 1,2608$.

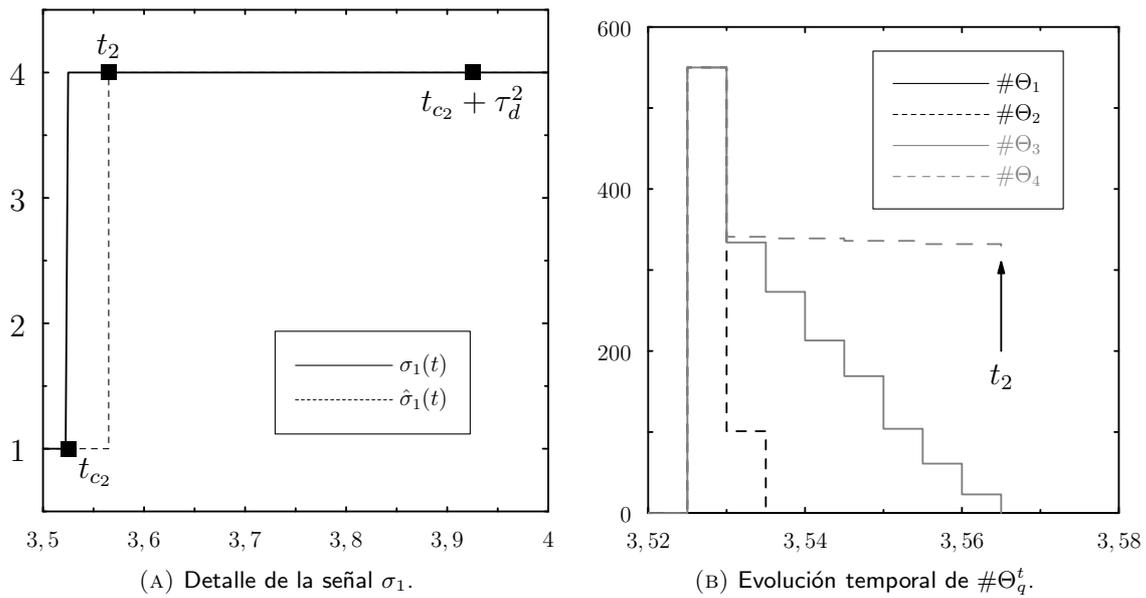


FIGURA 5.7: Detalle del esquema de detección de modo para $\sigma_1(t)$ a instante $t_s = 3,5225s$.

La estimación de estado proporcionada por el banco de q -observadores se presenta en las Figuras 5.8 a 5.11. La Figura 5.8 muestra la evolución de $x_1(t)$ y de su estimación $\hat{x}_1(t)$, mientras que la Figura 5.9 presenta el valor absoluto del error de estimación para este estado. En esta figura se puede apreciar la degradación en el comportamiento del error de estimación cerca de los tiempos de conmutación. Este hecho se debe a que la estimación de los estados viene dada por (5.6), donde se tienen en cuenta las estimaciones de los observadores correspondientes a los modos incorrectos. La Figura 5.9 (B) muestra que el error final de estimación es, como se esperaba, del orden de 0,01. Las estimaciones asociadas al estado $x_2(t)$ se presenta en las Figuras 5.10 y 5.11 (A), donde se observa un comportamiento similar a lo analizado para x_1 . En referencia al estado $x_3(t)$ no se presenta ninguna figura, ya que $x_3(t)$ tiene una relación uno a uno con la salida.

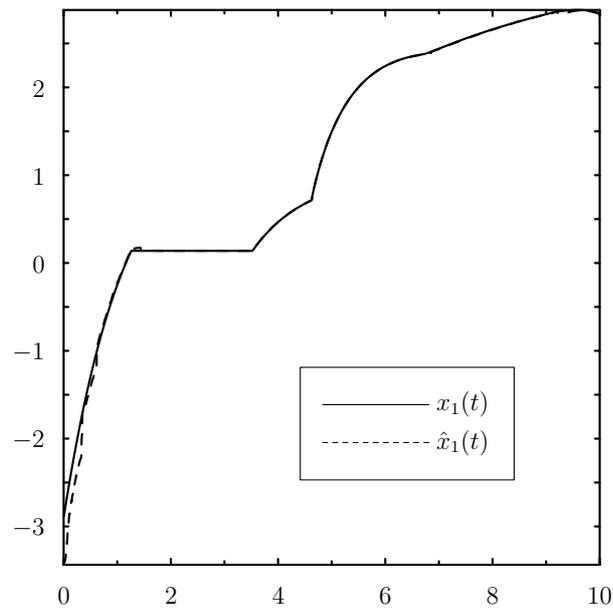


FIGURA 5.8: Evolución temporal de x_1 y \hat{x}_1 asociados al sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_1 .

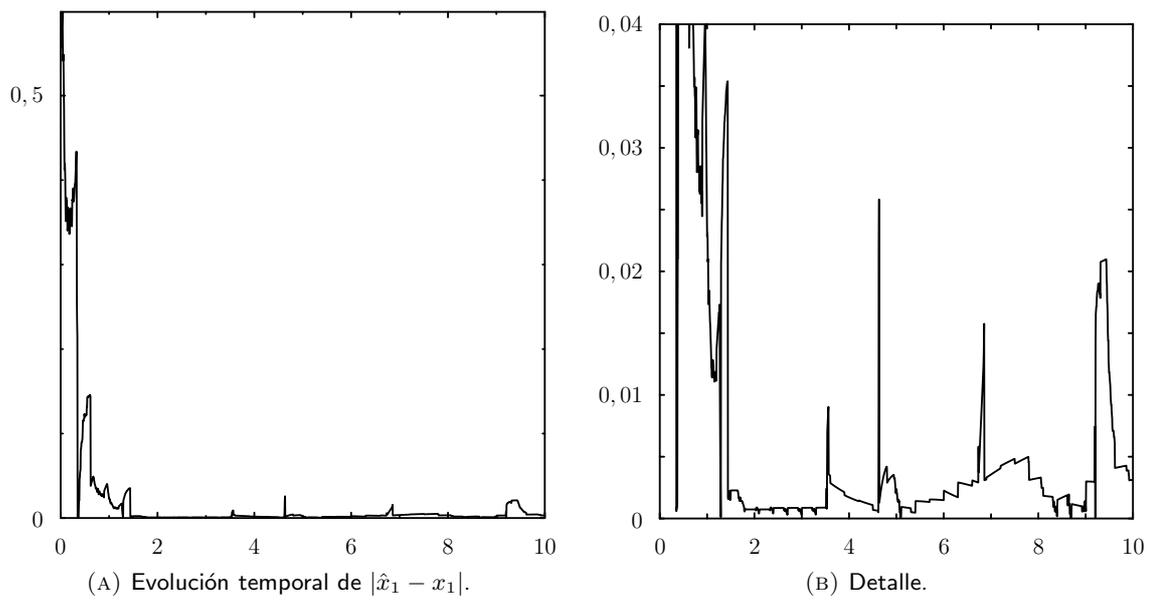


FIGURA 5.9: Norma del error de estimación para el estado x_1 .

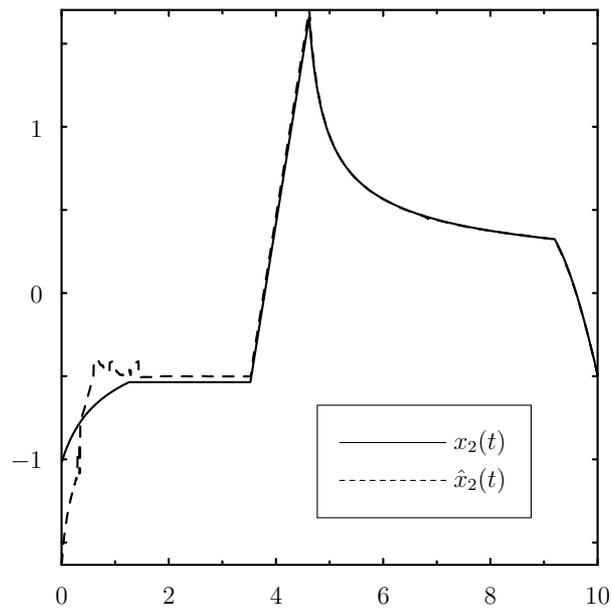


FIGURA 5.10: Evolución temporal de x_2 y \hat{x}_2 asociados al sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_1 .

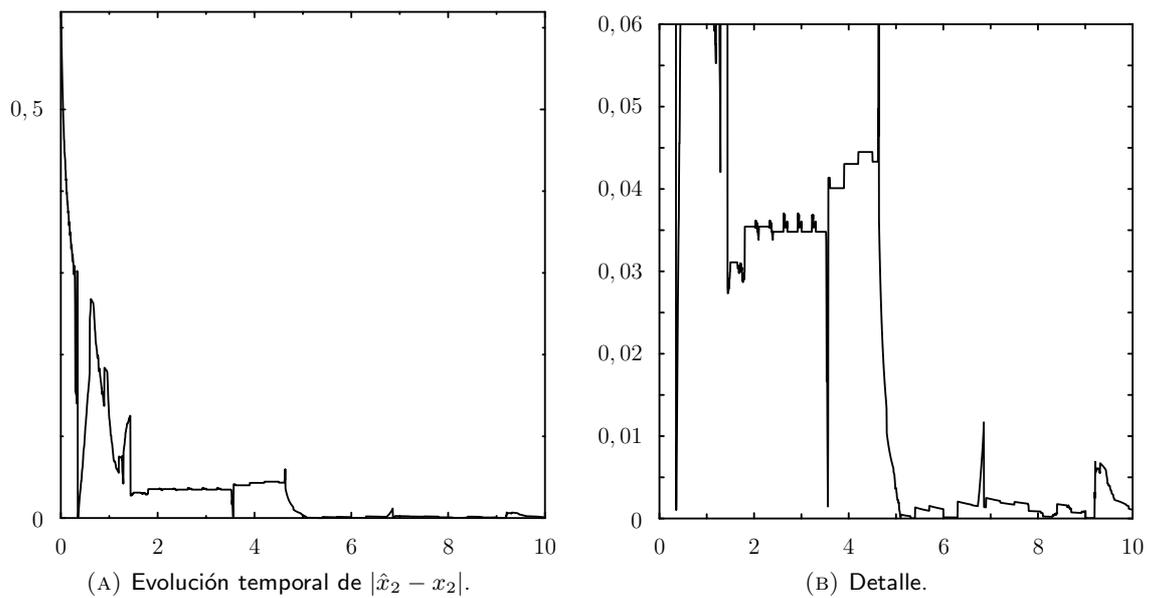


FIGURA 5.11: Norma del error de estimación para el estado x_2 .

En la Figura 5.12 (A) se presenta la norma del error de estimación de estado para toda la simulación, mientras que la Figura 5.12 (B) presenta una versión detallada del mismo. Se puede observar que el error de estimación se mantiene por debajo del límite de error final $\epsilon_* = 0,01$ a partir de $t = 5s$, excepto en la vecindad de los tiempos de conmutación donde se produjeron las fluctuaciones mencionadas anteriormente.

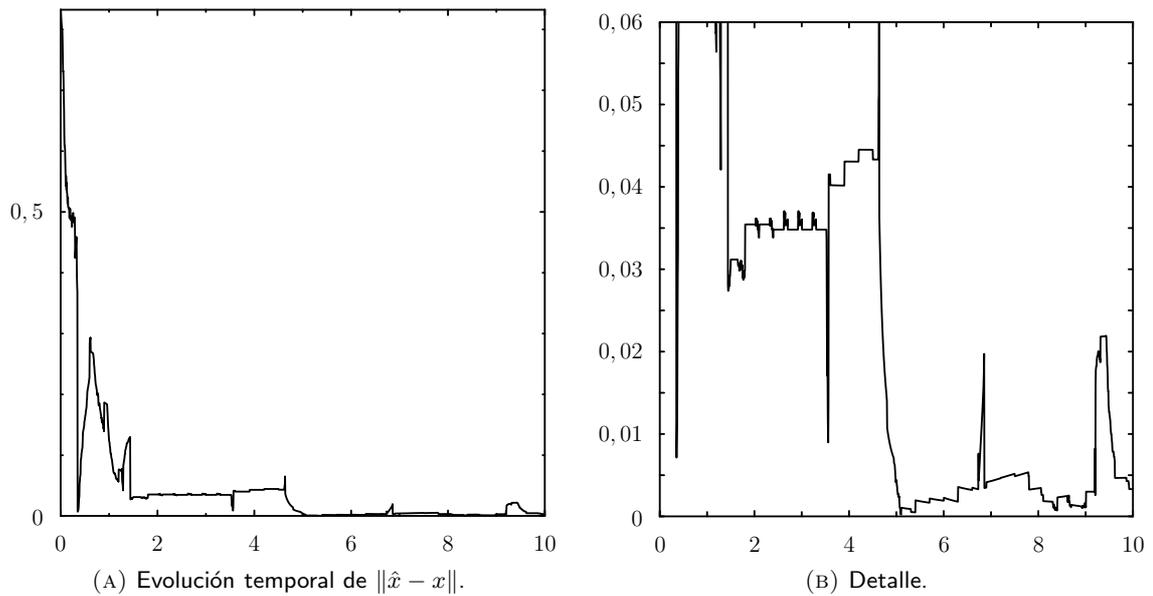


FIGURA 5.12: Norma del error de estimación de estados asociados al sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_1 .

A continuación se presentan algunas figuras que muestran cómo opera el *banco de observadores* en el proceso de proporcionar una estimación de los estados del sistema dentro del algoritmo desarrollado. La Figura 5.13 (A) muestra la evolución del estado x_1 y de las estimaciones dadas por cada q -observador $\hat{x}_{1,q}$, $q \in \mathcal{Q}$, de $t = 0$ a $t = 1s$, las cuales vienen dadas por (5.5). La Figura 5.13 (B) muestra las mismas evoluciones correspondientes al estado x_2 . Se observa como en el intervalo $[0, \tau_d^0)$ los q -observadores interactúan de acuerdo a (5.6) para proporcionar \hat{x}_1 y \hat{x}_2 . Para $t \geq \tau_d^0$, una vez que se detecta el modo $\hat{q} = 3$, la estimación queda establecida por el correspondiente \hat{q} -observador (el tercer observador) según (5.7): $\hat{x}_1 = \hat{x}_{1,3}$ y $\hat{x}_2 = \hat{x}_{2,3}$.

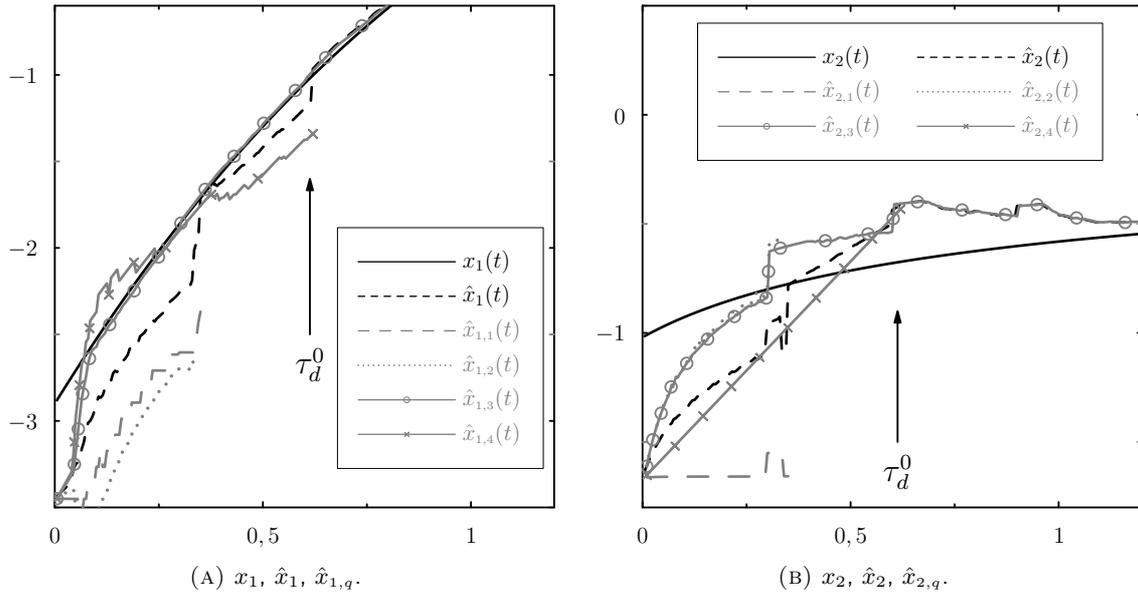


FIGURA 5.13: Evolución temporal de la salida de los q -observadores y sus estimaciones para el sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_1 .

A continuación se presentan algunas figuras que muestran como interactúan los *conjuntos de búsqueda de los q -observadores* del banco de q -observadores para proporcionar una estima de los estados. Para simplificar el estudio, se presentan los resultados asociados a la estimación de un solo estado. Las Figuras 5.14 (A) a (D) presentan el proceso de descarte asociado a los q -observadores, donde se observa la evolución temporal de $\mathcal{S}_q^{(2)} = \{\xi_2 : \xi \in \mathcal{S}_q\}$ de $t = 0$ s hasta el primer cambio a 1,2608 s. Se observa que para cada q , $\mathcal{S}_q^{(2)}$ es el conjunto de las segundas componentes de cada conjunto de \mathcal{S}_q . Por lo tanto, los $\mathcal{S}_q^{(2)}$ están asociados a $\hat{x}_{2,q}$. La concatenación de descartadores (que involucra el proceso de refinamiento de la grilla en los conjuntos de búsqueda) ocurre en cada $\Delta\tau = K \Delta T = 0,3$ s y está asociada con el conjunto Υ en Observación 5.8. Las Figuras 5.14 (A) y (B) muestran que poco después de la primera concatenación, el proceso de descarte da como resultado $\mathcal{S}_1^{(2)} \approx \emptyset$ y $\mathcal{S}_2^{(2)} \approx \emptyset$. Como se muestra en la Figura 5.14 (D), poco después la segunda concatenación $\mathcal{S}_4^{(2)} \approx \emptyset$.

La reducción de los *conjuntos-búsqueda* a un entorno reducido del estado actual del sistema se puede apreciar con más detalle en la Figura 5.14 (C), ya que el sistema está evolucionando con $q = 3$. Las Figuras también muestran que para $t \in [0; \tau_d^0]$ la estimación del estado es proporcionada por cada q -observador de acuerdo con (5.5), y que para $t \geq \tau_d^0$, cuando $\hat{q} = 3$, la estimación del estado evoluciona según \mathcal{S}_3 .

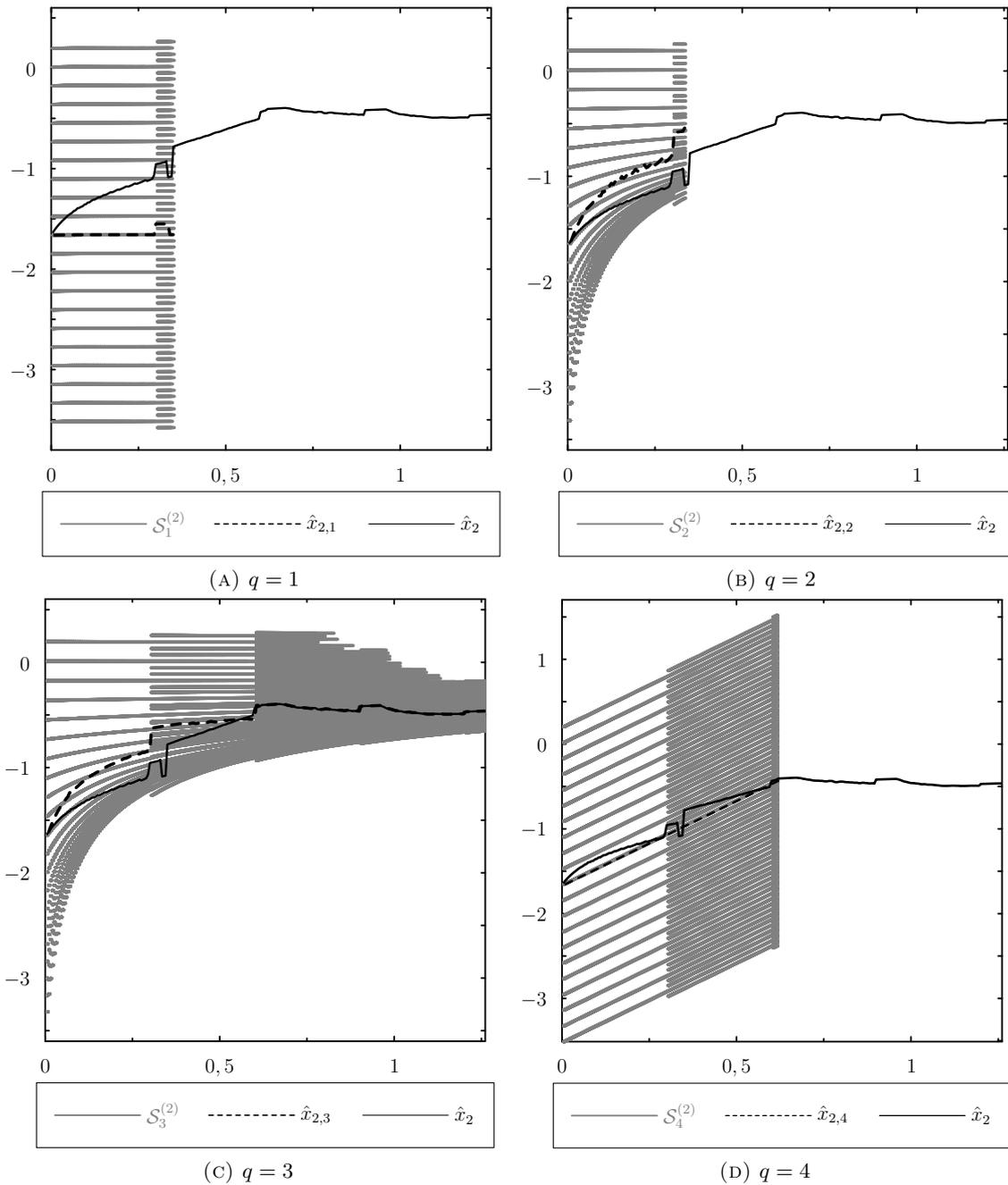


FIGURA 5.14: Evolución temporal de los conjuntos *búsqueda de los q -secuenciadores* para el sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_1 .

Finalmente, las Tablas 5.2 y 5.3 presentan información adicional que muestra el funcionamiento del algoritmo y, respectivamente, cómo evolucionaron los valores de algunos de los parámetros asociados.

TABLA 5.2: Resumen de los resultados adicionales de la simulación, para sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_1 .

$\nu ; k$	0	1	2	3	4	5
$t_{c_\nu} [s]$	0	1,265	3,525	4,625	6,735	9,2
$t_k [s]$	0,613	1,435	3,565	4,635	6,855	9,21
$\tau_d^\nu [s]$	0,613	0,5239	0,4	0,2862	0,3909	0,2424
ϵ_ν	0,1858	0,0096	0,0067	0,0067	0,0067	0,0067
γ_ν	0,4087	0,0211	0,0147	0,0147	0,0147	0,0147
γ_ν^d	0,2043	0,0106	0,0073	0,0073	0,0073	0,0073

TABLA 5.3: Evolución de γ_i y ϵ_i asociados a los q -observadores para sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_1 .

i	0	1	2	3	4	≥ 5
ϵ_i	0,1858	0,0886	0,0422	0,0201	0,0096	0,0067
γ_i	0,4087	0,1948	0,0929	0,0443	0,0211	0,0147

5.4.2. Ejemplo 2.

Una vez analizado el comportamiento general de la estrategia de observación, en la simulación planteada para este segundo ejemplo, se busca mostrar y analizar cómo el algoritmo desarrollado trata el problema de la detección de una falsa conmutación en cuanto a la estimación del modo y los estados. En este caso los resultados que se presentan continuación son una continuación del Ejemplo 3.6.2, donde al sistema (3.26)-(3.27) se lo somete a la señal de conmutación $\sigma_2(t)$ descrita por la Tabla 3.7 partiendo de la misma condición inicial x_0 .

A continuación se presentan los resultados asociados a la estimación del modo y los estados ya que los asociados a la estimación y detección del instante de conmutación ya fueron presentados y analizados en Capítulo 3. Si bien el análisis que se presenta a continuación repite algunos aspectos del ejemplo previo, se agregan con el fin de reforzar la comprensión de los pasos que desarrolla el algoritmo en la estimación de modo y estados. Se muestra como responde el algoritmo frente a una variación en la dinámica del sistema debido a un cambio en la señal de conmutación como se mencionó previamente.

La Figura 5.15 (A) muestra $\sigma_2(t)$ y su estimación $\hat{\sigma}_2(t)$ y se puede apreciar claramente que el salto en $t_{i^*} \approx 2,3714 s$ debido a la no diferenciabilidad de la función de salida no se valida como una conmutación (ver Ejemplo 3.6.2). La Figura 5.15 (B) muestra en detalle un entorno de $t = 0$. Para $t \in [0; \tau_d^0)$, $\hat{\sigma}_2(t) = 0$ ya que no se tiene información de la señal de conmutación antes de la

estimación del modo en $t = \tau_d^0$. Para este instante, más de un $q - \gamma - \epsilon$ -descartador con $q \in \mathcal{Q}$ verifica $\Theta_q^{\tau_d^0} \neq \emptyset$. Adicionalmente la Figura 5.16 presenta dos ejemplos más de la estimación del modo. En la Figura 5.16 (A) presenta la primera conmutación en $t = 1,2475 s$ (con $\nu = 1$ en el algoritmo), donde el modo cambia de $q = 1$ a $q = 3$. Para esta conmutación la evolución temporal del banco de descartadores comienza en $t_{c_1} = 1,25 s$ hasta $t_{c_1} + \tau_d^1 = 1,3264 s$ dado que $\tau_d^1 = 0,0764 s$, por lo que el modo se estima en $t_1 = 1,27 s$ donde solo $\Theta_3^{t_1} \neq \emptyset$. La Figura 5.16 (B) presenta el cambio de modo de $q = 4$ a $q = 2$ a tiempo $t_s = 4,0017 s$. Para este caso $t_{c_3} = 4,005 s$, $t_{c_3} + \tau_d^3 = 4,2216 s$ con $\tau_d^3 = 0,7269 s$ y la estimación se lleva a cabo a tiempo $t_3 = 4,025 s$.

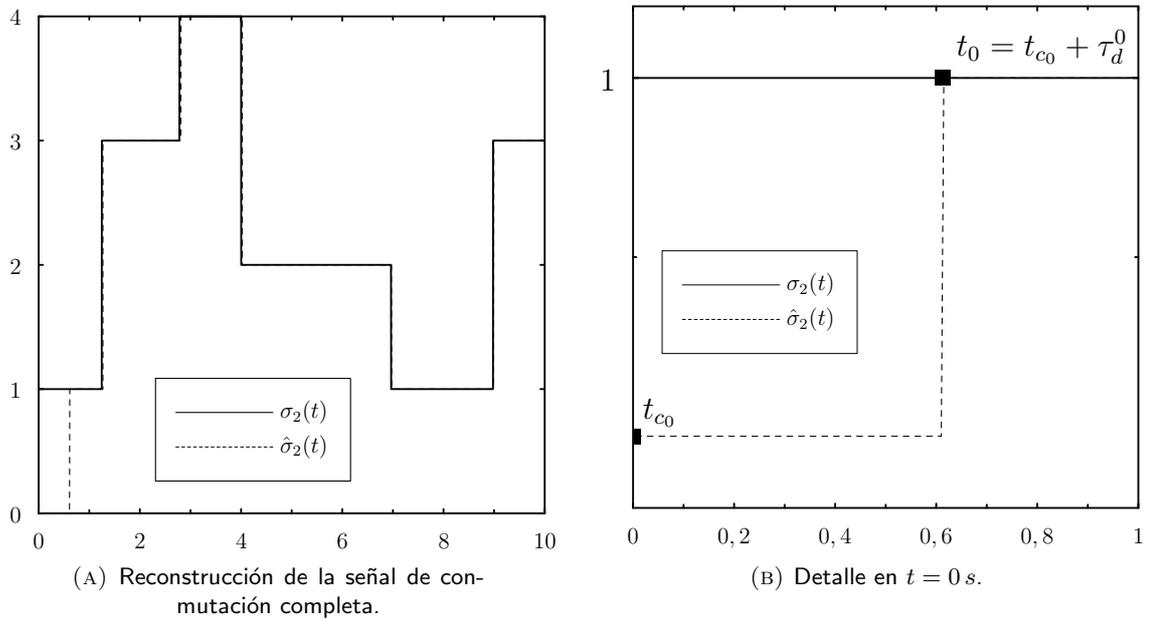


FIGURA 5.15: Señal de conmutación estimada $\sigma_2(t)$ y detalle del proceso de estimación a estado inicial $t = 0 s$.

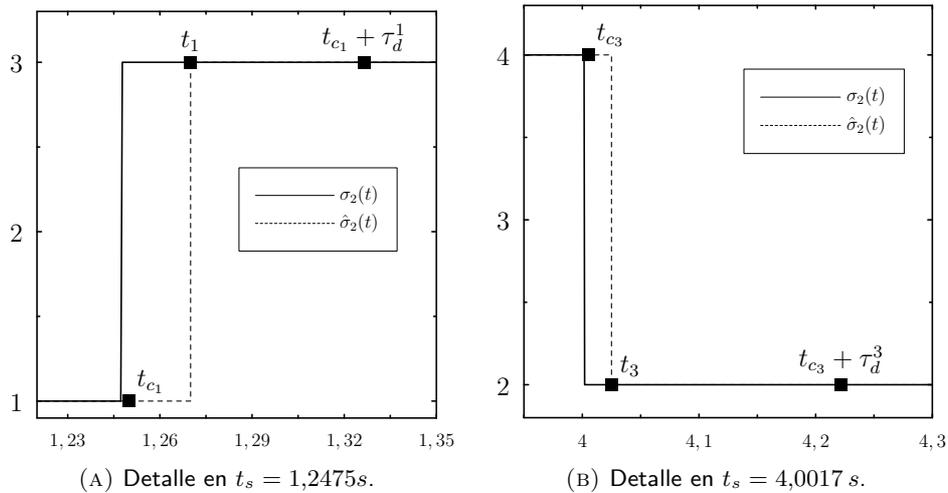


FIGURA 5.16: Detalle del proceso de estimación de modo para $\sigma_2(t)$ para diversos instantes de \hat{t}_s .

La estimación de los estados, proporcionada por el banco de q -observadores, se puede observar en la Figura 5.17: La Figura 5.17 (A) muestra la evolución de $x_1(t)$ y su estimación $\hat{x}_1(t)$ mientras que la Figura 5.17 (B) muestra $x_2(t)$, y su estimación $\hat{x}_2(t)$. En referencia al estado $x_3(t)$ no se muestra ninguna gráfica, ya que $x_3(t)$ guarda una relación uno a uno con la salida.

Finalmente la Figura 5.18 (A) muestra la evolución temporal de la norma del error de estimación de estados y en la Figura 5.18 (B) presenta una versión detallada del mismo, en donde se observa que se cumple el objetivo de un error de estimación establecido por $\epsilon_* = 0,01$ en tiempo finito. También observan las fluctuaciones entono de los instantes de conmutación.

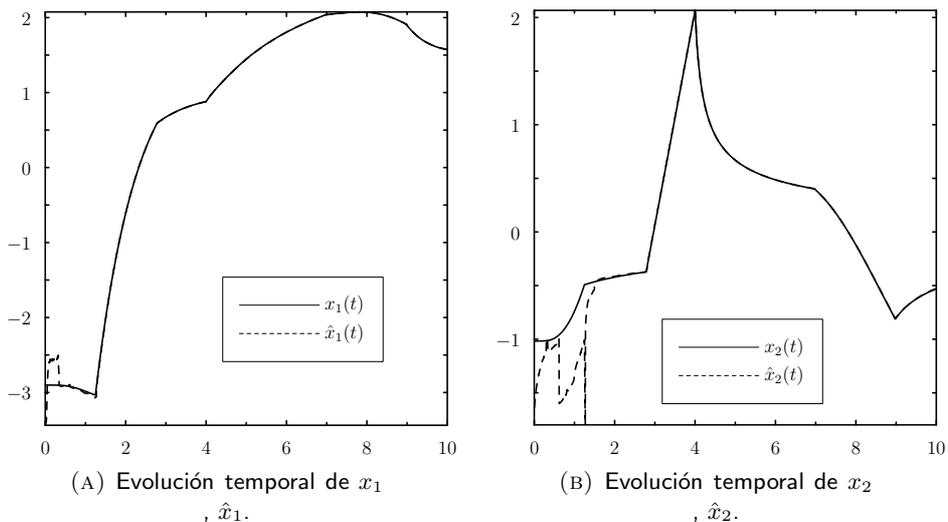


FIGURA 5.17: Evolución temporal de los estados y sus estimaciones asociados al sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_2 .

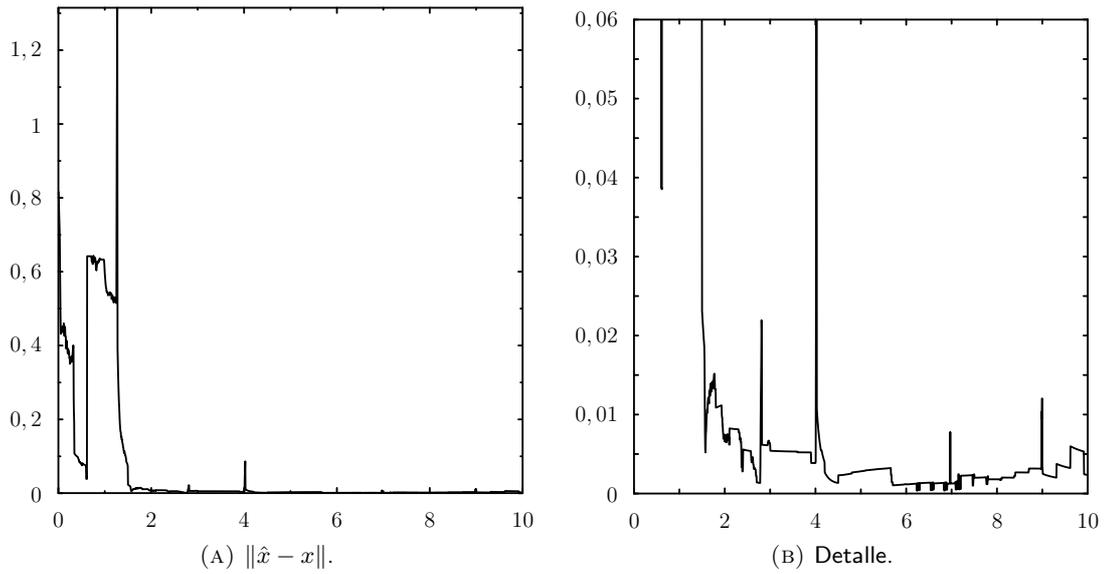


FIGURA 5.18: Norma del error de estimación de estados asociados al sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación σ_2 .

La Tabla 5.4 resume la evolución de algunos parámetros relacionados con la simulación.

TABLA 5.4: Resumen de los resultados adicionales de la simulación, para el sistema (3.26) - (3.27) con la señal de conmutación $\sigma_2(t)$.

$\nu; k$	0	1	2	3	4	5
$t_{c\nu}$ [s]	0	1,25	2,785	4,005	6,97	8,985
t_k [s]	0,613	1,27	2,815	4,025	6,975	8,995
τ_d^ν [s]	0,613	0,0764	0,7269	0,2166	0,0781	0,0490
γ_ν	0,4087	0,0211	0,0147	0,0147	0,0147	0,0147
ϵ_ν	0,1858	0,0096	0,0067	0,0067	0,0067	0,0067
γ_ν^d	0,2043	0,0106	0,0073	0,0073	0,0073	0,0073

5.4.3. Ejemplo 3 - No detección de una conmutación

El objetivo del siguiente ejemplo consiste en mostrar los resultados de implementar la variación del algoritmo propuesta en la Sección 5.3.2 que aborda la problemática de la no detección de una conmutación a causa de los puntos no regulares presentes en la señal de salida.

Para la simulación planteada en este ejemplo la dinámica de la señal de conmutación $\sigma_2(t)$ es la descrita por la Tabla 3.7 y se establece como condición inicial $\bar{x}_0 = (-2,8736 ; 2,5811 ; 5,8591)$ de forma tal que para el instante de conmutación $t_s = 4,0017s$, se verifica que $x(t_s) \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_h$, por lo que la conmutación dada en este instante está enmascarada por la pérdida de regularidad de la salida. A su vez dada esta nueva condición inicial, es necesario recalculer la estimación de \mathcal{X} y los parámetros del sistema asociados a este conjunto, para lo cual se asume que todos los posibles estados iniciales del sistema pertenecen a un cuadrado $\bar{\mathcal{X}}_0$ centrado en \bar{x}_0 y con bordes de longitud 9 en sentido de los ejes x_1 y x_2 . En simulación se encontró que con los parámetros establecidos por el Ejemplo 1 (ver Sección 5.4.1), el desempeño del observador es satisfactorio.

La simulación comienza en $t_0 = 0$ con la condición inicial \bar{x}_0 y $\mathcal{K} = \bar{\mathcal{X}}_0 = [-5,4, -1,4] \times [-1,2, 7,08] \times \{5,8591\}$. Los resultados de cómo el algoritmo procede frente a esta problemática en base a la variación del esquema de observación propuesto se muestran en las Figuras 5.19 a 5.23 a continuación.

La Figura 5.19 ilustra como se ignora erróneamente la conmutación en $t_s = 4,0017s$ una vez que se aplica el criterio (3.29). La Figura 5.19 (A) presenta la evolución de $y(t)$ en la ventana de tiempo $I_i = [3,995, 4,005]$ cuando el sistema conmuta (en t_s) del modo $q = 4$ al modo $q = 2$. Se puede ver que $y(t)$ no cumple con (3.29) en el intervalo $I_{s^*} = \{t \in I_i : 0,999 < y(t) < 1,001\} = (3,9993, 4,0024)$. En la Figura 5.19 (B) se muestra la ventana de tiempo para el esquema de detección y estimación de un instante de conmutación en donde se observa la reconstrucción la discontinuidad junto con la cota que establece la detección de una conmutación. En este caso $\text{clos}(I_s) = [4,0015, 4,0019]$, y como $\text{clos}(I_s) \subset I_{s^*}$ se descarta la detección de esta conmutación.

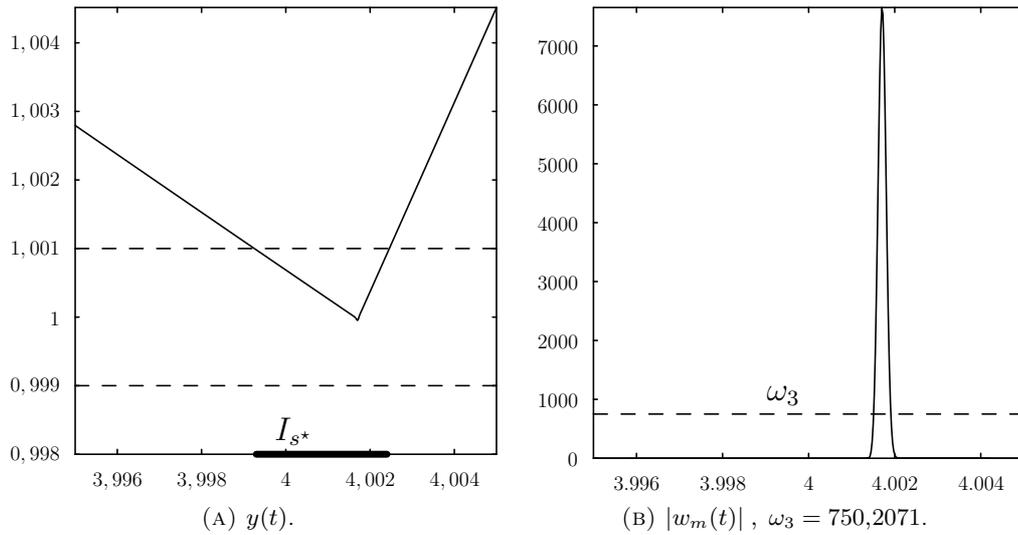


FIGURA 5.19: Ventana de tiempo para el esquema de validación de salto en t_s en una pérdida de detección de conmutación para el sistema (3.26) - (3.27) con la señal de conmutación $\sigma_2(t)$ y condición inicial \bar{x}_0 .

En consecuencia, la estimación del estado se obtiene a partir del \hat{q} -observador con $\hat{q} = 4$ (un modo incorrecto). Por lo tanto, en el proceso de descarte, el \hat{q} -secuenciador que proporciona la estimación de los estados produce un conjunto-búsqueda vacío en $t_{k^*} = 4,01s$. A partir de este instante, el algoritmo procede de acuerdo con los pasos enumerados en Sección 5.3.1. La Figura 5.20 (A) presenta la evolución de $\#\hat{D}_{\hat{q}}^{t_k}$ en el intervalo en el que $\hat{q} = 4$, en particular el comportamiento de \hat{q} -secuenciador en $t_{c_3} = t_{k^*}$, mientras que la Figura 5.20 (B) muestra en detalle la reconstrucción del modo estimado.

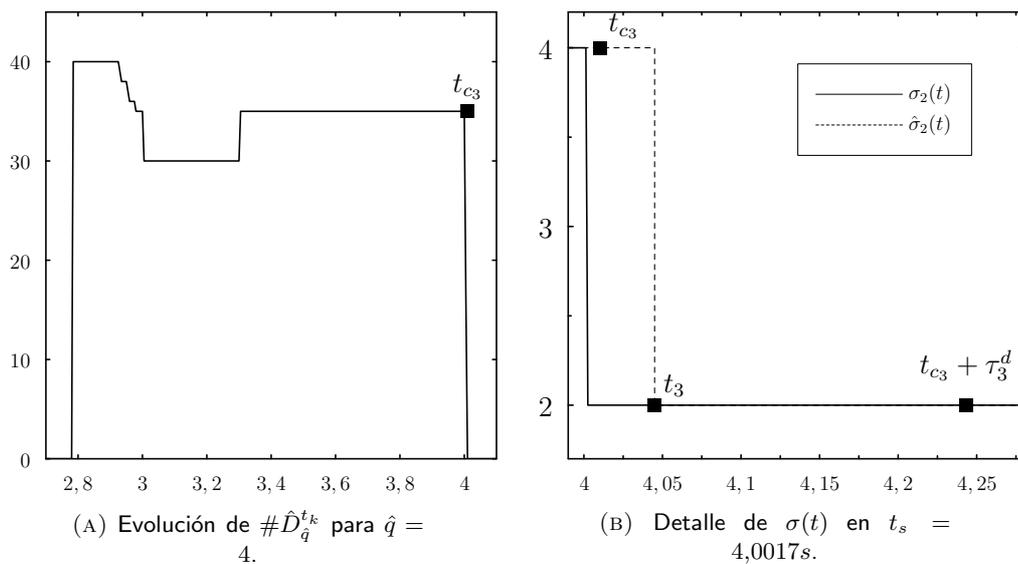


FIGURA 5.20: Reducción del conjunto de búsqueda y reconstrucción de la señal de conmutación bajo la pérdida de detectabilidad de una conmutación.

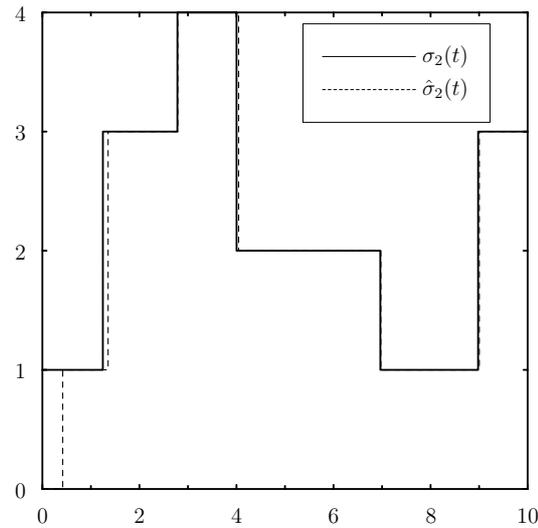


FIGURA 5.21: Reconstrucción de la señal de conmutación $\sigma_2(t)$ completa frente a la pérdida de una conmutación.

La Figura 5.22 presenta la evolución de los estados junto a sus estimaciones. La Figura 5.23 (A) muestra la norma del error de estimación de estado para toda la simulación, mientras que la Figura 5.23 (B) presenta una versión detallada en la que se puede observar que este error ϵ_* se alcanza en tiempo finito una vez que se computa la estimación del modo \hat{q} . Las fluctuaciones que se pueden observar ocurren en las proximidades de los tiempos de conmutación y persisten hasta que el algoritmo establece el nuevo modo. Al igual que en los ejemplos previos, en la Tabla 5.5 se resume la evolución de algunos de los parámetros relacionados con el proceso de estimación.

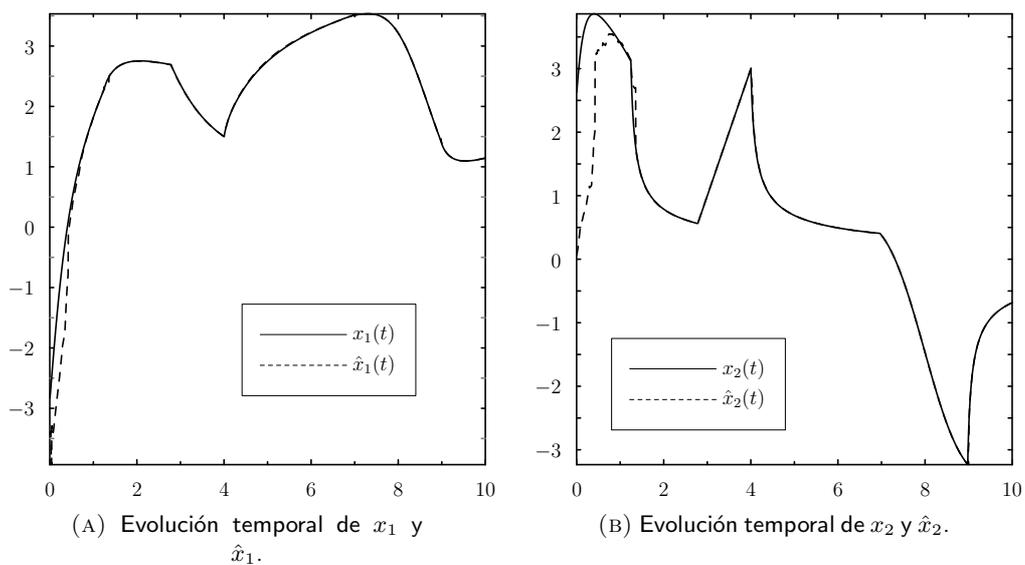


FIGURA 5.22: Estados y sus estimaciones.

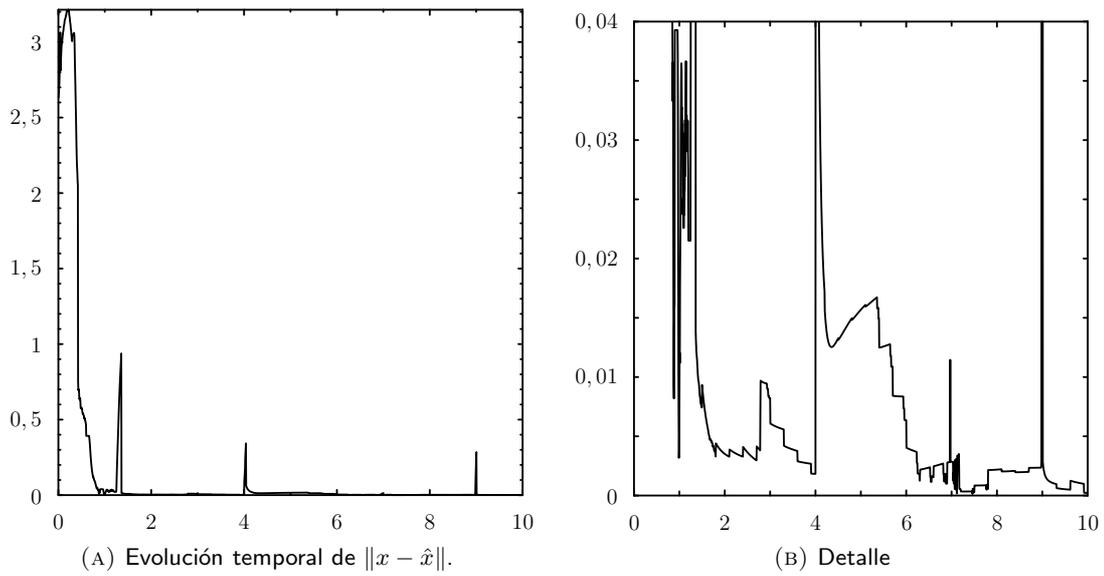


FIGURA 5.23: Norma del error de estimación.

TABLA 5.5: Resumen de los resultados adicionales de la simulación, para el sistema (3.26) - (3.27), con la señal de conmutación $\sigma_2(t)$ y condición inicial \bar{x}_0 .

$\nu; k$	0	1	2	3	4	5
$t_{c\nu}$ [s]	0	1,25	2,785	4,01	6,97	8,985
t_k [s]	0,613	1,355	2,79	4,045	6,975	0,005
τ_d^ν [s]	0,613	0,4332	0,0598	0,223	0,0839	0,2234
γ_ν	0,2043	0,0106	0,0147	0,0073	0,0073	0,0073
ϵ_ν	0,1858	0,0048	0,0067	0,0033	0,0033	0,0033

5.4.4. Ejemplo 4 - Observador arbitrario

El objetivo de esta sección es presentar un ejemplo numérico que implemente la variación del algoritmo propuesta en la Sección 5.3.2, en donde la estimación de los estados se lleva a cabo por medio de un banco de observadores que implementa algún observador arbitrario (sin el uso obligatorio de q -observadores), según las características de cada subsistema del sistema conmutado y las condiciones impuestas en el desarrollo del algoritmo.

Con el fin de mostrar todos los aspectos que aborda esta variación de la estrategia, como la no detección de una conmutación, se utiliza como base la simulación desarrollada en Ejemplo 3 (Sección 5.4.3), en donde se tiene al sistema (3.26)-(3.27) con la señal de conmutación $\sigma_2(t)$ dada por la Tabla 3.7 y con condición inicial \bar{x}_0 .

En particular para esta simulación dadas las características que presentan los subsistemas en relación con la función de salida y la estimación del conjunto \mathcal{X} dado en 5.11, es posible

implementar un banco de observadores a partir de un *observador local* para cada (f_q, h) con $q \in \mathcal{Q}$ de la forma

$$\dot{\hat{x}}_q(t) = f_q(\hat{x}_q) + H_q(y(t) - \hat{y}(t)), \quad (5.13)$$

donde H_q es tal que $A_q - H_q C$ resulta Hurwitz con el par (A_q, C) correspondiente al modelo que resulta de linealizar el sistema (f_q, h) en un punto $x_{ss} \in \mathcal{X}$. Este tipo de observador garantiza un error de estimación con decaimiento del tipo exponencial en un entorno de x_{ss} (para mayor detalle ver [23]). Por lo tanto si se implementa (5.13), $e(t) = \|x(t) - \hat{x}(t)\|$ verifica un decrecimiento exponencial en un entorno de x_{ss} . Por lo tanto es fácil verificar que existe una función β que cumple con las características impuestas por el algoritmo y verifica 5.9.

Si bien este tipo de observador responde con un error de estimación con decaimiento exponencial en un entorno del punto x_{ss} , dicho entorno está relacionado con la dinámica impuesta por $A_q - H_q C$. En simulación se puede corroborar que tomando como $x_{ss} = (-2,9, -1,02, -2,5)$ y H_q de forma tal que $\bar{\lambda}(A_q - H_q C) = -4, \forall q \in \mathcal{Q}$, los observadores responden adecuadamente para una condición inicial que verifica $\|x_{ss} - \hat{x}_q(t_0)\| \leq 10$. Si bien la función de salida está definida por tramos y presenta puntos no regulares, dada la descripción de la misma, para el diseño de los observadores se toma $C = (0, 0; 2)$, con lo cual para cada subsistema se tiene

$$\begin{aligned} H_1 &= (39,1791, 46,9875, 12); & H_2 &= (4,3457, 0,0117, -6,4356) \\ H_3 &= (1,3861, 0,0597, 2,3995); & H_4 &= (3, 0, 4,6023). \end{aligned}$$

La simulación comienza en $t_0 = 0$ donde se toma como condición inicial del sistema \bar{x}_0 , para el banco de observadores la condición inicial $\hat{x}_q(0) = (-2,6896, 2,4262, 6,0346)$ y el conjunto inicial del banco de descartadores como $\mathcal{K} = \bar{\mathcal{X}}_0 = [-5,17, -1,27] \times [-1,0811, 4,23] \times \{5,8591\}$. A continuación se presentan y analizan los resultados de la simulación.

La Figura 5.24 presenta $\sigma_2(t)$ junto a su estimación $\hat{\sigma}_2(t)$. Una versión detallada de la misma se muestra en la Figura 5.25 (A) en donde se observa que para $t \in [0; t_0)$, con $t_0 = 0,43$ s, $\hat{\sigma}_2(t) = 0$ ya que para este intervalo de tiempo no se dispone de información sobre la señal de conmutación. La estimación del modo se da a tiempo $t_0 = 0,43$ s de acuerdo con (5.2). Notar que para esta simulación $t_0 \leq t_{c_0} + \tau_d^0$ con $\tau_d^0 = 0,613$ s; esto se debe a que para el instante de tiempo t_0 un solo $q - \gamma - \epsilon$ -descartador del banco de descartadores está activo. En particular se verifica que $\Theta_1^{t_0} \neq \emptyset$, más precisamente $\#\Theta_1^{t_0} = 54$. Esto se aprecia con mayor detalle en la Figura 5.25 (B) donde se presenta la evolución temporal de $\#\Theta_q^t$ para $t \in [0; \tau_d^0)$ con $q \in \mathcal{Q}$. Adicionalmente en la Figura 5.26 (A), se presenta la detección de modo para la primera conmutación ($\nu = 1$ en

el algoritmo) con lo cual el modo cambia de $q = 1$ a $q = 3$ en $t = 1,2475 s$. La evolución del banco de descartadores comienza en $t_{c_1} = 1,25 s$ y evoluciona hasta $t_{c_1} + \tau_d^1 = 1,6832$ ya que $\tau_d^1 = 0,4332 s$ y el modo se estima en $t_1 = 1,365 s$. Para este instante de tiempo solo $\#\Theta_3^{t_1} \neq 0$ como se muestra en la Figura 5.26 (B).

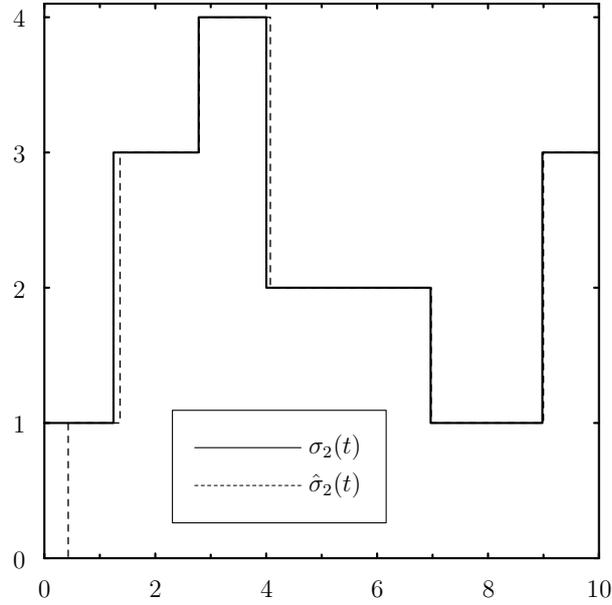


FIGURA 5.24: Señal de conmutación estimada $\hat{\sigma}_2(t)$, para el esquema de un observador arbitrario.

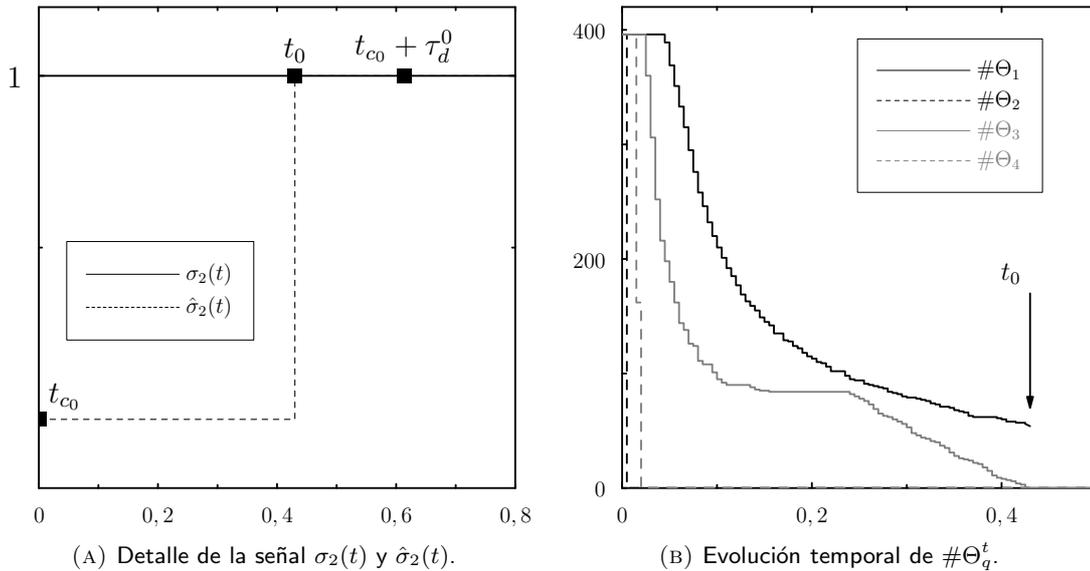


FIGURA 5.25: Detalle del esquema de detección de modo para $\sigma_2(t)$ a $t_s = 0$ para el esquema de un observador arbitrario.

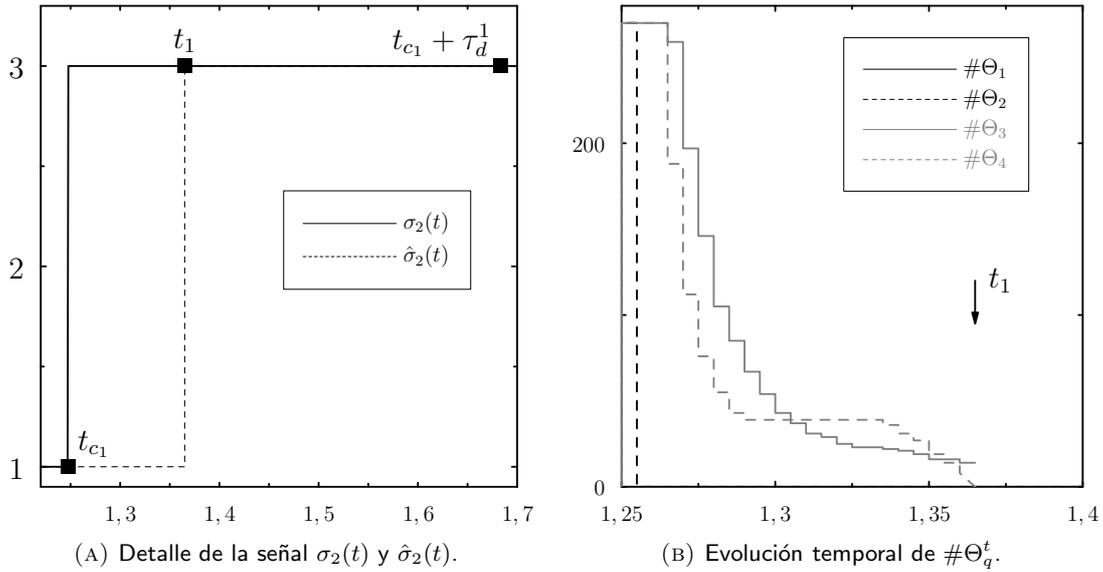


FIGURA 5.26: Detalle del esquema de detección de modo para $\sigma_2(t)$ a $t_s = 1,2608$ para el esquema de un observador arbitrario.

Al igual que en el Ejemplo 3, para esta señal de conmutación y condición inicial \bar{x}_0 , el sistema experimenta una *no detección de una conmutación* en $t_s = 4,0017$ s debido a que la no regularidad de la función de salida enmascara la conmutación. Esta característica ya fue presentada y analizada en el Ejemplo 3. Como se puede observar en la Figura 5.24 la conmutación es reconstruida a pesar de ser ignorada por el algoritmo de detección y estimación de una conmutación. A continuación se presentan y analizan los resultados de como esta variación del algoritmo permite abordar esta problemática. Para este ejemplo se toma $\mu = \max_{i \in \mathbb{N}} \mu_i$, donde μ_i se obtiene según lo establecido en (3.28).

En la Figura 5.27 se presenta la evolución temporal de $e_y(t)$ en un entorno de t_s , lo cual nos permite analizar el comportamiento del algoritmo. Dado que el sistema conmuta de modo $q = 4$ a $q = 2$ a tiempo $t_s = 4,0017$ s y el algoritmo no registra la conmutación, el error de salida $e_y(t)$ comienza a incrementarse a partir de este instante, como es de esperar, debido a que la dinámica del banco de observadores evoluciona en un modo incorrecto. Según la dinámica establecida por el algoritmo se obtiene $e_y(t_{k+n}) - e(t_k) = 0,1087$ y $\mu(t_{k+n} - t_k) = 0,1072$ para los instantes de tiempo $t_k = 3,99$ s y $t_{k+n} = 4,065$ s con $n = 15$, a partir de lo cual se detecta la conmutación ignorada. Para este instante de tiempo, según lo establecido por el algoritmo, se establece $t_{k^*} = 3,99$ s, $\hat{\Theta} = [1,4866, 1,5233] \times [2,9533, 2,99] \times \{0,5917\}$ ya que $d_{k^*} = 0,019$, $\hat{x}(t_{k^*-n}) = (1,5056, 2,9723, 0,5049)$ y $\epsilon_{k^*} = 0,063$. A partir de este instante se establece $t_{c_3} = t_{k^*+n}$ y el algoritmo procede según lo descrito en la Sección 5.3.2 con lo cual es posible estimar el modo del sistema. En la Figura 5.28 presenta en detalle como se lleva a

cabo la reconstrucción del modo. En la Figura 5.28 (A), se presenta un detalle de $\sigma(t)$ y $\hat{\sigma}(t)$ en un entorno de $t_s = 4,0017 s$ ($\nu = 3$ en el algoritmo) junto a los instantes de tiempo detallados. La evolución del banco de descartadores comienza a t_{c_3} y evoluciona hasta $t_{c_3} + \tau_d^3 = 4,1793 s$ ya que $\tau_d^3 = 0,1143 s$ y el modo se estima en $t_3 = 4,075 s$. Para este instante de tiempo solo $\Theta_2^{t_3} \neq \emptyset$ como se muestra en la Figura 5.28 (B).

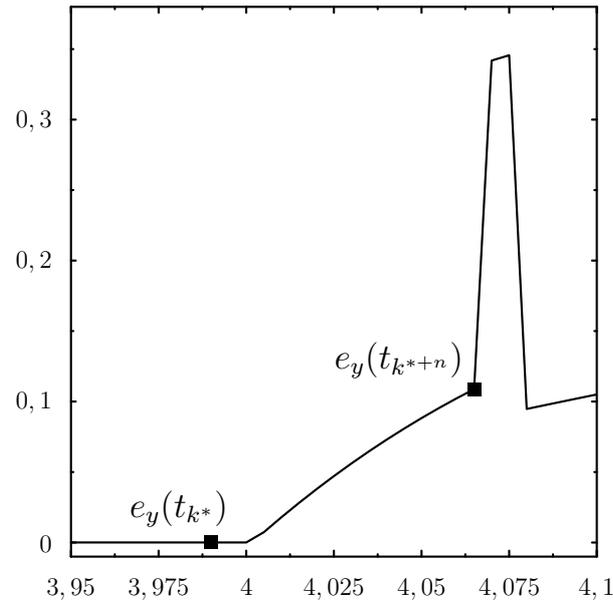


FIGURA 5.27: Evolución temporal de $e_y(t)$ en un entorno de $t_s = 4,0017 s$ para el análisis de la pérdida de una conmutación para el esquema de un observador arbitrario.

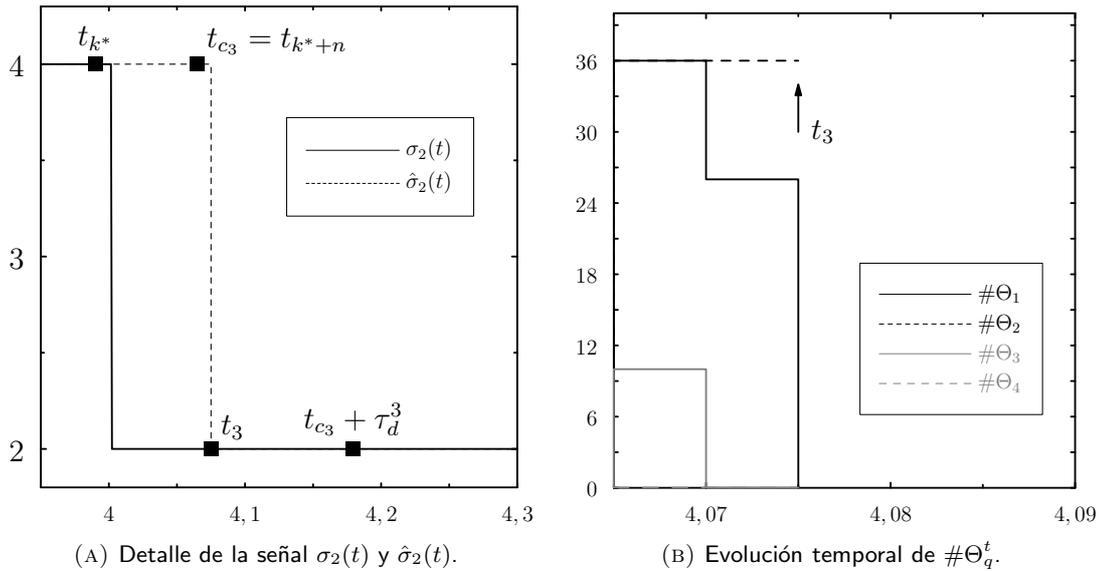


FIGURA 5.28: Detalle del esquema de detección de modo para $\sigma_2(t)$ bajo la pérdida de detección a $t_s = 4,0017 s$ para el esquema de un observador arbitrario.

Los resultados de la estimación de estados que se lleva a cabo por medio del banco de observadores (5.13) se presenta en las Figuras 5.29 y 5.30. La Figura 5.29 (A) muestra la evolución de $x_1(t)$ y su estimación $\hat{x}_1(t)$, mientras que la Figura 5.29 (B) presenta el valor absoluto del error de estimación para este estado. A partir de esta figura se puede apreciar la degradación en el comportamiento del error de estimación cerca de los tiempos de conmutación. Este efecto se debe a que la estimación de los estados viene dada por (5.6), donde se tiene en cuenta todas las estimaciones de los observadores correspondientes a los modos incorrectos. Esta degradación está asociada con el tipo de banco de observadores implementado. Se puede apreciar que la degradación de error de estimación en este caso es mayor si se la compara con lo desarrollado en los ejemplos previos. Se debe tener en cuenta que el objetivo de esta simulación consiste en presentar el esquema de observación y como se articulan las diversas partes que lo componen, no se busca una performance específica en esta dinámica.

Las estimaciones asociadas al estado $x_2(t)$ se presenta en la Figura 5.30, donde se observa un comportamiento similar a lo analizado para $x_1(t)$. En referencia al estado x_3 no se presenta ninguna figura por la relación uno a uno con la salida.

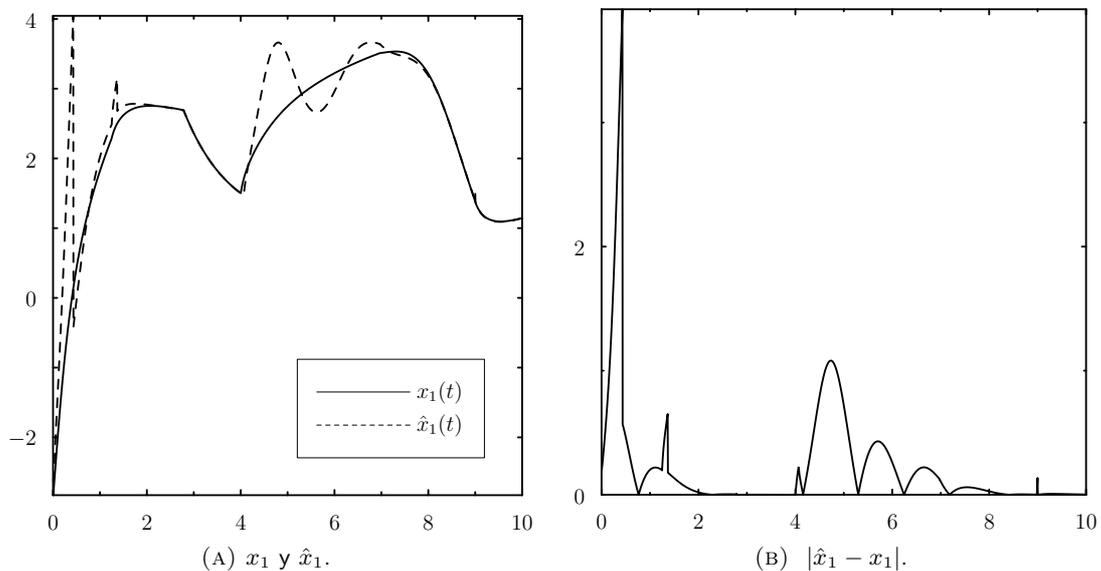


FIGURA 5.29: Resultados del proceso de estimación asociados al estado x_1 para el esquema de un observador arbitrario.

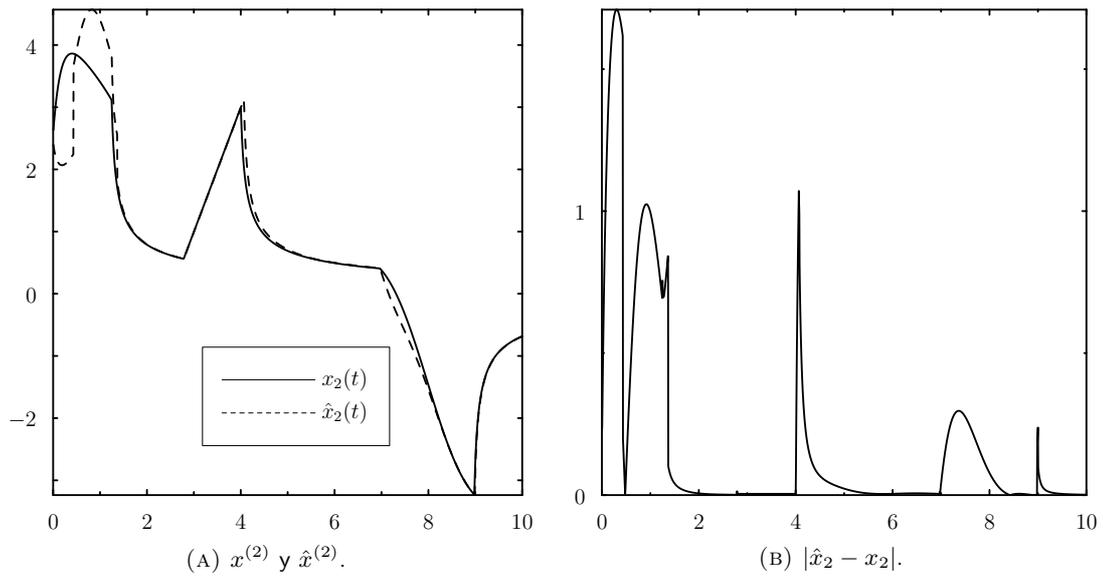


FIGURA 5.30: Resultados del proceso de estimación asociados al estado x_2 para el esquema de un observador arbitrario.

A continuación se presentan algunas figuras que detallan cómo opera el *banco de observadores*, establecidos por (5.13), en el proceso de proporcionar una estimación de los estados del sistema dentro del algoritmo desarrollado. La Figura 5.31 (A) muestra la evolución del estado x_1 y de las estimaciones dadas por cada observador $\hat{x}_{1,q}$, $q \in \mathcal{Q}$, de $t = 0$ a $t = 1s$, las cuales vienen dadas por (5.5). La Figura 5.31 (B) muestra las mismas evoluciones correspondientes al estado x_2 . Se observa como en el intervalo $[0, \tau_d^0)$ los q -observadores interactúan de acuerdo a (5.6) para proporcionar \hat{x}_1 y \hat{x}_2 . Para $t \geq \tau_d^0$, una vez que se detecta el modo $\hat{q} = 1$, la estimación queda establecida por el correspondiente \hat{q} -observador (el primer observador) según (5.7): $\hat{x}_1 = \hat{x}_{1,1}$ y $\hat{x}_2 = \hat{x}_{2,1}$.

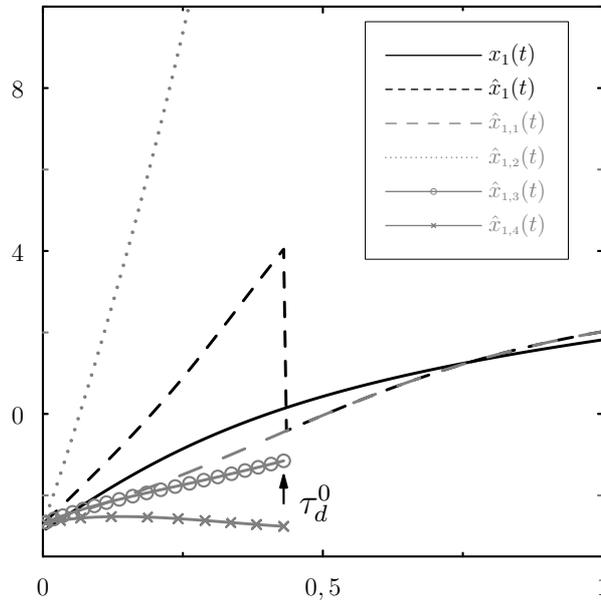
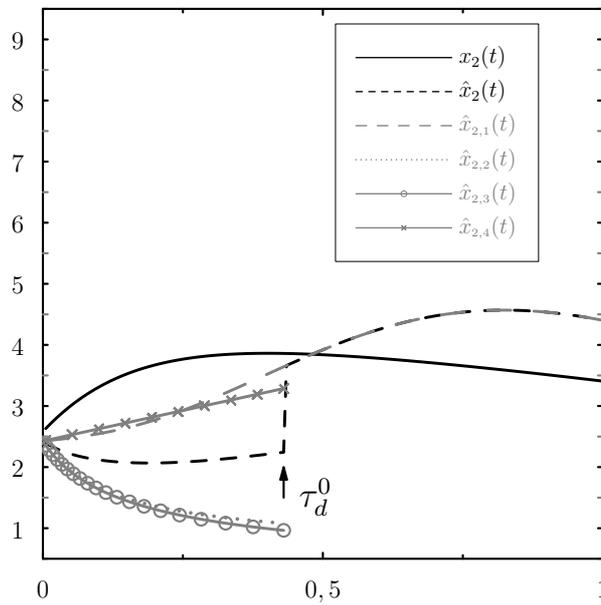
(A) $x^{(1)}, \hat{x}_1, \hat{x}_{1,q}$.(B) $x_2, \hat{x}_2, \hat{x}_{2,q}$.

FIGURA 5.31: Evolución temporal de cada uno de los observadores presentes en el banco de observadores en el proceso de estimación para el esquema de un observador arbitrario.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos a futuro

En esta tesis se aborda el estudio del problema de observación asociado a los sistemas conmutados no lineales autónomos, a partir de solo tener acceso al mapa o función de salida $y(t) = h(x(t))$ y sabiendo que la señal de conmutación verifica un tiempo de permanencia τ_D fijo. Como se describió previamente el problema de observación planteado para esta tesis consiste de tres partes fundamentales: **(a)** Detectar conmutaciones y estimar los tiempos de conmutación, **(b)** determinar el modo activo en cada instante de tiempo y **(c)** estimar los estados del sistema. Dado que ningún autor ha abordado esta problemática en conjunto resulta de interés su estudio.

La condición de *Detectabilidad de modo* permitió abordar el problema de detección y estimación de una conmutación en base al análisis de la señal de salida, con lo cual se planteó una solución que prescinde de contar con los estados como del modo del sistema, de manera tal que se logró desacoplar el problema **(a)** de los desafíos planteados en los puntos **(b)** y **(c)**. De esta manera, se pudo abordar la detección y estimación de la conmutación de forma independiente.

Asimismo el uso de la teoría de distribuciones para describir de forma precisa y sencilla como una conmutación impacta sobre la función de salida del sistema, permitió el desarrollo del algoritmo que lleva a cabo la tarea **(a)** de forma directa para sistemas con salida de dimensión uno (*single output*). A su vez la extensión del algoritmo a sistemas con salida de dimensión mayor a uno (*multi output*) es casi inmediata, a partir de replicar lo desarrollado a cada una de las salidas del sistema, como así también para aquellos sistemas donde la salida presenta puntos no regulares. En particular para este último caso el algoritmo permite distinguir entre una conmutación y una falsa conmutación. En este último caso el algoritmo se tienen en cuenta las particularidades en la dinámica de $y(t)$.

Si bien el algoritmo obtuvo una buena precisión en cuanto a la estimación del instante de

conmutación como también a la velocidad con que se detecta una conmutación, se tuvo que contemplar el costo computacional que conlleva implementar la estrategia en tiempo real, ya que a mayor precisión en los mismos el costo computacional aumenta considerablemente. Esto se debe al esquema de doble ventana móvil y la función núcleo que utiliza para el procesamiento de la función de salida en la implementación de tiempo real del algoritmo.

Para aquellos sistemas conmutados tales que los pares (f_q, h) admiten un observador con un error de decaimiento de orden exponencial, se desarrolló un algoritmo que permite dar solución a los problemas **(b)** y **(c)** a partir de la implementación de un *banco de observadores* y un *banco de subsistemas*. Si bien la idea del banco de observadores es utilizada por otros autores con el mismo objetivo que el planteado en tesis, el de proporcionar los estados estimados del sistema conmutado, la incorporación del banco de subsistemas y la interacción del mismo con el banco de observadores permitió estimar el modo del sistema conmutado de manera eficiente. El ensamble de este algoritmo junto al desarrollado para **(a)** resultó directa y permitió dar solución al problema completo de observación para una clase de sistemas conmutados. Si bien la estrategia presenta un buen desempeño en cuanto a la estimación del modo y los estados, la complejidad en el cálculo de algunos parámetros críticos en el desempeño de la estimación del modo (como el tiempo mínimo que se debe dejar evolucionar el banco de subsistemas) y su dependencia de la dinámica exponencial de los observadores limita el rango de aplicabilidad de esta estrategia ya que exige hipótesis fuertes sobre la estructura del sistema.

La incorporación del *descartador* como un objeto dinámico, cuyo principio de funcionamiento consiste en evaluar y descartar posibles trayectorias en simultáneo, desacopló los problemas **(b)** y **(c)** ya que el uso de un *banco de descartadores* determina el modo del sistema a partir de una condición de cardinalidad y resulta independientemente del tipo de banco de observadores propuesto. El uso de un *banco de q -observadores* junto al algoritmo que articula las tres fases del problema de observación permitió extender y dar solución a esta problemática para los sistemas conmutados no lineales con salida Lipchitz continua. Esto se debe a que las hipótesis sobre la estructura del sistema a observar son en este caso, débiles. A su vez debido a la característica de los descartadores y de los q -observadores esta estrategia requiere de un costo computacional más elevado.

Finalmente se propuso una variación del algoritmo de forma tal que resulta independiente del tipo de observador planteado en el banco de observadores, lo que pone de manifiesto la indepen-

dencia en las tres etapas de observación.

De lo desarrollado en este trabajo, se desprende diversas líneas de trabajo futuro que resultan interesantes de abordar como el fin de extender la teoría de sistemas conmutados no lineales.

- Estudiar la problemática de estimación y detección de una conmutación en presencia de perturbaciones en la señal de salida y su interacción con las características que pueden presentar las diversas funciones núcleo que se utilizan para aproximar $\delta(t)$.
- Buscar un desarrollo más eficiente en la implementación del algoritmo propuesto para la estimación y detección de una conmutación en cuanto al costo computacional requerido sin comprometer la precisión del mismo.
- Estudiar la factibilidad de incorporar esta estrategia a sistemas controlados, de forma tal que los estados estimados sean utilizados en la ley de control. En principio esto requeriría formular un principio de separabilidad para estos sistemas.
- Plantear el problema de observación para aquellos sistemas conmutados donde la función/mapa de salida también responde a una familia indexada de funciones/mapas de salida, de forma tal que $y(t) = h_{\bar{\sigma}(t)}(x(t))$ donde no necesariamente debe verificarse que $\bar{\sigma}(t) = \sigma(t)$.

Apéndice A

Lema para la estimación de estados

Lema A.1. Sea el sistema (2.2) en el modo $q^* \in \mathcal{Q}$ con la condición inicial $x(t_0) = x_0$. Sea a su vez $e_{x_q}(t) = \hat{x}_q(t) - x_q(t)$ el error de estimación a tiempo t entre cada subsistema de la forma (4.10) y su correspondiente observador (4.1) bajo la misma condición inicial $x_q(t_0) = \hat{x}_q(t_0)$. Si $\forall q \in \Gamma - \{q^*\}$ se verifica que

$$\| K(\theta) [h(x_{q^*}(t_0)) - h(x_0)] \| < \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \| K(\theta) [h(x_q(t_0)) - h(x_0)] \| \quad (\text{A.1})$$

con $\sigma_{\min} = \min_{q \in \Gamma} \underline{\sigma}_q$, $\sigma_{\max} = \max_{q \in \Gamma} \overline{\sigma}_q$ y $\underline{\sigma}_q, \overline{\sigma}_q$ como se definió en (4.3), entonces existe un $\Delta t > 0$ que no depende de t_0 tal que $\forall t \in (t_0, t_0 + \Delta t]$

$$\| e_{x_{q^*}}(t) \| < \| e_{x_q}(t) \| \quad (\text{A.2})$$

Demostración. La dinámica del error de cada subsistema, e_q , verifica

$$\begin{aligned} \dot{e}_{x_q}(t) &= f_q(\hat{x}_q(t)) - f_q(x_q(t)) - G_q(\hat{x}_q(t))K(\theta) [h(\hat{x}_q(t)) - \mathcal{Y}(t, t_0, x_0, q)] \\ &= f_q(\hat{x}_q(t)) - f_q(x_q(t)) - G_q(\hat{x}_q(t))K(\theta) [h(\hat{x}_q(t)) - h(x_q(t)) + h(x_q(t)) - \mathcal{Y}(t, t_0, x_0, q)] \\ &= f_q(\hat{x}_q(t)) - f_q(x_q(t)) - G_q(\hat{x}_q(t))K(\theta) [h(\hat{x}_q(t)) - h(x_q(t))] \\ &\quad - G_q(\hat{x}_q(t))K(\theta) [h(x_q(t)) - \mathcal{Y}(t, t_0, x_0, q)] \\ &= -G_q(\hat{x}_q(t))K(\theta) [h(x_q(t)) - \mathcal{Y}(t, t_0, x_0, q)] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

debido a que x_q , la dinámica del subsistema q , y la del observador correspondiente \hat{x}_q son iguales ya que ambos evolucionan a partir de la misma condición inicial x_{q_0} .

Sea la aproximación de primer orden de $e_{x_q}(t)$ en torno de t_0

$$\begin{aligned}
e_{x_q}(t) &= e_{x_q}(t_0) + \dot{e}_{x_q}(t_0)(t - t_0) + \Upsilon(t - t_0) \\
&= -G_q(\hat{x}_q(t_0))K(\theta) [h(x_q(t_0)) - h(x_0)] (t - t_0) + \Upsilon(t - t_0)
\end{aligned} \tag{A.4}$$

donde $e_{x_q}(t_0) = 0$ y $\Upsilon(t - t_0)$ representa los términos de orden superior a uno.

Debido a la regularidad de f_q y h , y a la compacidad de \mathcal{X} , se verifica que $\|\Upsilon(t - t_0)/(t - t_0)^2\|$ está uniformemente acotado para un intervalo cerrado, digamos $[t_0, t^*]$ (con una cota que depende de t^*). Por lo tanto existe $\Delta t > 0$ tal que para cualquier $t_1 \in (t_0, t_0 + \Delta t]$

$$e_{x_q}(t_1) \cong -G_q(\hat{x}_q(t_0))K(\theta) [h(x_q(t_0)) - h(x_0)] (t_1 - t_0) \tag{A.5}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|e_{x_{q^*}}(t_1)\|^2 &\cong \|G_{q^*}(\hat{x}_{q^*}(t_0))K(\theta) [h(x_{q^*}(t_0)) - h(x_0)]\|^2 \Delta t_1^2 \\
&\leq \sigma_{\max}^2 \|K(\theta) [h(x_{q^*}(t_0)) - h(x_0)]\|^2 \Delta t_1^2 \\
&< \sigma_{\min}^2 \|K(\theta) [h(x_q(t_0)) - h(x_0)]\|^2 \Delta t_1^2 \\
&\leq \|G_q(\hat{x}_q(t_0))K(\theta) [h(x_q(t_0)) - h(x_0)]\|^2 \Delta t_1^2 \\
&\cong \|e_{x_q}(t_1)\|^2
\end{aligned} \tag{A.6}$$

La Figura A.1 presenta un diagrama que esquematiza las posiciones relativas de las trayectorias involucradas en este lema. □

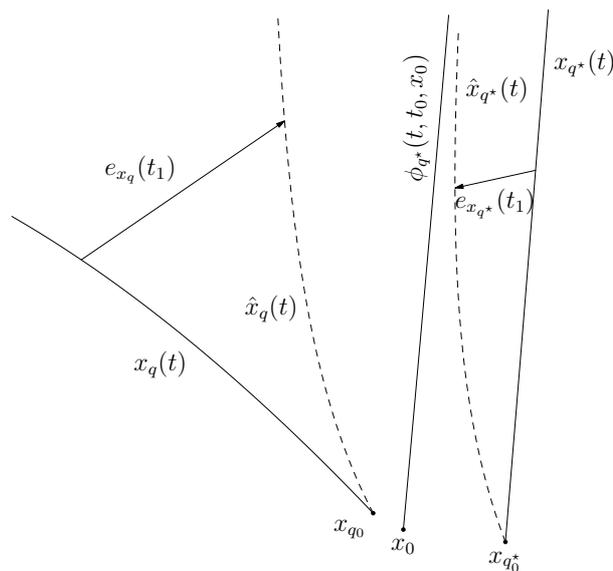


FIGURA A.1: Diagrama esquemático de la evolución de las trayectorias del sistema conmutado (2.2), banco de observadores (4.1) y el banco de subsistemas (4.10).

Observación A.1. El Lema [A.1](#) resulta crucial en la estimación del modo para aquellos sistemas que permiten la implementación de un observador con decaimiento del tipo exponencial. Si bien el Lema asegura la existencia de un Δt mínimo, el cálculo del mismo se puede ajustar vía simulación.

Apéndice B

Descartadores

El estimador de modo desarrollado en el Capítulo 5 para los sistemas Lipschitz continuos, se basa en el uso de un banco de *descartadores* (*discarders*). Un descartador es la unidad básica que se utiliza como punto de partida para el observador desarrollado en [20].

Para comprender el principio de funcionamiento del descartador, sean q un índice fijo pero arbitrario con $q \in \mathcal{Q}$ y el subsistema (f_q, h) del sistema (2.2). Este subsistema puede ser descrito según:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f_q(x(t)) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Se denota con $\phi_q(t, t_0, x_0)$ a la solución de (B.1) que comienza en tiempo t_0 con condición inicial x_0 . Dado el conjunto $D \subset \mathcal{X}$ también se denota $\phi_q(t, t_0, D) = \cup_{x^* \in D} \phi_q(t, t_0, x^*)$.

Para este sistema se considera la observabilidad en el sentido de [19]:

Definición B.1. (I) El par de estado $x_0 \neq x'_0$, se dice *indistinguible* por el sistema (B.1) si

$$\forall t \geq t_0, h(\phi_q(t, t_0, x_0)) = h(\phi_q(t, t_0, x'_0)).$$

(II) Se dice que el sistema (B.1) es *observable en* x_0 si no existe x'_0 tal que el par (x_0, x'_0) es indistinguible. El sistema es *observable* si resulta observable para cualquier x_0 .

Notar que esta noción de observabilidad es la más débil que se puede postular para este tipo de sistemas.

Definición B.2. Dado un tiempo $t \geq t_0$ fijo, el conjunto $D^t \subset \mathbb{R}^n$ es un *conjunto-búsqueda* (*search-set*) si contiene al estado actual $\phi_q(t, t_0, x_0)$ del sistema (B.1).

Un *descartador* (*discarder*) es un sistema dinámico que evoluciona a partir de $D^{t_0} = h^{-1}(h(x_0))$ de forma tal que el *conjunto-búsqueda* se contrae a un entorno arbitrariamente pequeño del estado

actual del sistema (B.1). Esta reducción se lleva a cabo mediante un método que se basa en la observabilidad del sistema, la Figura B.1 esquematiza este principio de funcionamiento.

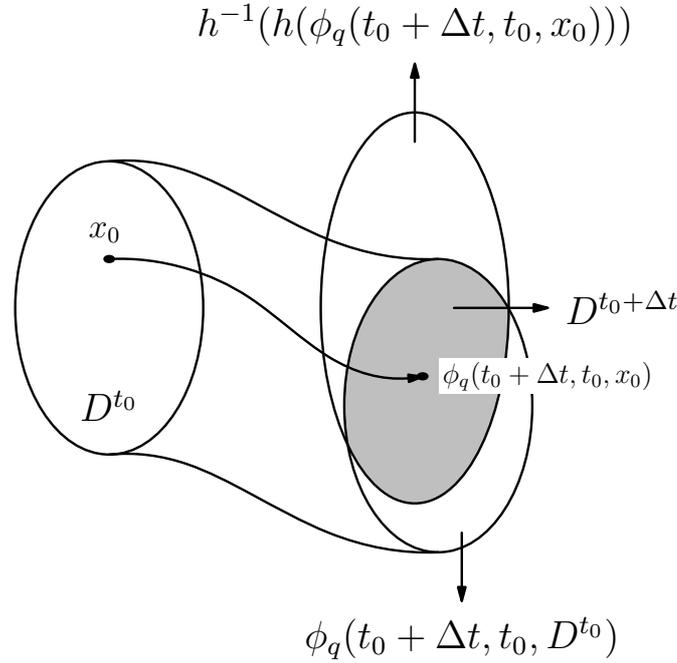


FIGURA B.1: Diagrama esquemático del principio básico asociado a la reducción del conjunto de búsqueda

Dado $\Delta t > 0$ definimos

$$D^{t_0 + \Delta t} = \phi_q(t_0 + \Delta t, t_0, D^{t_0}) \cap h^{-1}(h(\phi_q(t_0 + \Delta t, t_0, x_0))) \quad (\text{B.2})$$

Si el sistema (B.1) es observable en el sentido de la Definición B.1, existe un Δt tal que se verifica que $D^{t_0 + \Delta t} \subsetneq \phi_q(t_0 + \Delta t, t_0, D^{t_0})$ y la reducción del conjunto de búsqueda se lleva a cabo.

Observación B.1. En proceso de reducción del conjunto de búsqueda, como el sistema (B.1) evoluciona en tiempo continuo, en el espacio de estados continuos, la condición de observabilidad en el sentido de la Definición B.1, es una condición suficiente para asegurar la reducción del conjunto de búsqueda a un entorno arbitrariamente pequeño del estado actual del sistema. Pero debido a que la implementación de (B.2) se lleva a cabo de forma numérica, solo es válida la evolución en tiempo discreto de un subconjunto finito de D^{t_0} , (*Grillado* del conjunto D^{t_0}). Dado que la condición inicial x_0 , generalmente no coincidirá con ninguno de los puntos seleccionados, la intersección planteada por B.2 puede ser en un conjunto vacío.

A continuación, asociada al sistema B.1 se introduce una noción alternativa al concepto de

observabilidad que contempla las limitaciones planteadas en la Observación B.1 y la discretización del tiempo.

Definición B.3. Dados γ y ϵ dos números reales positivos,

- Se dice que el par de estados (x_1, x_2) con $\|x_1 - x_2\| \geq \epsilon$ es $q - \gamma - \epsilon$ *indistinguible* si para todo $t \geq t_0$ se verifica que $\|h(\phi_q(t, t_0, x_1)) - h(\phi_q(t, t_0, x_2))\| < \gamma$
- El sistema (B.1) es $q - \gamma - \epsilon$ *observable* si para todo par (x_1, x_2) con $\|x_1 - x_2\| \geq \epsilon$, existe un $t^* > t_0$ tal que $\|h(\phi_q(t, t_0, x_1)) - h(\phi_q(t, t_0, x_2))\| > 2\gamma$ para algún $t \in [t_0, t^*]$.

En la *Proposition 3.6* de [20] se demuestra que para un sistema (B.1) existe un tiempo $t_q^* > t_0$ para el cual, en base a la salida del sistema, es posible distinguir entre una trayectoria que evoluciona a partir de la condición inicial x_0 de otra que comienza en, digamos, ζ en a lo sumo un tiempo t_q^* , mientras que se verifique $\|\zeta - x_0\| \geq \epsilon$. Por lo tanto, para reducir D^{t_0} en principio resulta suficiente construir un grillado que cubra el conjunto de forma tal que los centros de las celdas adyacentes se encuentren a distancia 2ϵ . Toda celda C con centro c tal que $x_0 \notin C$ evoluciona acorde a la dinámica del sistema, y c eventualmente será descartado junto a toda la celda. De esta manera, en a lo sumo un tiempo t_q^* , el conjunto D^{t_0} se reducirá a una celda de diámetro 2ϵ . El descartador se basa en esta idea.

En lo que sigue se considerará a las celdas como hipercubos de radio ϵ , con bordes paralelos a los ejes coordenados, y se asumirá que existe una sucesión fija de tiempos $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_k, \dots\}$ y otra sucesión $\mathcal{Y} = \{y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_k), \dots\} \subset \mathbb{R}^p$ compuesta por muestras de la salida del sistema (B.1) correspondiente a la condición inicial $x(t_0) = x_0$.

Dadas dos sucesiones de tiempo de la forma $\bar{\tau} = t_{k_1} \leq \tilde{\tau} = t_{k_2}$, se denota $\mathcal{T}_{\bar{\tau}}^{\tilde{\tau}} = \{t_{k_1}, t_{k_1+1}, \dots, t_{k_2}\} \subset \mathcal{T}$ e $\mathcal{Y}_{\bar{\tau}}^{\tilde{\tau}} = \{y(t_{k_1}), y(t_{k_1+1}), \dots, y(t_{k_2})\} \subset \mathcal{Y}$ con $k^* = k_2 - k_1$.

Definición B.4. Dados $\gamma, \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\bar{\tau}, \tilde{\tau} \in \mathcal{T}$ como se definió previamente, un $q - \gamma - \epsilon$ -**descartador** es un *sistema dinámico* $\mathbf{D}_{q, \epsilon, \gamma}^{\bar{\tau}, \tilde{\tau}} : \text{cmp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [\text{cmp}(\mathbb{R}^n)]^{k^*+1}$ tal que si $\mathcal{K} \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{D}_{q, \epsilon, \gamma}^{\bar{\tau}, \tilde{\tau}}(\mathcal{K}) = \{\hat{D}_q^{\bar{t}_0}, \hat{D}_q^{\bar{t}_1}, \dots, \hat{D}_q^{\bar{t}_{k^*}}\}$, donde para cualquier $1 \leq j \leq k^*$, $\hat{D}_q^{\bar{t}_j} = \cup\{c \in \hat{D}_q^{\bar{t}_{j-1}} : \|y(t_{k_1+j}) - h(\phi_q(t_{k_1+j}, t_{k_1+j-1}, c))\| \leq \gamma\}$ es el conjunto de búsqueda a tiempo \bar{t}_j , y $\hat{D}_q^{\bar{t}_0}$ es el conjunto de centros de las celdas que conforman el grillado que cubren a \mathcal{K} .

Observación B.2. Sin restricciones adicionales, el descartador presenta dos problemas:

1. *El problema de descarte de estados (State discarding problem)*: este problema está asociado al hecho de que en la práctica se tiene el conjunto \mathcal{Y} de muestras de la salida dado por el conjunto de tiempos en \mathcal{T} , por lo que solo se puede determinar la diferencia entre dos valores consecutivos de la salida con una resolución finita.

Formalmente, el problema de descartación se establece de la siguiente manera: dados $\phi_q(t^*, t_0, x_1)$ y $\phi_q(t^*, t_0, x_2)$ tales que $\|h(\phi_q(t^*, t_0, x_1)) - h(\phi_q(t^*, t_0, x_2))\| \geq 2\gamma$, encontrar el menor valor de Δt tal que $\|h(\phi_q(t^* + \Delta t, t_0, x_1)) - h(\phi_q(t^* + \Delta t, t_0, x_2))\| \leq \gamma$.

De otra forma: determinar el menor tiempo entre muestras, ΔT , de forma tal que el proceso de descarte sea posible cuando las condiciones de distinción se verifican.

El *Lema 3.11* en [20] establece la condición de diseño $\Delta T < \frac{\gamma}{2L_h\|f_q\|}$ para dar solución a este problema. Aquí L_h es la constante de Lipschitz de h en el conjunto \mathcal{X} y $\|f_q\| = \max_{x \in \mathcal{X}} \{\|f_q(x)\|\}$.

2. *Consistencia (Consistency)*: puede suceder que todo el conjunto de búsqueda sea descartado. Esto puede ocurrir debido a que en el proceso de grillado, el centro c_i^* de la celda que contiene la condición inicial actual x_0 en general no es x_0 . En esta situación toda la celda se descartará cuando T_e , el tiempo de evolución de los estados del descartador, es demasiado largo.

El *Lema 3.12* del mismo artículo, establece una cota superior para el tiempo de evolución para el cual se preserva la celda que contiene el estado actual del sistema. Este tiempo de evolución debe verificar $T_e < \frac{1}{L_{f_q}} \ln\left(\frac{\gamma}{\epsilon L_h}\right)$, donde L_{f_q} es la constante de Lipschitz de f_q en el conjunto \mathcal{X} .

Concatenación de descartadores

Dado que T_e crece a medida que ϵ disminuye, en principio se puede tomar ϵ lo suficientemente pequeño como para poder utilizar un solo $q - \gamma - \epsilon$ descartador por un tiempo lo suficientemente largo como para descartar la mayoría de las celdas que cubren a D^{t_0} . Sin embargo, un pequeño ϵ aumenta drásticamente la carga computacional.

Una forma de evitar este problema y, al mismo tiempo, obtener una menor incertidumbre en la determinación del estado real del sistema consiste en concatenar descartadores individuales. Esta concatenación consiste en la aplicación sucesiva de $q - \gamma - \epsilon$ descartadores y un refinamiento en el grillado.

Para ejemplificar este comportamiento, se considera $\mathcal{K} \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ y dos descartadores

$$\mathbf{D}_{q,\epsilon_i,\gamma_i}^{\tau_i,\tau_{i+1}} : \text{cmp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [\text{cmp}(\mathbb{R}^n)]^{k^*_{i+1}}, \quad \mathbf{D}_{q,\epsilon_{i+1},\gamma_{i+1}}^{\tau_{i+1},\tau_{i+2}} : \text{cmp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [\text{cmp}(\mathbb{R}^n)]^{k^*_{i+1}+1}$$

con $\epsilon_{i+1} < \epsilon_i$ y $\gamma_{i+1} < \gamma_i$

Su concatenación $\mathbf{D}_{q,\epsilon_i,\gamma_i}^{\tau_i,\tau_{i+1}} \triangleright \mathbf{D}_{q,\epsilon_{i+1},\gamma_{i+1}}^{\tau_{i+1},\tau_{i+2}} : \text{cmp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [\text{cmp}(\mathbb{R}^n)]^{k^*_i+k^*_{i+1}+2}$ se define como:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{q,\epsilon_i,\gamma_i}^{\tau_i,\tau_{i+1}} \triangleright \mathbf{D}_{q,\epsilon_{i+1},\gamma_{i+1}}^{\tau_{i+1},\tau_{i+2}}(\mathcal{K}) &= \{\hat{D}_q^{t_0}, \dots, \hat{D}_q^{t_{k^*_i}}, \hat{D}_q^{t_{k^*_i+1}}, \dots, \hat{D}_q^{t_{k^*_i+k^*_{i+1}+2}}\} \quad \text{con} \\ \{\hat{D}_q^{t_0}, \dots, \hat{D}_q^{t_{k^*_i}}\} &= \mathbf{D}_{q,\epsilon_i,\gamma_i}^{\tau_i,\tau_{i+1}}(\mathcal{K}) \quad \text{y} \\ \{\hat{D}_q^{t_{k^*_i+1}}, \dots, \hat{D}_q^{t_{k^*_i+k^*_{i+1}+2}}\} &= \mathbf{D}_{q,\epsilon_{i+1},\gamma_{i+1}}^{\tau_{i+1},\tau_{i+2}}(\mathcal{K}^*), \end{aligned}$$

donde el conjunto $\mathcal{K}^* = \hat{D}_q^{t_{k^*_i+1}}$ viene dada por el siguiente refinamiento en el grillado

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^* &= \left((\hat{D}_q^{t_{k^*_i}} + G_{\epsilon_{i+1}}) \cup \hat{D}_q^{t_{k^*_i}} \right) \cap ([h^{-1}(y(\tau_{i+1}))]_{\epsilon_{i+1}}), \quad \text{con} \\ G_{\epsilon_{i+1}} &= \{-\epsilon_{i+1}/\sqrt{n}, \epsilon_{i+1}/\sqrt{n}\}^n. \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Alessandri, A. and Coletta, P. (2001). Switching observers for continuous-time and discrete-time linear systems. In *Proceedings of the 2001 American Control Conference. (Cat. No.01CH37148)*, volume 3, pages 2516–2521.
- [2] Barbot, J. P., Fliess, M., and Floquet, T. (2007). An algebraic framework for the design of nonlinear observers with unknown inputs. In *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 384–389. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- [3] Barhoumi, N., Msahli, F., Djemai, M., and Busawon, K. (2012). Observer design for some classes of uniformly observable nonlinear hybrid systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 6(4):917–929.
- [4] Benitez, O. M. and García, R. A. (2018). An observer for nonlinear switched system. In *2018 Argentine Conference on Automatic Control (AADECA)*, pages 1–6.
- [5] Benitez, O. M. and García, R. A. (2022). A state estimation strategy for a nonlinear switched system with unknown switching signals. *International Journal of Control*, 95(7):1747–1758.
- [6] Benitez, O. M. and García, R. A. (2023). State estimation of lipschitz continuous switched systems with unknown switching signals. *International Journal of Control*, 96(9):2240–2259.
- [7] Bornard, G., Celle-Couenne, F., and Gilles, G. (1995). Observability and observers. *Nonlinear Systems*, 1:173–216.
- [8] Ciccarella, G., Mora, M. D., and Germani, A. (1993). A Luenberger-like observer for nonlinear systems. *International Journal of Control*, 57(3):537–556.

- [9] Davila, J., Fridman, L., Pisano, A., and Usai, E. (2009). Finite-time state observation for non-linear uncertain systems via higher-order sliding modes. *International Journal of Control*, 82(8):1564–1574.
- [10] Decarlo, R. A., Branicky, M. S., Pettersson, S., and Lennartson, B. (2000). Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 88(7):1069–1082.
- [11] Evans, L. C. and Gariepy, R. F. (2015). *Measure Theory and Fine Properties of Functions, Revised Edition*. Chapman and Hall/CRC.
- [12] Fliess, M. and Sira-Ramírez, H. (2003). An algebraic framework for linear identification. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9:151–168.
- [13] Gara, H. and Ben Saad, K. (2018). Design of a fault detection hybrid observer for linear switched systems. In *2018 15th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD)*, pages 1–6.
- [14] Gara, H. and Ben Saad, K. (2020). Fault diagnosis for hybrid systems based on a bank of linear observers and a discrete automaton. *SN Applied Sciences*, 2(11):1802–1810.
- [15] Gel'fand, I. M. and Shilov, G. E. (1964). *Generalized Functions, Volume 1: Properties and Operations*, volume 377. AMS Chelsea Publishing.
- [16] Goebel, R., Sanfelice, R. G., and Teel, A. R. (2012). *Hybrid Dynamical Systems: Modeling, Stability, and Robustness*. Princeton University Press.
- [17] Gómez-Gutiérrez, D., Čelikovský, S., Ramírez-Treviño, A., and Castillo-Toledo, B. (2015). On the observer design problem for continuous-time switched linear systems with unknown switchings. *Journal of the Franklin Institute*, 352(4):1595–1612.
- [18] Halperin, I. and Schwartz, L. (1952). *Introduction to the Theory of Distributions*. University of Toronto Press.
- [19] Hermann, R. and Krener, A. (1977). Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(5):728–740.
- [20] Hernandez, S. M. and García, R. A. (2014). An observer for switched Lipschitz continuous systems. *International Journal of Control*, 87(1):207–222.

- [21] Islem, L., Asma, T., and Nadia, Z. (2019). Hybrid sliding mode observer for uncertain linear switching system with actuator faults. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 41(15):4301–4310.
- [22] Jean-Paul, G., Hammouri, H., and Othman, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 37:875–880.
- [23] Khalil, H. K. (2015). *Nonlinear Control*. Pearson Education.
- [24] Kumar, B. and Dutta Roy, S. (1988). Design of digital differentiators for low frequencies. *Proceedings of the IEEE*, 76(3):287–289.
- [25] Laboudi, K., Messai, N., Manamanni, N., and Mboupe, M. (2019). Fault and switching instants estimation for switched linear systems. *New Trends in Observer-Based Control*, pages 407–438.
- [26] Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3):379–384.
- [27] Li, J., So, A. M., and Ma, W.-K. (2020). Understanding notions of stationarity in Non-Smooth optimization. *arXiv (Cornell University)*.
- [28] Liberzon, D. (2003). *Switching in systems and control. Systems & Control: Foundations & Applications*. Birkhäuser Boston.
- [29] Liberzon, D. and Morse, A. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19(5):59–70.
- [30] Lin, H. and Antsaklis, P. J. (2009). Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(2):308–322.
- [31] Mboup, M. (2009). Parameter estimation for signals described by differential equations. *Applicable Analysis*, 88:29–52.
- [32] Nicosia, S., Tornambé, A., and Valigi, P. (1994). Nonlinear map inversion via state observers. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 13:571–589.
- [33] Pettersson, S. (2006). Designing switched observers for switched systems using multiple lyapunov functions and dwell-time switching. In *IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, pages 18–23.

- [34] Ríos, H., Davila, J., and Fridman, L. (2012). High-order sliding modes observers for linear autonomous-switched systems with unknown inputs. In *2012 12th International Workshop on Variable Structure Systems*, pages 428–433. IEEE.
- [35] Ríos, H., Davila, J., and Fridman, L. (2012). High-order sliding mode observers for non-linear autonomous switched systems with unknown inputs. *Journal of the Franklin Institute*, 349(10):2975–3002.
- [36] Shorten, R., Wirth, F. R., Mason, O., Wulff, K., and King, C. K. (2007). Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Rev.*, 49:545–592.
- [37] Soo-Chang, P. and Jong-Jy, S. (1988). Design of FIR Hilbert transformers and differentiators by eigenfilter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35(11):1457–1461.
- [38] Sung, Y.-C., Patil, S. V., and Safonov, M. G. (2022). Robustness of uncertain switching nonlinear feedback systems against large time-variation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(2):993–1000.
- [39] Tanwani, A., Shim, H., and Liberzon, D. (2013). Observability for switched linear systems: Characterization and observer design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(4):891–904.
- [40] Tian, Y., Floquet, T., Belkoura, L., and Perruquetti, W. (2009). Algebraic switching time identification for a class of linear hybrid systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 42(17):404–408. 3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems.
- [41] Tsinias, J. (1989). Observer design for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 13(2):135–142.
- [42] Vidal, R., Chiuso, A., Soatto, S., and Sastry, S. (2003). Observability of linear hybrid systems. In *Hybrid Systems: Computation and Control*, volume 2623, pages 526–539. Springer Berlin Heidelberg.
- [43] Xia, X. and Zeitz, M. (1997). On nonlinear continuous observers. *International Journal of Control*, 66(6):943–954.
- [44] Xie, G. and Wang, L. (2004). Necessary and sufficient conditions for controllability and observability of switched impulsive control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(6):960–966.

-
- [45] Zemanian, A. (1987). *Distribution Theory and Transform Analysis: An Introduction to Generalized Functions, with Applications*. Dover Publications.