



TESIS DE GRADO EN INGENIERÍA INDUSTRIAL

**TEST DE RELACIÓN DE PROBABILIDAD
SECUENCIAL (TRPS) Y UN MECANISMO DE
TRUNCAMIENTO CON EL MODELO BINOMIAL
COMO DISTRIBUCIÓN SUBYACENTE**

Julio 2005

Argüelles, Álvaro Ricardo

Legajo: 41011

alvarguelles@gmail.com

Tutor: Lic. Francisco F. Villaverde

paco@itba.edu.ar

RESUMEN

En el presente trabajo se estudia un tipo de análisis para realizar pruebas de hipótesis denominado Test de Relación de Probabilidad Secuencial (TRPS) desarrollado por Abraham Wald. Este método es analizado utilizando el modelo Binomial como distribución subyacente.

Se estudian las consecuencias de la aplicación de un mecanismo de truncamiento propuesto por Daniel De Souza y se realiza además, un estudio preliminar sobre un mecanismo de truncamiento desarrollado por el autor. Se desarrolla una función especial para comparar ambos procedimientos y establecer un criterio práctico para decidir que mecanismo es menos costoso.

Palabras clave: Test de Relación de Probabilidad Secuencial (TRPS), modelo Binomial, mecanismo de truncamiento.

ABSTRACT

In this work, a type of analysis used for hypothesis testing named Sequential Probability Ratio Test (SPRT) developed by Abraham Wald is studied. This method is analyzed using the Binomial model as the underlying sampling distribution.

The consequences of the application of a truncation mechanism proposed by Daniel De Souza are studied and a preliminary study of a truncation mechanism developed by the author is done. A special function is developed to compare both procedures and determine a practical decision criteria to decide which mechanism is less expensive.

Key words: Sequential Probability Ratio Test (SPRT), Binomial model, truncation mechanism.

AGRADECIMIENTOS

A toda mi familia y amigos por apoyarme, a Alejandro Ayestarán por sus fundamentales y desinteresados aportes y a mi tutor Paco Villaverde por su paciencia y sus sugerencias.

ÍNDICE

RESUMEN	<i>i</i>
ABSTRACT	<i>ii</i>
AGRADECIMIENTOS	<i>iii</i>
GLOSARIO	<i>vii</i>
1. ANTECEDENTES:	<i>1</i>
2. INTRODUCCIÓN:	<i>2</i>
3. CONCEPTOS PRINCIPALES	<i>3</i>
4. SIMULACIÓN DE UN CASO CON DISTRIBUCIÓN BINOMIAL...	<i>7</i>
4.1. Base para la comparación: el método clásico	<i>9</i>
4.2. Resultados al aplicar TRPS.....	<i>11</i>
4.3. Análisis de Sensibilidad.....	<i>15</i>
4.4. Algunas consecuencias de modificar las Variables Fundamentales.....	<i>18</i>
5. MECANISMO DE TRUNCAMIENTO PARA EL TRPS	<i>21</i>
5.1. Mecanismo de truncamiento propuesto por Daniel De Souza	<i>22</i>
5.2. Propuesta de mecanismo de truncamiento	<i>26</i>
6. COMPARACIÓN ENTRE MECANISMOS DE TRUNCAMIENTO	<i>32</i>
6.1 La función “Costo” como herramienta de análisis.....	<i>33</i>
6.2. Criterios óptimos para cada mecanismo de truncamiento.....	<i>35</i>
6.3. Criterio para la selección del método óptimo	<i>38</i>
7. CONCLUSIONES	<i>40</i>
8. REFERENCIAS	<i>43</i>
ANEXO I. CASOS REALES EN LOS QUE SE APLICA EL TRPS	<i>44</i>
I.1 Aplicación al agro: “Muestreo secuencial de <i>Spodoptera Frugiperda</i> en el algodón” [7].	<i>44</i>
I.2 Aplicación a encuestas sociales o de opinión: “Muestreo secuencial en cuestionarios de opinión pública” [8]......	<i>45</i>
I.3 Aplicación en productos metalúrgicos: “Análisis secuencial de vida aplicado a productos metalúrgicos cuando la vida mínima del modelo de Weibull es diferente de cero” [4].	<i>46</i>
I.4 Aplicación en estudios clínicos: “Test secuencial aplicado a estudios epidemiológicos” [9]......	<i>47</i>
ANEXO II. APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS	<i>48</i>
ANEXO III. CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE TESTS DE HIPÓTESIS	<i>49</i>
ANEXO IV. BIOGRAFÍA DE ABRAHAM WALD [1902 – 1950]	<i>51</i>
ANEXO V. CÓDIGOS DE LOS PROGRAMAS DESARROLLADOS ..	<i>52</i>
TRPS sin truncamiento.	<i>52</i>
TRPS con el mecanismo propuesto por De Souza.	<i>54</i>
TRPS con el mecanismo propuesto por el autor.	<i>56</i>

Índice de tablas y figuras

<i>Figura 3.1 – Ejemplo de TRPS en donde se acepta H_0.</i>	6
<i>Tabla 4.1.1 – Observaciones necesarias y condición de rechazo para el método Clásico.</i>	9
<i>Figura 4.1.1 – Curva operativa del test clásico.</i>	10
<i>Tabla 4.2.1 – Resultados de la simulación para ambos métodos.</i>	11
<i>Tabla 4.2.2 – Ahorro de observaciones con el TRPS.</i>	11
<i>Tabla 4.2.3 – Comparación de resultados de ambos métodos.</i>	11
<i>Tabla 4.2.4 – Porcentaje de casos inconclusos del TRPS.</i>	12
<i>Figura 4.2.1 – Histograma de cantidad de observaciones con TRPS.</i>	13
<i>Figura 4.2.2 – Función de características operativas para diferentes proporciones.</i>	13
<i>Figura 4.2.3 – Número promedio de muestras para el TRPS para diferentes proporciones.</i>	14
<i>Tabla 4.2.5 – Errores relativo y absoluto del valor esperado de la simulación contra el teórico.</i>	14
<i>Tabla 4.2.6 – Ahorros y ahorros porcentuales del TRPS.</i>	14
<i>Tabla 4.3.1 – Resultados del TRPS para diferentes valores de LPTD.</i>	15
<i>Tabla 4.3.2 – Errores tipo I y II para el TRPS bajo las hipótesis originales.</i>	15
<i>Figura 4.3.1 (aumentada) – Como afecta una serie discreta los valores alfa y beta reales.</i>	16
<i>Figura 4.3.2 – Modificación de las líneas de decisión al modificar alfa y beta.</i>	17
<i>Figura 4.4.1 – Valor esperado de observaciones para diferentes alfa y beta.</i>	18
<i>Tabla 4.4.1 – Resultados de variar alfa y beta en ambos métodos.</i>	18
<i>Figura 4.4.2 – Valor esperado de observaciones para diferentes p_0 y p_1.</i>	19
<i>Tabla 4.4.2 – Resultados de variar p_0 y p_1 en ambos métodos.</i>	19
<i>Tabla 4.4.3 – Desvíos estándares de la variable “n max”.</i>	19
<i>Figura 4.4.3 – Magnitud de los intervalos $[p_0 - p_1]$ al modificar dichos valores.</i>	20
<i>Figura 5.1.1 – TRPS con truncamiento en el valor 140 donde se acepta H_0.</i>	22
<i>Figura 5.1.2 – Histograma de observaciones aplicado el mecanismo de De Souza.</i>	23
<i>Tabla 5.1.1 – Observaciones, errores y porcentaje de truncamientos para diferentes N_{tr} y los valores alfa modificados con el método de mínimos cuadrados.</i>	23
<i>Figura 5.1.3 – Los valores de la tabla 5.1.1 (según los valores modificados de alfa).</i>	24
<i>Tabla 5.1.2 – Variaciones entre extremos de las observaciones, alfa modificada y porcentaje de truncamientos con el mecanismo de De Souza.</i>	25
<i>Figura 5.2.1 – Truncamiento Alternativo con valor crítico igual a 1.</i>	27
<i>Figura 5.2.2 (aumentada) – Truncamiento Alternativo con valor crítico igual a 15.</i>	28
<i>Figura 5.2.3 – Valor crítico mayor que 1 ($VC = 25$). La serie corrige la decisión.</i>	29
<i>Figura 5.2.4 – Histograma de observaciones aplicado el mecanismo Alternativo con valor crítico igual a 1.</i>	29
<i>Tabla 5.2.1 – Resultados luego de variar el Valor Crítico para el mecanismo Alternativo.</i>	30
<i>Figura 5.2.5 – Valores de la tabla 5.2.1.</i>	30

<i>Tabla 5.2.2 – Variaciones entre extremos de las observaciones, alfa y porcentaje de truncamientos con el mecanismo Alternativo.</i>	30
<i>Tabla 5.2.3 – Desvíos estándares (según los valores de las tablas 5.1.1 y 5.2.1).</i>	31
<i>Tabla 6.1 – Comparación de mecanismos con iguales porcentajes de corridas “truncadas”.</i>	32
<i>Tabla 6.1.1 - Costo en función de α y n para el mecanismo De Souza (Ntr = 40).</i>	33
<i>Tabla 6.1.2 - Costo en función de α y n para el mecanismo Alternativo (VC = 1).</i>	34
<i>Tabla 6.2.1 – Costos mínimos para el mecanismo De Souza.</i>	35
<i>Tabla 6.2.2 – Costos para el mecanismo Alternativo.</i>	35
<i>Tabla 6.2.3 – Comparación de costos máximos entre mecanismos.</i>	36
<i>Tabla 6.2.4 – Comparación de costos mínimos entre mecanismos con Ntr y VC óptimas.</i>	36
<i>Tabla 6.3.1 – Costos del TRPS en función de n y alfa.</i>	38
<i>Tabla 6.3.2 – Zonas como función de α y n en que cada método es el óptimo.</i>	39
<i>Tabla II.1 – Coeficiente de determinación y varianza de la regresión.</i>	48
<i>Figura II.1 – Aproximación por mínimos cuadrados de orden 2 para alfa.</i>	48

GLOSARIO

A: valor límite de comparación para aceptar la hipótesis nula. $A = \beta/(1-\alpha)$.

Alfa, α : probabilidad de cometer un error de tipo I (rechazar H_0 cuando es verdadera).

AQL: *acceptable quality level* o Nivel de Calidad Aceptable.

ASN: *Average Simple Number* o Número Promedio de Observaciones.

B: valor límite de comparación para rechazar la hipótesis nula. $B = (1-\beta)/\alpha$.

Beta, β : probabilidad de cometer un error de tipo II (aceptar H_0 cuando es falsa).

Calfa: factor de ponderación para la variable “alfa” en la función Costo.

Cn: factor de ponderación para la variable “n prom” en la función Costo.

Función Costo: función que pondera los pesos por observación o pesos por unidad porcentual.

H_0 : hipótesis nula.

H_1 : hipótesis alternativa.

Líneas de decisión: líneas paralelas que delimitan las zonas de rechazo, aceptación y continuidad para un TRPS.

Líneas modificadas de decisión: líneas que delimitan las zonas de rechazo, aceptación y continuidad para un TRPS con el mecanismo alternativo aplicado.

LTPD: *lot tolerance percent defective* o Tolerancia Porcentual de Defectuosos en el Lote.

M: número de observaciones.

N: número de observaciones.

Nco: valor límite inferior para el mecanismo alternativo.

Ntr: valor límite o de truncamiento para el mecanismo propuesto por De Souza.

OC: *Operative Characteristics* o Función de características operativas.

P: letra utilizada como parámetro de la distribución Binomial.

P_0 : proporción nula.

P_1 : proporción alternativa.

Pc: proporción crítica.

R: cantidad de piezas, unidades o productos defectuosos hasta una determinada observación.

Rc: condición de rechazo para un test de hipótesis.

RPS: relación de probabilidad secuencial o razón de máximas verosimilitudes.

TRPS o SPRT: test de relación de probabilidad secuencial.

Variables Fundamentales: α , β , p_0 y p_1 .

VC: valor crítico para el mecanismo de truncamiento alternativo.

Zona de decisión: conjunto de valores representado gráficamente por el espacio entre las líneas de decisión, las líneas modificadas de decisión y el valor crítico de truncamiento.

1. ANTECEDENTES:

La inferencia estadística, una de las ramas más importantes de la Estadística Moderna, incluye un tema de gran importancia por su relación con la ingeniería: las pruebas de hipótesis, que han demostrado tener diversas aplicaciones industriales, económicas, financieras, médicas, comerciales, entre otras.

Dentro de estas pruebas, es necesario destacar un tipo de análisis no tan difundido como lo son los métodos clásicos: el análisis secuencial. El mismo ha encontrado un lugar en la industria, siendo ejemplos de esto el análisis de fallas consecutivas en líneas de producción y en ensayos destructivos.

El análisis secuencial es diferente de los tests de hipótesis clásicos en varios sentidos. El número de casos a ensayar en los tests clásicos es un valor fijo para cada experimento. La recolección de datos es efectuada sin análisis ni consideración alguna de la información que éstos pueden brindar, hasta tanto no se haya terminado el estudio. Luego de la recolección la información es analizada para obtener conclusiones. En los tests secuenciales cada dato recogido es estudiado y comparado con valores críticos, información que se incorpora al análisis inmediatamente. De esta manera se pueden obtener conclusiones a medida que se realiza el ensayo, pudiendo así arribar a una conclusión final antes que en el caso de los tests de hipótesis clásicos.

La ventaja de los análisis secuenciales respecto de los clásicos es que la obtención de los datos puede finalizarse luego de una menor cantidad de casos y las decisiones pueden alcanzarse en un menor tiempo generando, así, considerables ahorros en términos financieros y/o humanos.

2. INTRODUCCIÓN:

El análisis secuencial es un método de inferencia estadística desarrollado entre 1943 y 1947 por Abraham Wald, cuya principal característica es que el número de observaciones requeridas por el método no está fijado antes de comenzar los ensayos. La decisión de terminar el análisis secuencial depende, en cada paso, de las observaciones previamente realizadas. La virtud de estos métodos secuenciales, aplicados a las pruebas de hipótesis estadísticas, es que permiten diseñar procedimientos que requieran, en promedio, una cantidad sustancialmente menor de observaciones que en los métodos igualmente confiables con cantidad predeterminada de observaciones, o métodos clásicos (como se los nombrará en este trabajo) [1].

En los métodos clásicos para ensayar hipótesis el número de observaciones es tratado como una constante del problema. La esencia del análisis secuencial es, en contraposición a los modelos mencionados, que el número de observaciones depende del resultado de cada observación, convirtiéndose así en una variable aleatoria [1].

Esta metodología para testear una hipótesis puede describirse de la siguiente manera: existe una regla de decisión por la cual, luego de cada observación se puede tomar sólo una de tres alternativas, rechazar la hipótesis, aceptarla o continuar con otra muestra luego de la cual se repiten las mismas tres alternativas y así sucesivamente. Estos tests finalizan una vez rechazada o aceptada la hipótesis del problema. Se ve así que la cantidad de observaciones (n) es una variable aleatoria [1].

Este trabajo tiene como objetivo estudiar un método particular de análisis secuencial denominado Test de Relación de Probabilidad Secuencial (TRPS) y estudiar un mecanismo de truncamiento propuesto por el autor.

El análisis se desarrolla sobre un caso de control de calidad en la recepción de productos con su correspondiente análisis de sensibilidad, la aplicación de un mecanismo de truncamiento propuesto por Daniel De Souza y el ESTUDIO PRELIMINAR DE UN MECANISMO DE TRUNCAMIENTO PROPUESTO POR EL AUTOR.

3. CONCEPTOS PRINCIPALES

La idea fundamental de un test secuencial es formar la razón de verosimilitudes (L_{1m}/L_{0m}) donde el numerador es la probabilidad de obtener la muestra bajo la hipótesis alternativa H_1 y el denominador es la probabilidad de obtener la muestra bajo la hipótesis nula H_0 . Si para un cierto valor de la razón de verosimilitudes este cociente es grande, quiere decir que H_1 es más verosímil que H_0 y ésta se rechaza. Si el cociente de la razón es pequeño entonces se acepta H_0 , pero si queda entre ciertos límites, se pasa a la siguiente observación muestral.

En este trabajo se hace referencia al test como TRPS o como SPRT (por sus siglas en inglés) indistintamente.

En caso de tener una distribución de probabilidades Binomial (discreta), que es el caso en que la prueba se realiza sobre una proporción, la razón es:

$$A \leq \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^r \left(\frac{1-p_1}{1-p_0} \right)^{m-r} \leq B \quad (3.a)$$

p_1 , p_0 , r y m son el valor del parámetro que se propone en la hipótesis alternativa, el valor del parámetro que se propone en la hipótesis nula, el número de objetos defectuosos (en caso de haberlo definido así) contabilizados hasta la observación m y la cantidad de observaciones, respectivamente.

Si la prueba se realiza sobre los parámetros de una distribución de probabilidades Weibull (continua), la razón es:

$$A \leq \left(\frac{\gamma_1 * \theta_0^{\gamma_0}}{\theta_1^{\gamma_1} \gamma_0} \right)^n \prod_{i=1}^n \left[\frac{(t_i - \phi_1)^{\gamma_1 - 1}}{(t_i - \phi_0)^{\gamma_0 - 1}} \right] - \exp \left[- \sum_{i=1}^n \left(\frac{(t_i - \phi_1)^{\gamma_1}}{\theta_1^{\gamma_1}} - \frac{(t_i - \phi_0)^{\gamma_0}}{\theta_0^{\gamma_0}} \right) \right] \leq B \quad (3.b)$$

Siendo γ , ϕ y θ parámetros de forma, posición y escala, respectivamente. Los subíndices 0 y 1 indican que parámetros corresponden a la hipótesis nula y cuáles a la alternativa.

En ambas razones o RPS's (relaciones de probabilidad secuencial), A y B son las mismas:

$$A = \beta/(1-\alpha) \quad (3.c.1)$$

$$B = (1-\beta)/\alpha \quad (3.c.2)$$

Donde β es la probabilidad de error tipo II y α la probabilidad de error tipo I.

Una vez realizada la primera observación se procede a calcular la RPS y luego a compararla con A y B, siguiendo la siguiente regla de decisión:

- Si $RPS \leq A$, entonces se acepta H_0 .
- Si $RPS \geq B$, entonces se rechaza H_0 .
- Si $A \leq RPS \leq B$, el test continúa y se considera una nueva observación muestral.

En este trabajo el RPS se forma como indica la ecuación 3.a ya que se plantea el caso de control de recepción en el que los productos son catalogados con dos posibles atributos. La proporción de uno de estos atributos es la que se prueba con el test de hipótesis clásico y con el método secuencial.

De la ecuación 3.a se puede despejar r aplicando logaritmos a ambos miembros. Esto es importante ya que r (la cantidad de unidades defectuosas hasta la observación m) es la variable que se debe medir a medida que transcurre el test. La ecuación queda de la siguiente manera:

$$\text{Ordenada } 0 + \mathbf{m} * \text{Pendiente} < \mathbf{r} < \text{Ordenada } 1 + \mathbf{m} * \text{Pendiente} \quad (3.d)$$

El miembro izquierdo y el derecho representan rectas cuya variable independiente es m y variable dependiente es r.

Siendo:

$$\text{Ordenada } 0 = \frac{\log(A)}{\log\left(\frac{p_1}{p_0}\right) - \log\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)} \quad (3.d.1)$$

$$\text{Ordenada } 1 = \frac{\log(B)}{\log\left(\frac{p_1}{p_0}\right) - \log\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)} \quad (3.d.2)$$

$$\text{Pendiente} = \frac{\log\left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)}{\log\left(\frac{p_1}{p_0}\right) - \log\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)} \quad (3.d.3)$$

Es importante destacar que, en este caso, el TRPS queda definido por las variables p_0 , p_1 , α y β que son seleccionadas por el experimentador. Estas cuatro variables serán denominadas “Variables Fundamentales” en el resto del trabajo.

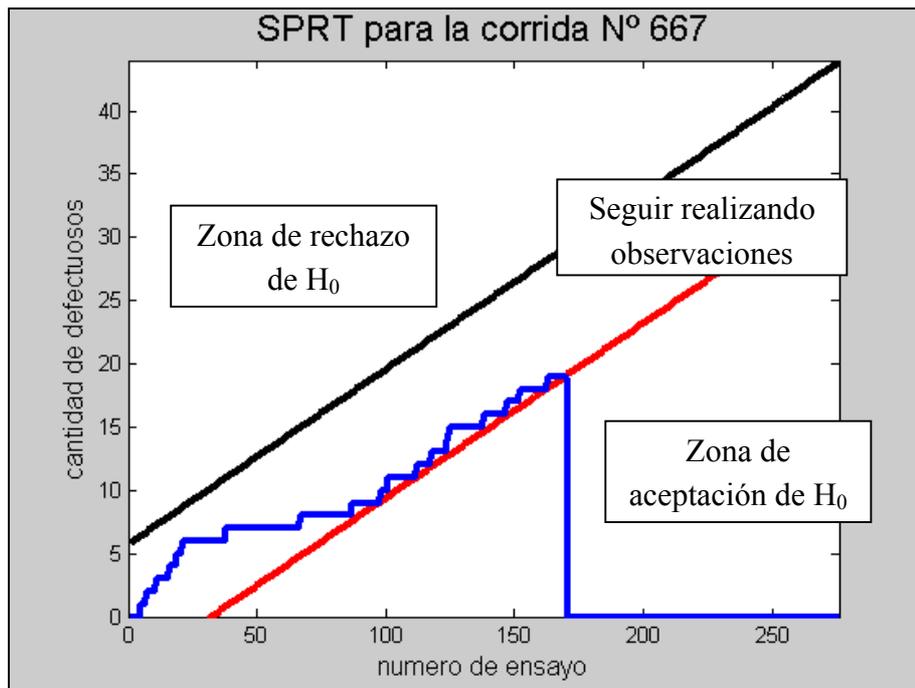
Las consecuencias que puede tener sobre el test la definición de estas variables queda plasmada en dos funciones: la función de Características Operativas (*OC*, por su sigla en inglés) y la de Número Promedio de Muestras (*ASN*, también por su sigla en inglés).

La *OC* es la probabilidad de aceptar H_0 cuando es falsa. Es una función que depende de los parámetros de la distribución.

La *ASN* es el valor esperado de n , la cantidad de observaciones.

Hay ocasiones en las que el TRPS puede insumir el doble o el triple de observaciones que el test clásico aunque la probabilidad de que esto ocurra es muy baja¹. Por otro lado, se tiene la seguridad de que el test termina (esto es: arriba a una decisión) ya que Wald demuestra que la probabilidad de ello es uno¹.

¹ Para mas detalles acerca de estas dos aseveraciones remitirse a [1].

Figura 3.1 – Ejemplo de TRPS en donde se acepta H_0 .

La figura 3.1 muestra un ejemplo de cómo evoluciona un test secuencial. La línea que avanza entre las rectas paralelas (líneas de decisión) indica la sumatoria de piezas defectuosas tomando los valores uno para defectuosa o cero para las que están en buen estado. Como se puede ver, el test avanza entre las dos rectas sin detenerse hasta alcanzar una de las líneas de decisión (esta línea continúa siendo igual a cero por una cuestión de programación).

4. SIMULACIÓN DE UN CASO CON DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

El caso analizado es muy común en cualquier rubro industrial: el *control de la recepción* de productos, insumos, materia prima, etc. Cuando las características evaluadas son atributivas, esto es: bueno o malo, sano o roto, pasa o no-pasa, se utiliza el modelo Binomial.

Se codificó en Matlab 6.5 un programa capaz de generar aleatoriamente un proceso de Bernoulli (sólo ceros y unos en una determinada proporción) y procesar estos valores con ambos métodos: en el caso del método clásico, el programa determina si debe aceptar o rechazar la hipótesis nula en base a la cantidad de unos de cada corrida. Para el TRPS, el programa utiliza los valores generados para el método clásico respetando el orden en que fueron creados. De esta forma el programa puede simular la obtención secuencial de valores de la misma forma en que se realizaría un TRPS en la realidad y, al mismo tiempo, comparar qué decisión toma cada método para una misma corrida. Los resultados fueron volcados a MS Excel.

Fueron realizados 5 grupos de 2000 corridas para el método clásico determinando en cada una la cantidad de rechazos y aceptaciones que tuvo la hipótesis nula. Una vez almacenados, estos valores fueron tomados por el programa para analizar cada corrida con el método TRPS. Este análisis incluyó el registro de la cantidad de rechazos, aceptaciones e indeterminaciones (corridas en las que el método no llega a decidir) del test como así también la concordancia entre las decisiones tomadas por uno u otro método.

En general se fija un error de tipo I (α) para la proporción nula p_0 , un error de tipo II (β) para una proporción alternativa p_1 y se halla la cantidad de observaciones necesarias para satisfacer ambos errores.

El criterio utilizado para determinar p_0 y p_1 es el siguiente: si la proporción de defectuosos p de la muestra es más baja que p_0 es grave rechazar el lote porque esta decisión afecta al proveedor quien debe trasladar nuevamente las piezas y cambiarlas por otras, por ejemplo. La situación contraria es la de aceptar un lote con una proporción de piezas defectuosas p más elevado que p_1 porque esta decisión afecta al comprador ya que adquiere un producto con demasiadas piezas malas.

$$n_{clásico} = \left(\frac{Z_{1-\alpha} \sqrt{p_0(1-p_0)} + Z_{1-\beta} \sqrt{p_1(1-p_1)}}{p_1 - p_0} \right)^2 \quad (4.a)$$

$Z_{1-\alpha}$ y $Z_{1-\beta}$ son los valores de la distribución Normal estándar invertida para las probabilidades $1-\alpha$ y $1-\beta$ respectivamente.

Se puede ver en la ecuación 4.a que si p_1 tiende a p_0 o ambas tienden a un mismo valor, la cantidad de observaciones n tiende a valores muy grandes.

Si H_0 es $p \leq p_0$ la fórmula para determinar la condición de rechazo es:

$$r_c \geq n * \left[p_0 + Z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right] + 0,5 \quad (4.b)$$

Por lo expuesto hasta aquí, ambos tests (Clásico y TRPS) definen dos proporciones, AQL (*Acceptable Quality Level*) y LPTD (*Lot Tolerance Percent Defective*). El AQL o p_0 lo fija el proveedor quien no quiere que le rechacen lotes buenos y el LPTD o p_1 lo define el comprador quien no quiere comprar lotes malos.

4.1. Base para la comparación: el método clásico

El caso analizado es el de un comprador de unidades (piezas, repuestos, insumos, etc.) que recibe lotes de parte de un proveedor. La proporción de unidades defectuosas es el parámetro sobre el que se plantea la hipótesis del test, por lo tanto la hipótesis nula es $H_0: p \leq p_0 = \text{AQL}$.

El proveedor desea protegerse de la indeseable situación que significa para él que le devuelvan un lote con una proporción de unidades defectuosas baja (o sea, menor que el AQL) y lo realiza seleccionando p_0 y α . El comprador desea protegerse de la indeseable situación que significa para él comprar un lote con una proporción de unidades defectuosas excesiva (o sea, mayor que el LPTD) y lo realiza seleccionando p_1 y β .

La razón por la que así se diseña un test de hipótesis se fundamenta en que si se plantearan las hipótesis nula y alternativa sobre un único valor del parámetro (p_c o proporción crítica cuyo valor está entre los valores de p_0 y p_1 . En este trabajo p_c es 14%), se necesitaría ensayar los lotes en su totalidad. La ecuación 4.a muestra este suceso ya que si p_0 y p_1 fuesen ambas iguales a p_c , n tendería a valores muy elevados.

Para el caso analizado el AQL es 11% y el LPTD es 17%. La hipótesis nula que se plantea es $H_0: p \leq p_0 = \text{AQL}$ y la hipótesis alternativa es $H_1: p \geq p_1 = \text{LPTD}$. Se considera $\alpha = 5\%$ y $\beta(p_1) = 10\%$.

Con estos valores se tiene:

Obs. necesarias	n =	276
Condición de rechazo	rc >=	39

Tabla 4.1.1 – Observaciones necesarias y condición de rechazo para el método Clásico.

O sea, de cada lote deben examinarse 276 piezas (o unidades) y se rechazará la hipótesis nula si la cantidad de piezas defectuosas es mayor o igual que $r_c = 39$.

La curva operativa del test clásico es:

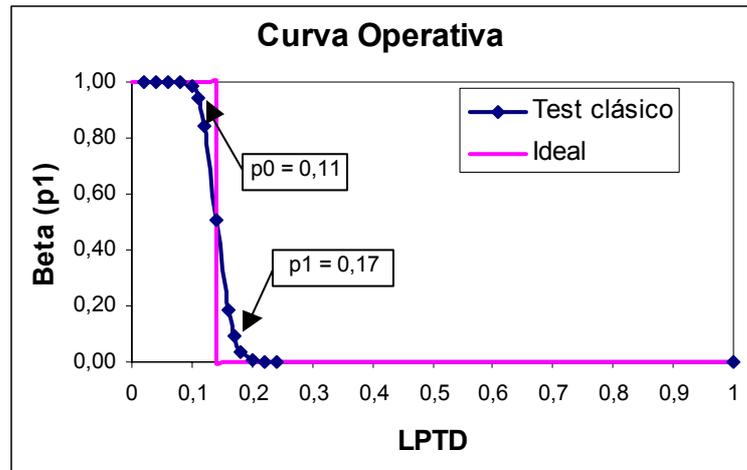


Figura 4.1.1 – Curva operativa del test clásico.

La curva operativa (es la probabilidad de aceptar H_0 cuando esta es falsa) de la figura 4.1.1 muestra como es la respuesta del test ante diferentes valores de la proporción alternativa. Se puede ver que si el parámetro de la distribución es $p = 11\%$ la probabilidad de aceptar H_0 (que es verdadera), es del $1 - \alpha = 0,95$.

La respuesta ideal es la dibujada en la figura 4.1.1 y su forma se debe a que cualquier valor de p apenas menor o mayor que $p = 14\%$ debería ser detectado con máxima precisión para tomar la decisión correcta en cada caso. Se puede ver que la probabilidad de cometer un error tipo II es igual a 1 (esto hace a alfa igual a cero) cuando H_0 es verdadera e igual a 0 cuando es falsa.

4.2. Resultados al aplicar TRPS

El caso TRPS se realizó según lo indicado en la sección 3. En las 208 corridas en las que el test no concluyó al llegar a la observación n° 276, se registraron esas “indeterminaciones” como tales en vez de dejar que continúe el test. La razón estriba en que luego de 276 observaciones se puede contabilizar la cantidad de piezas defectuosas y compararla con r_c aceptando o rechazando la hipótesis nula de acuerdo con la metodología clásica.

TRPS	E(n)	cantidad aceptaciones	alfa	cantidad rechazos	1-alfa	Datos con $p = 0,11$
	132	1708	4,73	85	95,27	
Clásico	n	cantidad aceptaciones	alfa	cantidad rechazos	1-alfa	
	276	1907	4,64	93	95,36	

Tabla 4.2.1 – Resultados de la simulación para ambos métodos².

Ahorro con TRPS	52,3%
------------------------	--------------

Tabla 4.2.2 – Ahorro de observaciones con el TRPS.

Se puede observar que los valores alfa y 1-alfa de la tabla 4.2.1 son los esperados e iguales con excepción de la cantidad de observaciones que son un 52,3% menores para TRPS. La razón por la que la cantidad de aceptaciones y rechazos del TRPS no suman 2000 en la tabla 4.2.1, es porque la diferencia son los casos en los que el método no arribó a una decisión al llegar a la observación número 276.

coincidencias aceptación	coincidencias rechazo	Decisiones diferentes		Indecisiones TRPS		TOTAL
1695	50	47		208		2000
		fallas Clásico	fallas TRPS	Acepta Clásico	Rechaza Clásico	
		13	35	178	30	

Tabla 4.2.3 – Comparación de resultados de ambos métodos³.

² Alfa y 1-alfa en TRPS fueron calculadas sin tener en cuenta las corridas que NO arribaron a una decisión.

³ Las “decisiones diferentes” no suman lo mismo que “fallas clásico” y “fallas TRPS” porque todos los valores de la Tabla 4.2.3 son promedios de 5 corridas redondeados a valores enteros.

La tabla 4.2.3 muestra la cantidad de veces que los métodos llegaron a decisiones iguales o diferentes y cuántas de estas últimas fueron equivocadas por uno u otro:

“Fallas TRPS” es la cantidad de corridas en las que las piezas defectuosas aparecen en gran número al comienzo de la secuencia pero que además, en total suman menos que r_c . De esta forma, el método TRPS rechaza H_0 (error tipo I) y el método Clásico la acepta.

“Fallas Clásico” es la cantidad de corridas en las que las piezas defectuosas aparecen en gran número al final de la secuencia pero que además, en total suman más que r_c . De esta forma, el método Clásico rechaza H_0 (error tipo I) y el TRPS la acepta.

Se puede ver que en la tabla 4.2.3, los valores “coincidencias rechazo” (50), “fallas Clásico” (13) y “Rechaza Clásico” (30) suman 93 que coincide con la cantidad de corridas en las que el test Clásico rechazó la hipótesis nula (Ver tabla 4.2.1).

La suma de “coincidencias aceptación” (1695), “fallas TRPS” (35) y “acepta Clásico” (178) suman 1908 que coincide con la cantidad de corridas en las que el test Clásico aceptó la hipótesis nula (Ver tabla 4.2.1).

Estas comparaciones muestran que el método TRPS genera un ahorro de aproximadamente 50% con respecto al método clásico a igualdad de precisión (α y β) pero pagando un precio de 10% de indecisiones.

Considerando el 10% de indecisiones (178 casos aceptados y 30 rechazados por el método clásico) se puede ver que $1-\alpha'$ para el TRPS cambia a:

$$\rightarrow 1-\alpha' = (1695 + 13 + 178)/2000 * 100\% = 94,3\%^4 \quad (4.2.a)$$

$$\rightarrow \alpha' = 5,7\%$$

Se puede apreciar que esta modificación no altera significativamente la tabla 4.2.1.

	Indecisión
Casos	208
Porcentaje	10,4%

Tabla 4.2.4 – Porcentaje de casos inconclusos del TRPS.

⁴ 1695 son los casos en que ambos métodos aceptan H_0 . 13 son los casos en los que sólo el método Clásico rechaza H_0 y por lo tanto TRPS acepta. 178 son los casos dentro de las 208 indecisiones del TRPS en que el método clásico acepta H_0 .

El histograma de cantidad de observaciones del TRPS fue realizado con los 2.000 valores de cada una de las 5 corridas.

Se puede apreciar que el 50% de los valores entran dentro del rango [120, 160] que es consistente con el valor esperado de observaciones del test (132 observaciones).

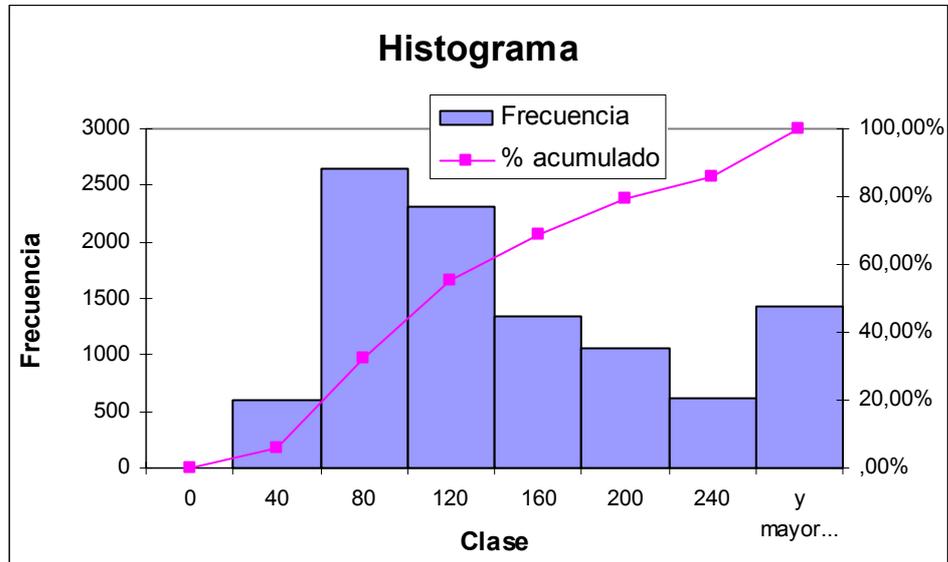


Figura 4.2.1 – Histograma de cantidad de observaciones con TRPS.

La curva operativa y el valor esperado de las observaciones del TRPS se muestran en las figuras 4.2.2 y 4.2.3:

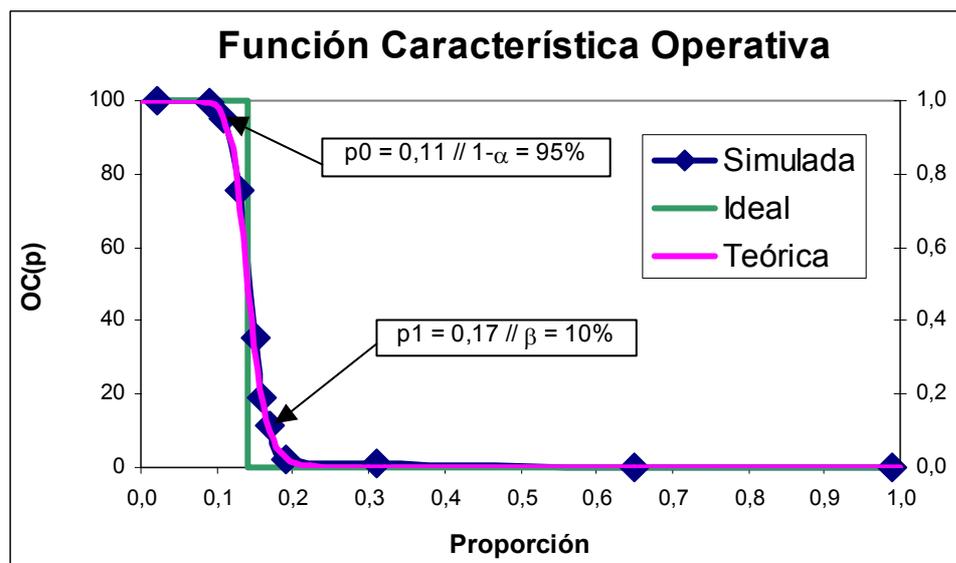


Figura 4.2.2 – Función de características operativas para diferentes proporciones.

La función Característica Operativa es igual que para el método clásico como era de esperarse ya que así fue definida al quedar determinadas las Variables Fundamentales (alfa, beta, p_0 y p_1).

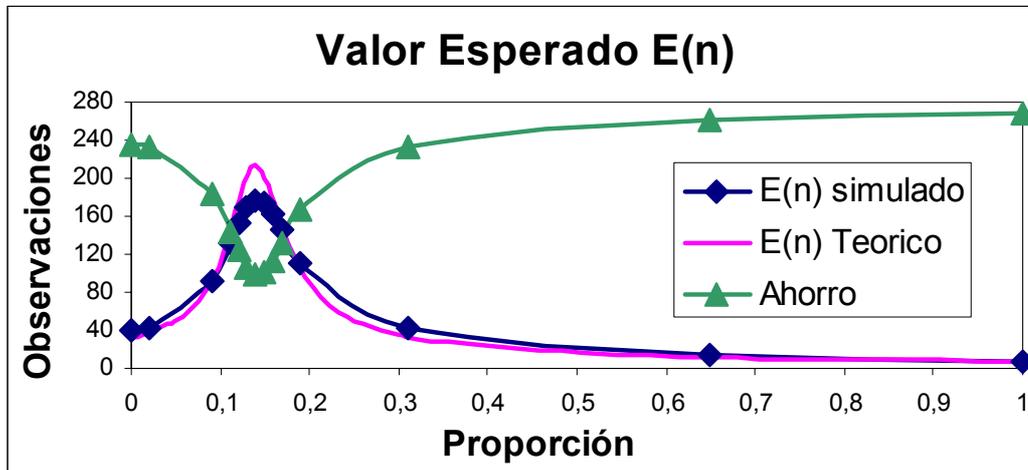


Figura 4.2.3 – Número promedio de muestras para el TRPS para diferentes proporciones.

Error rel.	23,9%	11,5%	3,1%	-6,1%	-17,5%	-2,1%	1,1%	22,6%	23,2%	20,4%
Error abs.	8	4	3	-9	-37	-3	1	8	3	1
p	0	0,02	0,09	0,11	0,14	0,17	0,19	0,31	0,65	1

Tabla 4.2.5 – Errores relativo y absoluto del valor esperado de la simulación contra el teórico.

Si bien los errores relativos de la tabla 4.2.5 en los extremos superan el 20%, se deben a la cantidad baja de observaciones (menores a 40) que requiere el test para finalizar cuando la proporción toma valores alejados de p_0 ó p_1 . El error mas llamativo por su magnitud es el que ocurre cuando la proporción es 14% (37 observaciones en 214) aunque debe resaltarse que este es el punto de mayor conflicto del test. Esto se visualiza en la figura 4.2.2 en donde se produce un cambio brusco (85%) en el error tipo II para un rango de proporciones pequeño (6%).

A pesar del “valle” que presenta la curva de ahorro en la figura 4.2.3, es importante tener en cuenta que siempre son valores positivos. Esto es, aún en la situación mas desfavorable como podría ser una proporción igual a 0,13, 0,14 ó 0,15, el TRPS brinda ahorros de más de 36%.

LPTD	0,09	0,11	0,13	0,14	0,15	0,17	0,19	0,3	0,65
Ahorro	183	144	107	99	101	131	167	233	262
porcentaje	66,4%	52,3%	38,6%	36,0%	36,7%	47,6%	60,3%	84,3%	95,0%

Tabla 4.2.6 – Ahorros y ahorros porcentuales del TRPS.

4.3. Análisis de Sensibilidad

El análisis de sensibilidad es realizado variando los valores de la proporción de defectuosos. Los parámetros de las hipótesis nula y alternativa se mantienen fijos a AQL y LPTD respectivamente. Al variar la proporción de la distribución de probabilidades con la que el programa genera los números aleatorios y no las hipótesis, se mide el impacto (en los errores tipo I y II, en los casos indefinidos y en el ahorro de observaciones) de haber planteado equivocadamente las hipótesis.

Sensibilidad del SPRT a p1 (LPTD)					
LPTD	0,09	0,11	0,14	0,17	0,19
Observaciones	93	132	177	145	109
Error alfa (%)	0,47	4,73	43,7		
Error beta (%)			56,3	9,38	2,4
Indefinidos	26,8	207,6	584,2	264,8	71,8
Indefinidos Prom/Max/Min			231 4,6%	584,2 11,7%	26,8 0,5%
Ahorro	183	144	99	131	167
Ahorro Prom/Max/Min			145 52,5%	183 66,4%	99 36,0%

Tabla 4.3.1 – Resultados del TRPS para diferentes valores de LPTD.

Se puede observar que, como se mencionó anteriormente, en los casos alejados de p_0 y p_1 (o sea, $p = 0,09$ y $p = 0,19$) el método requiere menos observaciones, comete menos errores y deja menos corridas sin definición y, en el caso en que p es igual a $p_c = 14\%$, las consecuencias son opuestas. Estas son consecuencias que se corresponden con la función de características operativas y el valor esperado de observaciones.

H0: $p \leq p_0 = 11\%$; H1: $p \geq p_1 = 17\%$					
LPTD	0,09	0,11	0,14	0,17	0,19
Alfa	0,47	4,73	43,73		
Beta			56,27	9,38	2,45

Tabla 4.3.2 – Errores tipo I y II para el TRPS bajo las hipótesis originales.

En la tabla 4.3.2 se muestran los errores que comete el TRPS. Para el caso en que p es 11%, alfa no es del 5% como se estableció a priori y lo mismo ocurre con beta (no es 10%) cuando p es 0,17; ambos errores son menores aunque muy similares.

La razón para que alfa sea menor que 5% en $p = p_0$ y beta menor que 10% cuando $p = p_1$ es por el avance discontinuo de la serie. Lo que esto significa es que al producirse avances discretos (las observaciones se realizan de a una por vez), la sumatoria de piezas defectuosas de un test – que es el valor con el que se toma una decisión – no coincide con el exacto valor de las líneas de decisión sino que termina fuera de los límites que éstas líneas generan.

El avance es en forma discreta ya que es el resultado de la sumatoria de unos (piezas o unidades defectuosas) y ceros (piezas o unidades buenas) únicamente.

Esto se ilustra en la figura 4.3.1 (aumentada).

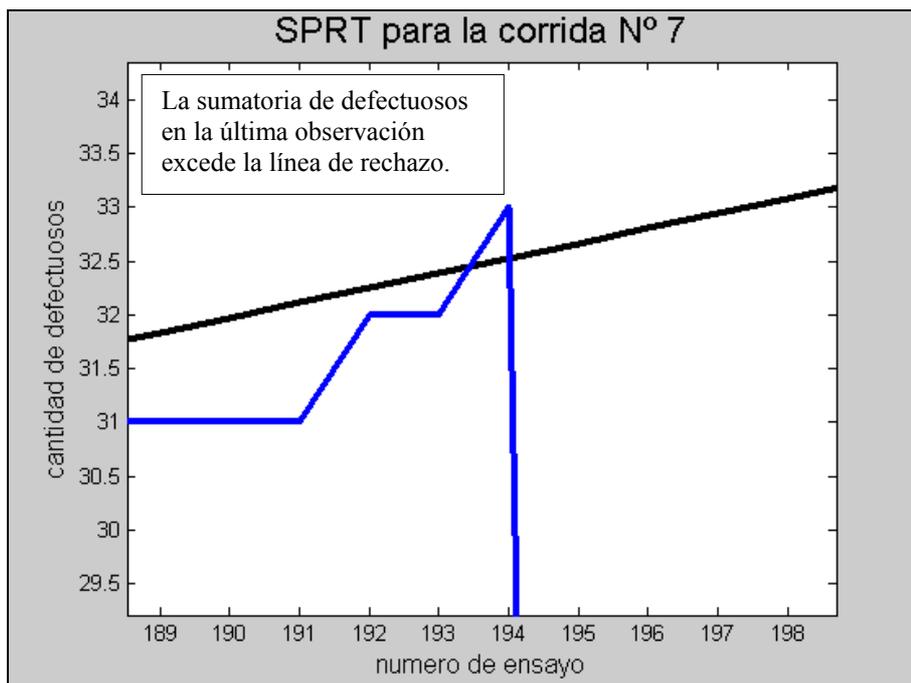


Figura 4.3.1 (aumentada) – Como afecta una serie discreta los valores alfa y beta reales.

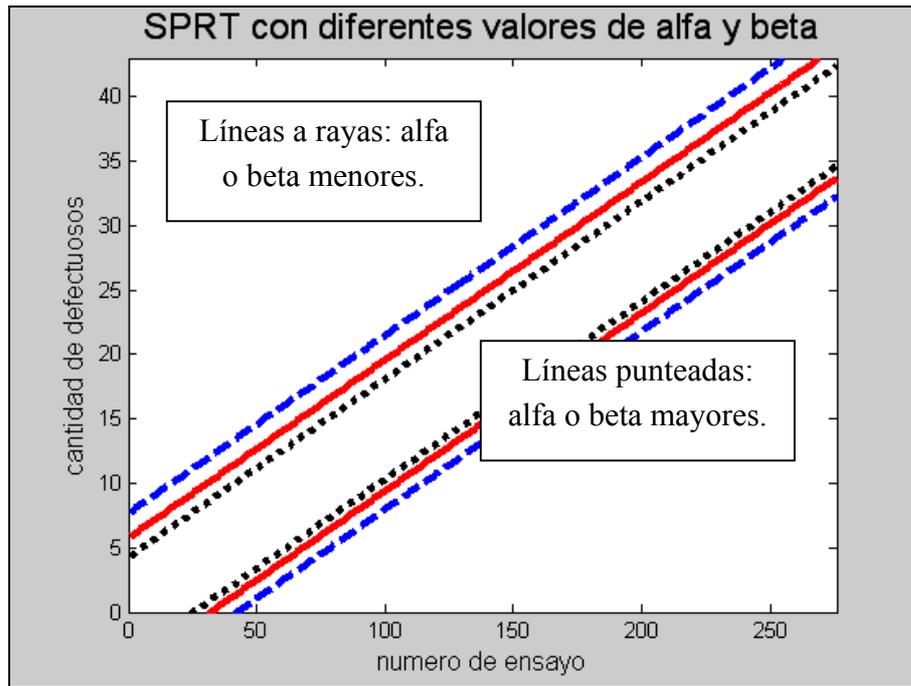


Figura 4.3.2 – Modificación de las líneas de decisión al modificar alfa y beta.

La figura 4.3.2 ejemplifica lo dicho anteriormente: el avance discreto de la secuencia (sumatoria de unos y ceros) de observaciones hace que el último valor de la sumatoria de defectuosas, no coincida *por exceso* (al rechazar) o *por defecto* (al aceptar) con el valor de la línea de decisión en ese mismo número de ensayo. De esta forma alfa y beta se ven alterados con respecto al valor de diseño del test.

Lo que muestra la figura 4.3.2 es que al finalizar el test, el último valor de la sumatoria de defectuosas se ubica fuera de los límites de decisión como si estuviera haciéndolo dentro de una “banda de decisión” más ancha o lo que es lo mismo, más precisa por ser alfa o beta más pequeños (líneas a rayas). Se agregan las líneas punteadas para mostrar el efecto que tendría permitir un error mayor aumentando alfa o beta.

De esta forma se explica cómo, al fijar alfa y beta a priori, el resultado del TRPS siempre producirá errores más pequeños aunque despreciables en magnitud, como se ve en la tabla 4.2.1. Se puede recalcular A y B para los nuevos valores de alfa y beta para que las líneas de decisión coincidan perfectamente con el último valor de la sumatoria de defectuosas pero este trabajo no se justifica ya que, como se dijo, las variaciones en magnitud en estas variables son despreciables⁵.

⁵ Para mas detalles acerca del cálculo exacto de A y B remitirse a [1].

4.4. Algunas consecuencias de modificar las Variables Fundamentales

En este capítulo se evalúa los resultados de modificar las variables fundamentales en las hipótesis planteadas para todos los posibles valores del parámetro desconocido p . De esta forma se puede apreciar el impacto en el número de observaciones que puede provocar exigirle al test bajos o elevados errores y el impacto (también en el número de observaciones) de desear mayor capacidad de discernimiento al acercarse o alejarse de las proporciones p_0 y p_1 .

Este análisis fue realizado en dos etapas: primero se modificaron α y β en $\pm 25\%$ de sus valores originales y luego se modificaron p_0 y p_1 en $\pm 15\%$ y se realizaron corridas para distintas proporciones.

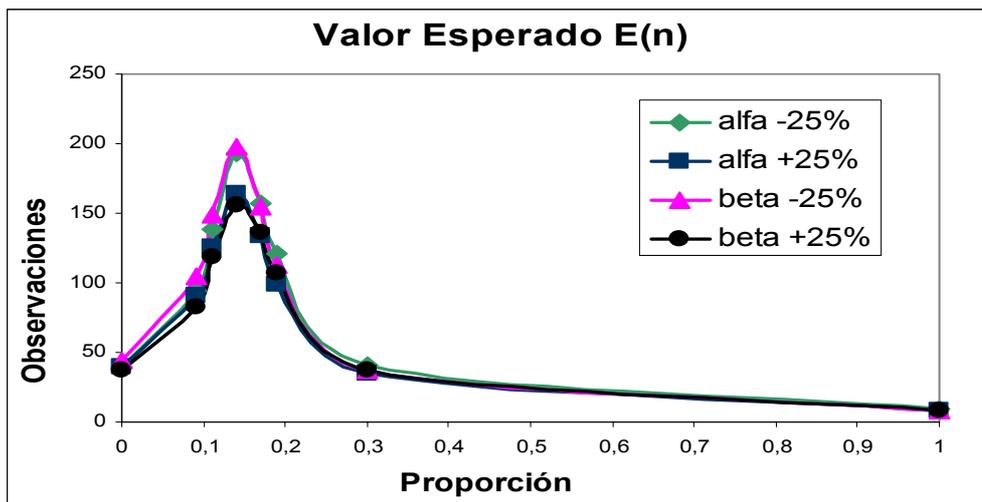


Figura 4.4.1 – Valor esperado de observaciones para diferentes alfa y beta.

	n clásico	Var %	n max	Ahorro	Ahorro %
alfa +25%	257	-7,0%	164	93	36,2%
beta +25%	249	-9,8%	156	93	37,4%
alfa -25%	300	8,5%	193	107	35,7%
beta -25%	309	12,1%	197	112	36,3%

Tabla 4.4.1 – Resultados de variar alfa y beta en ambos métodos.

“N max” ocurre en todos los casos para $p = 14\%$ como era de esperarse.

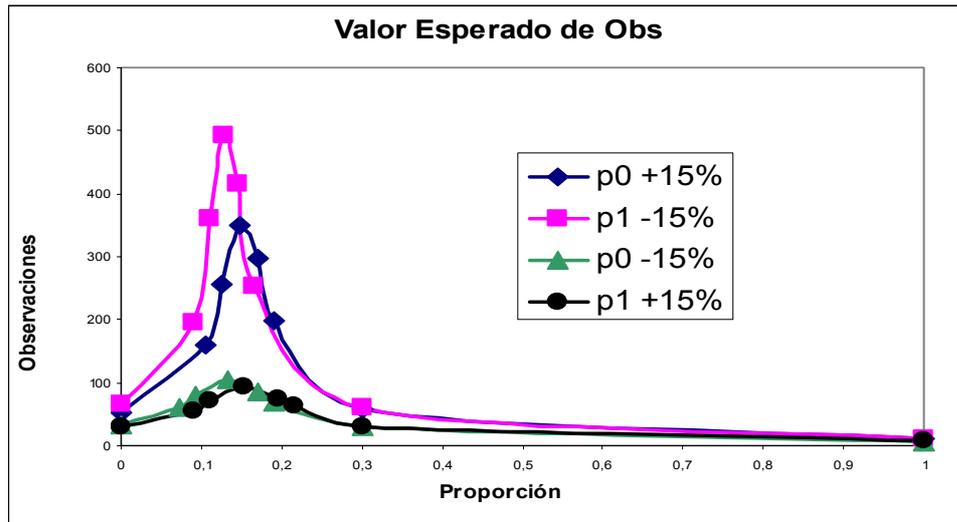


Figura 4.4.2 – Valor esperado de observaciones para diferentes p_0 y p_1 .

	n clásico	Var %	n max	Ahorro	Ahorro %
$p_0 +15\%$	559	102,4%	348	211	37,7%
$p_1 -15\%$	783	183,6%	493	290	37,0%
$p_0 -15\%$	158	-42,9%	104	53	33,8%
$p_1 +15\%$	143	-48,1%	94	49	34,3%

Tabla 4.4.2 – Resultados de variar p_0 y p_1 en ambos métodos.

Para poder comparar los resultados de las tablas 4.4.1, 4.4.2 y las figuras 4.4.1 y 4.4.2 se recalcula el número de observaciones del test Clásico ya que, al alterar las variables fundamentales, éste también sufre alteraciones en cantidad de ensayos necesarios y en la condición de rechazo.

Los desvíos estándares del máximo número de observaciones n_{max} se calculan a partir de los distintos resultados del análisis.

Desvio n max (p_0-p_1)	Desvio n max ($\alpha-\beta$)
194,7	20,5

Tabla 4.4.3 – Desvíos estándares de la variable “n max”.

Si bien todos los ahorros son del orden de 35% porque se extrajeron los valores para $p = 0,14$ (el valor menos favorable para el test) se puede afirmar que el TRPS es muy sensible

a las variaciones de p_0 y p_1 porque variaciones de $\pm 15\%$ produjeron los mismos ahorros que variaciones de $\pm 25\%$ en alfa y beta.

El aumento de observaciones es mayor en “ $p_1 -15\%$ ” que en “ $p_0 +15\%$ ” porque, si bien ambos casos provocan una reducción del intervalo entre las variables, el 15% de la proporción mayor (en este caso es p_1) es un valor más grande.

	p0	p1	Intervalo
p0 +15%	12,65%	17,00%	0,0435
p1 -15%	11,00%	14,45%	0,0345
p0 -15%	9,35%	17,00%	0,0765
p1 +15%	11,00%	19,55%	0,0855

Figura 4.4.3 – Magnitud de los intervalos $[p_0 - p_1]$ al modificar dichos valores.

Los cuadros resaltados en la figura 4.4.3 muestran que p_1 provoca las mayores variaciones del intervalo $[p_0 - p_1]$.

Al reducir el intervalo, ya sea por aumentar p_0 o disminuir p_1 , la diferencia en el número de observaciones necesarias es de $n_{max} = 145$ (entre “ $p_1 -15\%$ ” y “ $p_0 +15\%$ ” de la tabla 4.4.2 primera y segunda fila). Al reducir el intervalo, ya sea por disminuir p_0 o aumentar p_1 , la diferencia en el valor esperado es de $n_{max} = 10$ observaciones (tabla 4.4.2 tercera y cuarta fila).

5. MECANISMO DE TRUNCAMIENTO PARA EL TRPS

Un mecanismo de truncamiento permite establecer un valor límite o valor de truncamiento (N_{tr} de aquí en adelante) para que el test secuencial concluya aunque el resultado de las observaciones no hayan cruzado ninguna de las líneas de decisión.

El mecanismo de truncamiento para un test secuencial fue descrito por Wald [1], sólo que no estableció cómo determinar el valor de truncamiento ni tampoco desarrolló la forma de calcular los errores alfa y beta resultantes al “truncar” el método.

Lo que sí determinó Wald fue el funcionamiento del procedimiento para truncar un test: cada vez que el valor de truncamiento N_{tr} es alcanzado sin una decisión tomada se sigue la siguiente regla de decisión:

$$\rightarrow \text{Si RPS} \leq \frac{a_{N-tr} + r_{N-tr}}{2}, \text{ se acepta } H_0.$$

$$\rightarrow \text{Si RPS} \geq \frac{a_{N-tr} + r_{N-tr}}{2}, \text{ se rechaza } H_0.$$

siendo a_{N-tr} el valor de la recta de aceptación en la observación N_{tr} y r_{N-tr} el valor de la recta rechazo en la observación N_{tr}

Vale destacar que esta regla de decisión se puede aplicar a cualquier función de distribuciones sea discreta como el modelo Binomial o continua como el modelo Weibull.

Los estudios analizados en este trabajo con los mecanismos de truncamiento, son realizados fijando el parámetro de la distribución Binomial en $p = 11\%$ para saber que cada vez que se rechace la hipótesis nula se habrá cometido un error de tipo I.

5.1. Mecanismo de truncamiento propuesto por Daniel De Souza⁶

El mecanismo propuesto por Daniel De Souza con el modelo de Weibull de tres parámetros como distribución subyacente [4] consiste en fijar como valor de truncamiento el valor esperado teórico del test (se recuerda que es 140 observaciones).

Vale decir que el test tiene abierta la posibilidad de terminar antes de alcanzar este valor. Este valor es el Valor Límite o de truncamiento (N_{tr}) y se lo fija en 140 observaciones para el caso planteado en este trabajo ($H_0: p \leq p_0$; $H_1: p \geq p_1$. $\alpha = 5\%$, $\beta = 10\%$, $p_0 = 11\%$ y $p_1 = 17\%$) a pesar de que De Souza no menciona que el criterio sea trasladable a otra distribución.

La figura 5.1.1 ejemplifica el funcionamiento de este mecanismo.

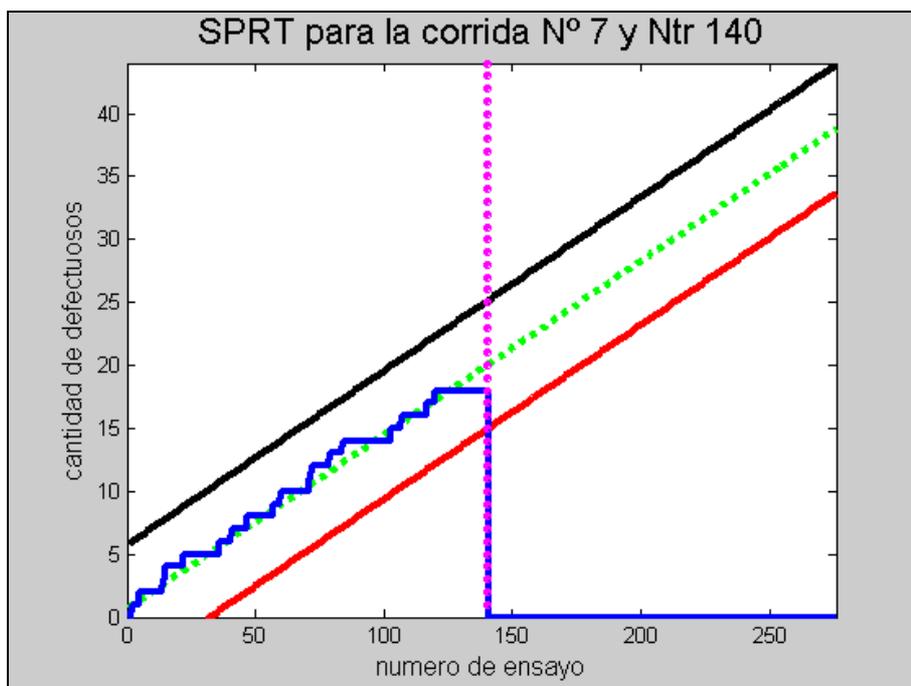


Figura 5.1.1 – TRPS con truncamiento en el valor 140 donde se acepta H_0 .

En este ejemplo se puede apreciar cómo el TRPS acepta la hipótesis nula H_0 al llegar al valor $N_{tr} = 140$. La línea punteada vertical señala la ubicación del valor N_{tr} en la figura y la línea punteada paralela a y entre las líneas de decisión, muestra la línea de valor medio, que es la línea de referencia para decidir al momento de terminar la secuencia. Si el último

⁶ Prof. Daniel I. De Souza Jr., Ph.D.: UFF-TEC y UENF- Ingeniería de producción. Universidad de Florida, Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas.

valor del test queda entre la línea de decisión inferior y la línea media, el test aceptará H_0 . Rechazará H_0 en el caso contrario.

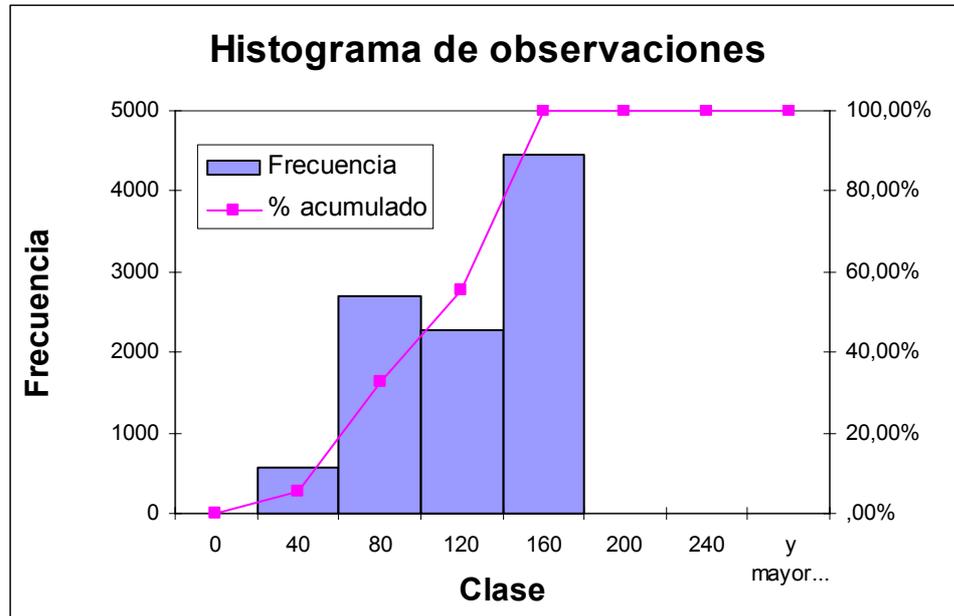


Figura 5.1.2 – Histograma de observaciones aplicado el mecanismo de De Souza.

Al comparar la figura 5.1.2 con la figura 4.2.1 se puede ver la consecuencia del truncamiento: el test no supera la observación 140 y consecuentemente disminuye el valor esperado de observaciones a 103 observaciones.

Resultados de De Souza				alfa modificada
Ntr	n	alfa (%)	cant trunc (%)	
40	40	14,2	99,7	16,2
50	49	17,8	89,1	15,6
70	66	14,0	73,6	14,4
80	73	16,2	67,9	13,9
85	76	14,0	62,8	13,6
90	79	10,9	62,3	13,3
100	85	12,7	54,6	12,8
120	95	10,8	46,9	11,8
130	99	12,0	41,1	11,4
135	101	10,4	37,8	11,1
140	103	12,8	37,8	10,9
150	107	9,7	33,7	10,5
210	123	8,1	19,2	8,3
240	127	7,96	14,2	7,5
276	132	6,50	10,2	6,7
276	132	4,7	10,4%	

Tabla 5.1.1 – Observaciones, errores y porcentaje de truncamientos para diferentes Ntr y los valores alfa modificados con el método de mínimos cuadrados.

Para crear la tabla 5.1.1 se realizaron 5 grupos de corridas de 2000 valores cada una variando Ntr de 40 a 276 y midiendo el valor esperado de observaciones (n), el error tipo I (α) y el porcentaje de corridas en las que el test truncó (cant. truncamientos).

Los valores de Ntr mayores que 140 se muestran únicamente con el fin de resaltar que a medida que el valor límite o de truncamiento se hace mayor, el error disminuye. A pesar de ello, las dos últimas filas de la tabla 5.1.1 reflejan que el error tipo I habiendo truncado el test es mayor que si se decide con el criterio del método clásico.

En la tabla 5.1.1 se observa una naturaleza muy oscilatoria pero con tendencia negativa (decrece a medida que n aumenta) de la variable α .

Para poder analizar estos datos se codificó en Matlab 6.5 un programa que obtiene los valores de Ntr y α de la primera y tercera columna de la tabla 5.1.1 y luego calcula el polinomio de grado 2 con el método de mínimos cuadrados. Los valores de esta regresión se ven en la parte derecha de la tabla 5.1.1.

Los resultados de la regresión (la ecuación de la curva, coeficiente de determinación y varianza) se muestran en el Anexo II.

El trabajo se desarrolla a partir de los valores modificados de α que aparecen en la tabla 5.1.1 en la columna de la derecha.

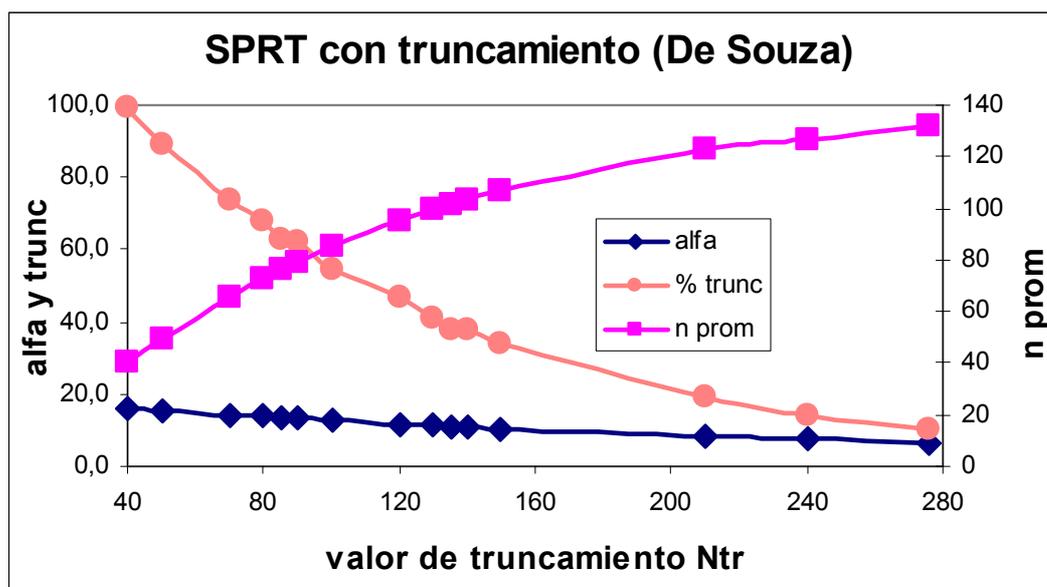


Figura 5.1.3 – Los valores de la tabla 5.1.1 (según los valores modificados de α).

Variación entre extremos		
n	alfa	cant trunc
229,5%	-58,7%	-89,7%

Tabla 5.1.2 – Variaciones entre extremos de las observaciones, alfa modificada y porcentaje de truncamientos con el mecanismo de De Souza.

Crece el número de observaciones a medida que decrece el error, lo que parece plantear una situación de compromiso al momento de decidir el criterio de truncamiento. Esto se analizará en el capítulo 6.

5.2. Propuesta de mecanismo de truncamiento

La idea principal de este mecanismo alternativo consiste en aprovechar la información de una mayor cantidad de observaciones al momento de truncar la serie. Dicho de otro modo, ¿Por qué esperar hasta la observación de truncamiento (N_{tr}) si se aprecia que el valor de la sumatoria de defectuosas se acerca a una de las líneas de decisión antes de ese valor?

El procedimiento de truncamiento desarrollado por Wald se puede entender de varias maneras, una de ellas es pensar que el valor que determina la decisión es el resultado de una secuencia de valores que “llevan” a la sumatoria de defectuosas a estar por encima o por debajo de la línea media. **Justamente, la propuesta de este trabajo es utilizar la información que genera la secuencia para truncar anticipadamente el test cuando ésta presenta tendencias hacia una u otra línea de decisión antes de llegar a N_{tr} .**

Este mecanismo es una extensión del procedimiento anterior (De Souza), ya que como se ve en la figura 5.2.1, el valor de truncamiento sigue siendo el mismo ($N_{tr} = 140$). **La diferencia está en que las líneas de decisión se van “cerrando” desde un valor crítico inicial (N_{co} de aquí en adelante) hasta el valor crítico de truncamiento (N_{tr}).**

El valor N_{co} fue fijado en 40 observaciones ya que a partir de ese valor el TRPS puede aceptar y rechazar H_0 (antes de la muestra N° 40 la línea de aceptación es menor que cero y por lo tanto no se puede aceptar la hipótesis nula, sólo se la puede rechazar). N_{tr} fue fijado en 140 observaciones que es el valor esperado teórico del test.

La característica principal de este mecanismo radica en que para acelerar el truncamiento se le exige al test terminar fuera de los límites impuestos por *líneas de decisión modificadas*. Estas *líneas de decisión modificadas* se acercan entre sí a medida que las observaciones se acercan a N_{tr} .

Como se ve en la figura 5.2.1, la serie necesita estar más cerca de las líneas de decisión para pocas observaciones y a medida que avanza el test, las líneas modificadas de decisión van separándose de las líneas originales del TRPS exigiéndole así, menor precisión (mayor error) porque cuenta con la información de una mayor cantidad de observaciones previamente obtenidas.

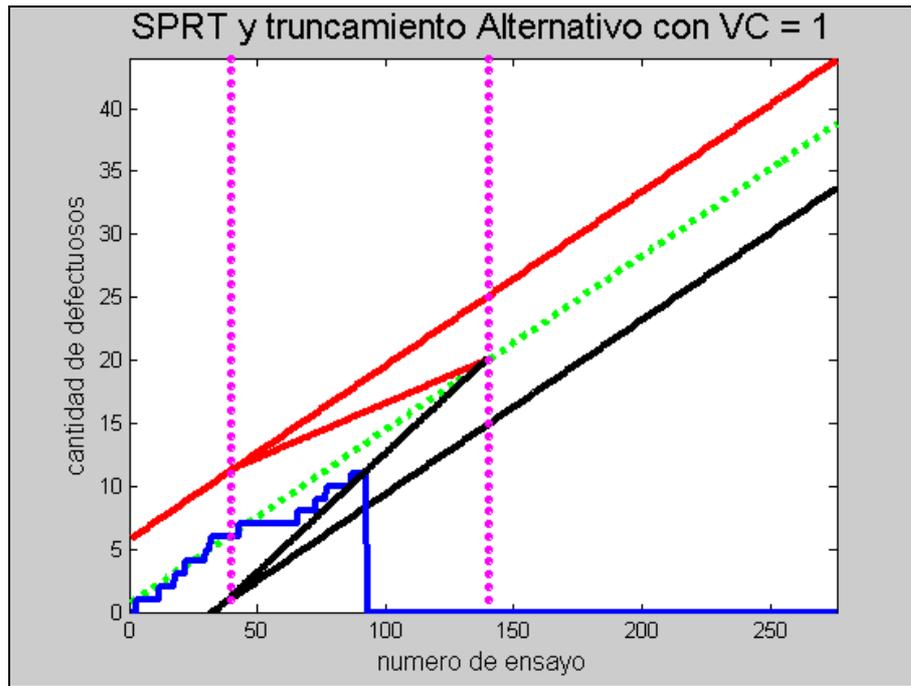


Figura 5.2.1 – Truncamiento Alternativo con valor crítico igual a 1.

Las líneas que unen la intersección de las líneas de decisión y la línea de N_{co} con la intersección de la línea media y la línea de N_{tr} , son las nuevas líneas de decisión o “líneas modificadas”.

Este mecanismo presenta “zonas” de decisión en contraste con las “líneas” de decisión del test sin truncamiento. El funcionamiento es como se describe a continuación:

- ➔ Se determinan los valores críticos inicial y final (N_{co} es igual a 40 porque es a partir de observación en la cual ambas decisiones pueden ser tomadas y N_{tr} igual a 140 porque es el valor propuesto por De Souza).
- ➔ Se elige una forma de variación (en este trabajo se utiliza una variación lineal - aunque no es la única forma posible – por ser mas simple de programar).
- ➔ Se elige la cantidad de observaciones (valor crítico) en las que la sumatoria de defectuosas debe quedar “encerrada” en la zona de decisión para el que test concluya (este valor puede tomar valores entre 1 y $N_{tr}-N_{co}$).

La figura 5.2.1 muestra cómo la serie (con valor crítico igual a 1) termina al pasar la línea de decisión modificada al igual que lo haría en el test sin truncamiento con las líneas de decisión sin modificar.

La figura 5.2.2 muestra cómo la serie con valor crítico igual a 15 debe “permanecer” en la *zona de decisión* durante 15 observaciones consecutivas (desde $n = 80$ hasta $n = 95$) para terminar (la imagen está aumentada para apreciar mejor esta situación).

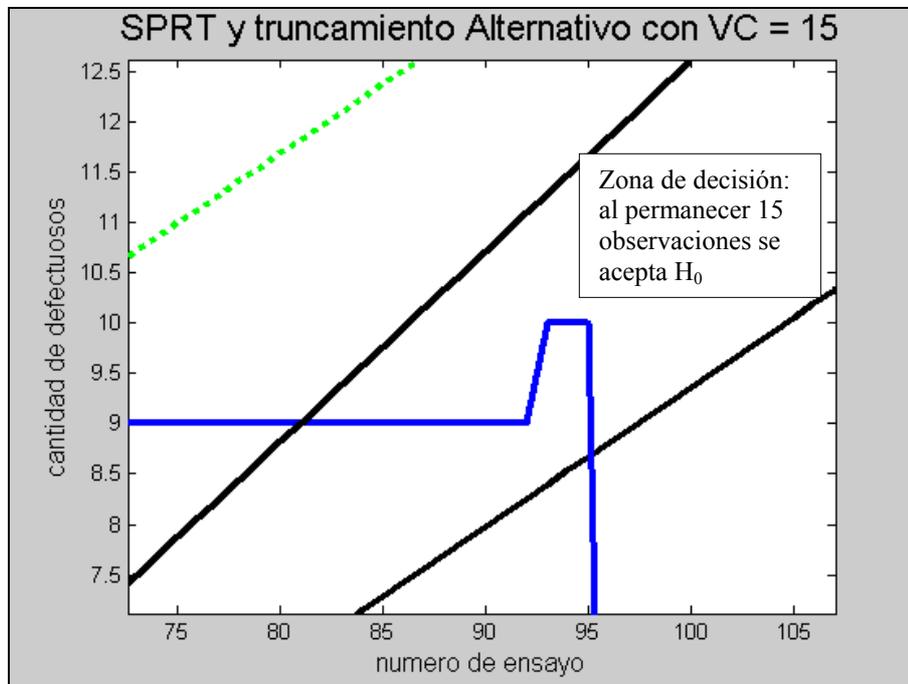


Figura 5.2.2 (aumentada) – Truncamiento Alternativo con valor crítico igual a 15.

Hacer que el valor crítico sea mayor que 1 le da al test la oportunidad de entrar y salir de una *zona de decisión*. De esta forma queda abierta la posibilidad de que el test “corrija el rumbo”.

Esto se ve en la figura 5.2.3.

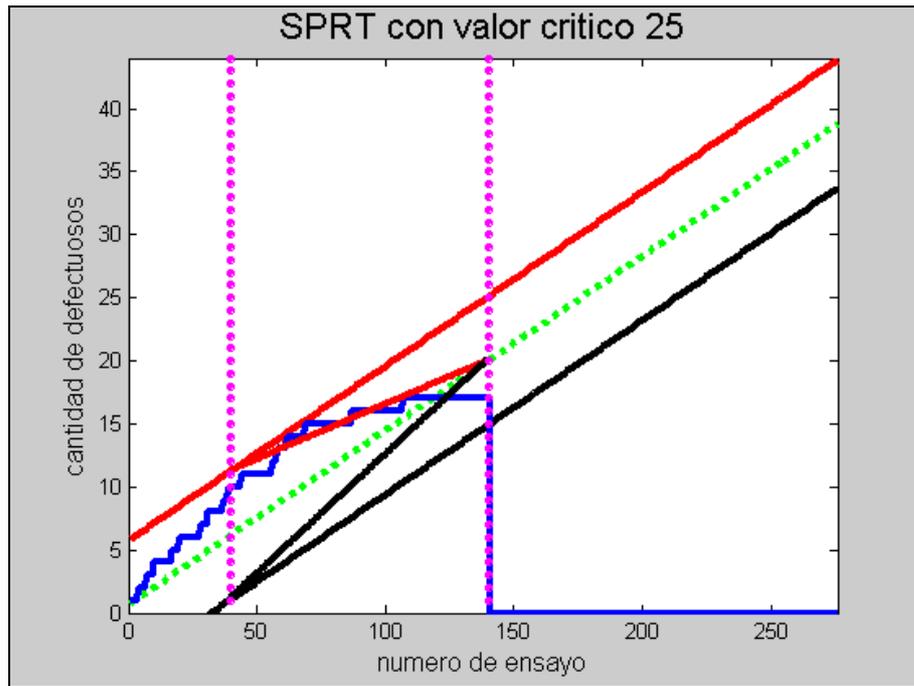


Figura 5.2.3 – Valor crítico mayor que 1 (VC = 25). La serie corrige la decisión.

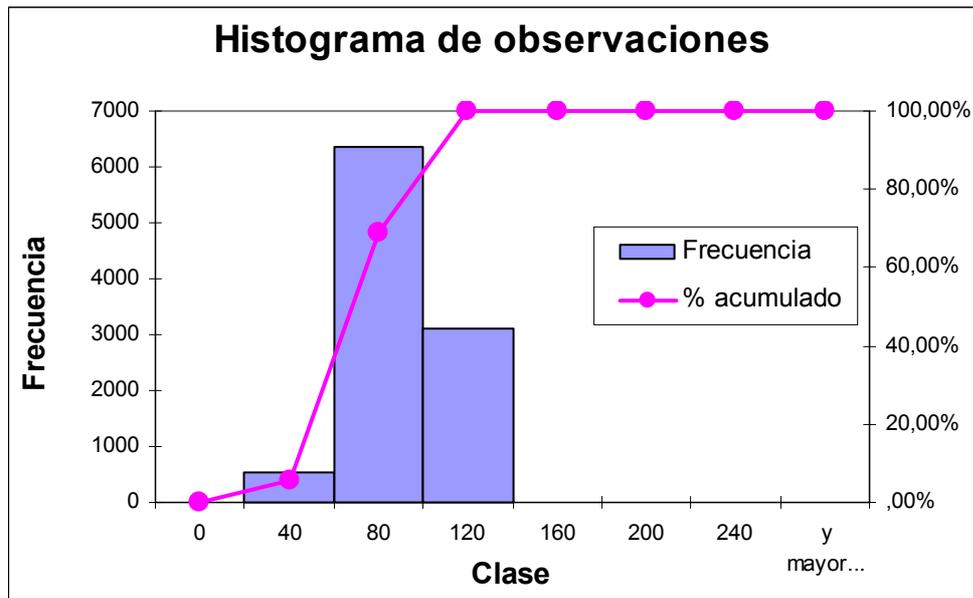


Figura 5.2.4 – Histograma de observaciones aplicado el mecanismo Alternativo con valor crítico igual a 1.

Este mecanismo presenta un valor esperado de observaciones igual a 73 y un error de tipo I igual a 10,5%.

Resultados del mecanismo alternativo				
Nco - Ntr	valor crítico	n	alfa (%)	cant trunc (%)
40 - 140	1	73	10,5	99,8
40 - 140	5	81	10,9	88,6
40 - 140	15	91	11,6	65,8
40 - 140	30	99	12,4	48,0
40 - 140	45	102	12,4	39,9
40 - 140	60	102	13,1	38,4

Tabla 5.2.1 – Resultados luego de variar el Valor Crítico para el mecanismo Alternativo.

La primera fila de la tabla 5.2.1 y la figura 5.2.4 muestran los mismos resultados.

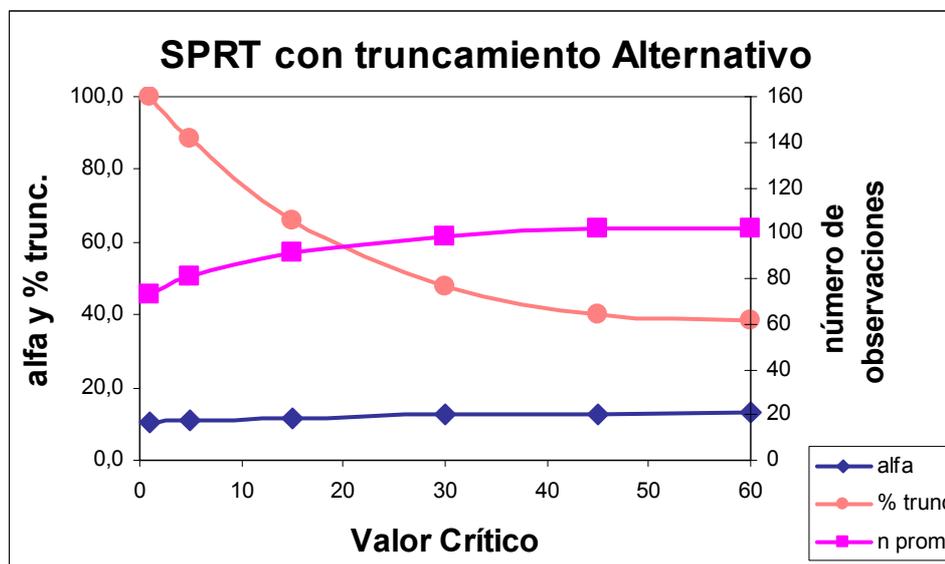


Figura 5.2.5 – Valores de la tabla 5.2.1.

A diferencia de la figura 5.1.2, tanto α como n disminuyen al disminuir el valor crítico.

Variación entre extremos		
n	alfa	cant trunc
40,4%	25,0%	-61,6%

Tabla 5.2.2 – Variaciones entre extremos de las observaciones, alfa y porcentaje de truncamientos con el mecanismo Alternativo.

El valor esperado de observaciones presenta un incremento del 40% al variar el valor crítico de 1 a 60 y alfa presenta un incremento del 25%. A diferencia del mecanismo anteriormente analizado, éste no presenta situación de compromiso entre error, cantidad de

corridas “truncadas” y observaciones, ya que estas variables empeoran al incrementar el valor crítico.

Otra diferencia con el mecanismo de De Souza es que las variaciones para el mecanismo alternativo son de menor magnitud. Se analizará esto con más detalle en la sección siguiente.

El criterio óptimo a seguir para el mecanismo Alternativo queda definido como aquel que resulta de hacer el valor crítico igual a 1 (por ahorro en observaciones y por menor error).

De Souza	n	alfa	% trunc
	27,1	2,8	26,3
Desvíos STD's			
Alternativo	n	alfa	% trunc
	12,1	1,0	26,0

Tabla 5.2.3 – Desvíos estándares (según los valores de las tablas 5.1.1 y 5.2.1).

El mecanismo de De Souza tiene una dispersión mayor que el mecanismo Alternativo en observaciones y error tipo I.

Los desvíos son mayores para el mecanismo de De Souza:

- ➔ 124% en observaciones (n).
- ➔ 180% en error tipo I (alfa).

6. COMPARACIÓN ENTRE MECANISMOS DE TRUNCAMIENTO

Para comparar los mecanismos estudiados es necesario que los *porcentajes de truncamiento* sean iguales de modo de valorar cada método ponderando el error de tipo I y la cantidad de observaciones. La razón por la cuál el porcentaje de truncamientos debe ser el mismo en ambos mecanismos es porque esta variable sirve para establecer una medida de cuán “forzados” están siendo los resultados del test.

Es importante establecer que los valores de la tabla 5.1.1 que se utilizan son los que van de $n = 40$ hasta $n = 140$ para que la comparación sea útil, ya que el mecanismo alternativo tiene como límites esos valores.

La tabla 6.1 toma los valores de Ntr (de la tabla 5.1.1) y los Valores Críticos (de la tabla 5.2.1) cuyo porcentaje de truncamiento es igual.

	Ntr	n° obs.	alfa	% trunc
De Souza	40	40	16,2	99,8
	130	99	11,4	41,1
	N crit	n° obs.	alfa	% trunc
Alternativo	1	73	10,5	99,8
	45	102	12,4	39,9

Tabla 6.1 – Comparación de mecanismos con iguales porcentajes de corridas “truncadas”.

Las celdas resaltadas muestran los valores que son mejores (se considera mejor requerir menos observaciones y presentar un menor error) que el otro mecanismo. Se puede ver que el método alternativo tiene menor error tipo I cuando las observaciones son 73 y mayor error tipo I cuando son 102. En ambos casos el mecanismo propuesto por De Souza requiere menos observaciones.

- El ahorro de observaciones con $Ntr = 40$ es de 45% y el aumento del error es de 54% con respecto al mecanismo Alternativo.
- El ahorro de observaciones con $Ntr = 130$ es de 3% y la reducción del error es de 8% con respecto al mecanismo Alternativo.

6.1 La función “Costo” como herramienta de análisis⁷

La función denominada Costo es el resultado de ponderar las 2 variables principales de los mecanismos de truncamiento: el número de observaciones y el error tipo I. Su definición es la siguiente:

- **Costo = $C_n * n + Calfa * \alpha$.**
- **C_n es el costo por observación.**
- **Calfa es el costo por unidad porcentual de error tipo I.**
- **$[C_n] = \$/n$.**
- **$[Calfa] = \$/\%$.**

De esta manera se puede analizar la influencia de ambas variables en el costo total del experimento. La función Costo sirve también para poder comparar los mecanismos de truncamiento aunque los pares $[\alpha, n]$ no tengan el mismo porcentaje de truncamientos.

Para comparar ambos mecanismos es necesario establecer diferentes coeficientes para evaluar los resultados. Se adoptaron arbitrariamente las siguientes variaciones:

- $C_n = [1 \ 10 \ 20 \ 30 \ 40 \ 50]$
- $Calfa = [1 \ 25 \ 50 \ 75 \ 100 \ 125]$

La razón de la elección de estos valores es que para el mecanismo de De Souza, $(C_n * n)$ es igual a $(Calfa * \alpha)$ y ambos valen aproximadamente \$ 2000.

A continuación las tablas 6.1.1 y 6.1.2 extienden este análisis.

Costo [\$] para De Souza con valor límite = 40						
Cn Calfa	1	10	20	30	40	50
1	56	416	816	1215	1615	2015
25	444	804	1204	1604	2003	2403
50	849	1209	1608	2008	2408	2807
75	1253	1613	2013	2412	2812	3212
100	1658	2017	2417	2817	3217	3616
125	2062	2422	2822	3221	3621	4021

Tabla 6.1.1 - Costo en función de α y n para el mecanismo De Souza ($N_{tr} = 40$).

⁷ La función Costo se desarrolla en este trabajo con el propósito de poder comparar los diferentes métodos analizados.

Se puede ver en la tabla 6.1.1 que las diagonales (crecientes hacia la derecha) tienen costos de igual magnitud. Esto es consecuencia de la elección arbitraria del rango de variación de C_n y C_{alfa} , pero es útil para comparar con la misma tabla para el mecanismo Alternativo con valor crítico igual a 1.

Costo [\$] para mecanismo alternativo con valor crítico = 1						
C_n \ C_{alfa}	1	10	20	30	40	50
1	83	740	1469	2199	2928	3658
25	335	992	1721	2451	3180	3910
50	598	1254	1984	2713	3443	4172
75	860	1517	2246	2976	3705	4435
100	1123	1779	2509	3238	3968	4697
125	1385	2042	2771	3501	4230	4960

Tabla 6.1.2 - Costo en función de α y n para el mecanismo Alternativo ($VC = 1$).

Resultados:

- Se destaca que los valores mínimo y máximo son menores para el mecanismo de De Souza.
- Al moverse por la misma fila ($\alpha = 25, 50, 75, 100$ y 125) en ambas tablas la magnitud de la función Costo pasa de ser menor a ser mayor para el mecanismo Alternativo. Esto sugiere que cuando C_{alfa} es más importante que C_n conviene el mecanismo Alternativo. A medida que crece la importancia de C_n se hace menos costoso utilizar el mecanismo de De Souza.
- Al moverse por la misma columna ($n = 1, 10$ y 20) en ambas tablas la magnitud de la función Costo pasa de ser menor a ser mayor para el mecanismo de De Souza. La conclusión es la misma que en el punto anterior.

6.2. Criterios óptimos para cada mecanismo de truncamiento

La tabla 6.2.1 se realizó para los distintos coeficientes C_n y C_{alfa} y todos los valores de truncamiento de la tabla 5.1.1. Como no se puede mostrar la función Costo para cada C_n , C_{alfa} y N_{tr} en una tabla, sólo se muestra el Costo mínimo para cada $alfa$ y n sin especificar a que N_{tr} corresponde.

Afortunadamente, los costos mínimos ocurren solamente para $N_{tr} = 40$ y $N_{tr} = 140$ que por ser sólo dos si se muestran en una única tabla.

Criterio óptimo para De Souza						
C_n C_{alfa}	1	4	6	8	10	20
1	56	176	256	336	Zona en que conviene $N_{tr}=40$	
25	376	564	644	724		
50	649	960	1049	1129	1209	1608
75	922	1232	1439	1533	1613	2013
100	Zona en que conviene $N_{tr}=140$		1712	1919	2017	2417
125			1985	2192	2399	2822

Tabla 6.2.1 – Costos mínimos para el mecanismo De Souza.

La tabla 6.2.1 muestra que el criterio óptimo para seleccionar el valor límite para el mecanismo de truncamiento de De Souza depende de los coeficientes C_n y C_{alfa} ya que al predominar uno de ellos por sobre el otro, hace variar la decisión de que valor de truncamiento (N_{tr}) conviene usar. La zona inferior-izquierda indica que conviene fijar $N_{tr} = 140$ y la zona superior-derecha indica que conviene fijar $N_{tr} = 40$.

Dicho de otro modo: en casos en donde el costo por unidad porcentual ($[C_{alfa}] = \$/\%$) es más importante que el costo de las observaciones, conviene fijar N_{tr} en 140.

El mismo análisis se realiza para el mecanismo Alternativo:

Criterio óptimo para Alternativo						
C_n C_{alfa}	1	10	20	30	40	50
1	83	740	1469	2199	2928	3658
25	335	992	1721	2451	3180	3910
50	598	1254	1984	Zona en que conviene $VC=1$: TODA la tabla		4172
75	860	1517	2246			4435
100	1123	1779	2509			4697
125	1385	2042	2771	3501	4230	4960

Tabla 6.2.2 – Costos para el mecanismo Alternativo.

El mecanismo alternativo tiene un comportamiento distinto del de De Souza: siempre conviene que el valor crítico sea igual a uno. Esto se aprecia en la tabla 6.2.2.

Es para destacar que el mecanismo alternativo responde con el mismo criterio independientemente de que α sea la variable más importante o lo sea n . Por el contrario, el mecanismo De Souza puede llevar a cometer un gran error si se menosprecia el impacto del error α en el test haciendo que se utilice un Ntr bajo (40 en el ejemplo) cuando en realidad se debería haber optado por un Ntr alto (140) y viceversa.

La tabla 6.2.3 refleja lo expuesto en forma ordenada. La zona superior derecha muestra los valores de la función Costo cuando esta es mayor en el mecanismo Alternativo. La zona media muestra los valores de la función Costo cuando esta es mayor para el mecanismo de De Souza con valor límite (Ntr) igual a 40. Finalmente, la zona inferior izquierda muestra los valores de la función Costo cuando esta es mayor para el mecanismo de De Souza con valor límite (Ntr) igual a 140.

Comparación de Costos							
Cn Calfa	1	4	6	8	10	20	30
1	83	302	521	594	740	1469	2199
25	376	564	773	846	992	1721	2451
50	649	960	1049	1129	1254	1984	2713
75	922	1232	1439	1533	1613	2246	2976
100	1195	1505	1712	1919	2017	2509	3238
125	1468	1778	1985	2192	2399	2771	3501

Tabla 6.2.3 – Comparación de costos máximos entre mecanismos.

Comparación de Costos							
Cn Calfa	1	4	6	8	10	20	30
1	56	176	256	336		De Souza Ntr = 40	
25	335	554	644	724	804	De Souza Ntr = 40	
50	598	817	963	1109	1209	1608	
75	860	1079	1225	1371	1517	2013	
100	Alternativo VC = 1		1488	1634	1779	2417	2817
125	Alternativo VC = 1		1750	1896	2042	2771	3221

Tabla 6.2.4 – Comparación de costos mínimos entre mecanismos con Ntr y VC óptimas.

El análisis de las tablas anteriores sugiere lo siguiente:

- Si se está en una situación en donde el costo de cada observación es el factor de mayor importancia, el mecanismo de De Souza con valor límite Ntr = 40 es la mejor alternativa porque la función Costo es menor.

→ Cuando el factor de mayor importancia es el error tipo I, conviene el usar el mecanismo Alternativo con el valor crítico $VC = 1$ porque la función Costo es menor.

El valor económico de las observaciones (C_n) es simple de obtener. Es fundamental no escatimar esfuerzos en la asignación de un valor económico para el error (Calfa) ya que, de no ser así, no se puede aprovechar la función Costo.

6.3. Criterio para la selección del método óptimo

La razón por la cual se idearon los mecanismos de truncamiento es reducir la cantidad de ensayos a realizar una prueba de hipótesis. Lamentablemente, el mecanismo propuesto por De Souza no brinda un único criterio para el truncamiento lo que si se obtuvo para el mecanismo propuesto por el autor, aunque sin presentar beneficios en todo el campo de aplicación del test.

Hasta aquí, no se compararon los mencionados mecanismos con el test TRPS sin truncamiento. La función Costo permite este análisis ya que pondera sólo n y α de modo que se puede buscar para cada par de estas variables que método es el ideal sin considerar el porcentaje de truncamientos como se explicó anteriormente.

La tabla 6.3.1 que muestra los resultados del TRPS sin truncamiento.

Función de costos para TRPS			
Valor Crítico	Cn	Calfa	Costo
276	132	5	137
	50	1	
276	6600	5	6605
	1	125	
276	132	625	757
	50	125	
276	6600	625	7225

Tabla 6.3.1 – Costos del TRPS en función de n y α .

No sorprende que en el caso extremo: $Calfa = 125$, $Cn = 1$; la función Costo tenga el valor más bajo de los 3 análisis realizados y en el caso extremo opuesto: $Cn = 50$, $Calfa = 1$; la función Costo tenga el valor más elevado.

La tabla 6.3.2 muestra el resultado de comparar, con la función Costo, los tres métodos analizados en este trabajo. La tabla fue fragmentada para visualizar mejor las zonas en que cada método resulta ser el menos costoso.

Comparación De Souza, Alternativo y TRPS					
Cn \ Calfa	1	4	6	8	10
1	56	176		De Souza	
12,5	195	362	442		
			644	724	
25	257	564		926	1006
37,5	320	686	831		1209
			963	1109	
50	382	778	1094	1240	1386
62,5	445	841		1371	1517
75		903	1167		1648
87,5			1230	1494	1779
100	TRPS			1556	
112,5				1619	1883

Tabla 6.3.2 – Zonas como función de α y n en que cada método es el óptimo.

La tabla 6.3.2 refleja que:

- En la zona superior derecha los valores de la función Costo indican que el mecanismo de De Souza es el óptimo.
- La zona media muestra los valores de la función Costo en los que el mecanismo óptimo es el Alternativo.
- Finalmente, la zona inferior izquierda muestra los valores de la función costo cuando lo que conviene es No aplicar ningún mecanismo de truncamiento.

A fines prácticos se establece la siguiente regla de decisión:

- Si $Calfa < 6,25 * Cn$, conviene aplicar el mecanismo de De Souza.
- Si $6,25 * Cn < Calfa < 11,5 * Cn$, conviene aplicar el mecanismo Alternativo.
- Si $11,5 * Cn < Calfa$, NO conviene aplicar ningún mecanismo al TRPS.

Estas relaciones se obtienen a partir de la tabla 6.3.2 en la que se puede ver que con pares de valores de Calfa y Cn (como por ejemplo 25 y 4, 37,5 y 6, 50 y 8) que se ubican en el límite entre decidir por uno u otro mecanismo se puede establecer una relación:

$$\rightarrow 25/4 = 37,5/6 = 50/8 = 6,25$$

7. CONCLUSIONES

Por todo lo analizado en este trabajo, la primera conclusión que sale a la vista es que el TRPS es un método que, comparado con el método Clásico, presenta ahorros de más de 36% en observaciones. Cuando la hipótesis planteada concuerda con la proporción de piezas defectuosas de la distribución de probabilidades real (en este trabajo real equivale a simulada con Matlab), el ahorro en observaciones fue del 52%.

Estas observaciones tienen un costo económico asociado. Ya sea por el personal dedicado a la revisión, las piezas que deben ser sacadas de la línea o por ensayos destructivos, siempre existe un costo asociado a un ensayo. Una manera indirecta de llegar a los beneficios económicos es a través del tiempo ahorrado⁸. Sin dudas que cada ensayo requiere tiempo y si, usando el método clásico, no se los puede realizar en paralelo, el TRPS también presenta ventajas en ese aspecto: menor cantidad de observaciones requieren de menos tiempo, obviamente. Llegar a una conclusión en forma rápida puede tener muchas implicancias económicas, de tiempo o de salud.

El TRPS, al igual que el método Clásico es sensible a las variaciones en los parámetros. Esta característica hace que se deba proceder con cautela en el momento de la elección de la hipótesis a ensayar. Una hipótesis no estudiada antes de la realización del test puede llevar a que no se aprovechen los beneficios de este método.

Una forma de aumentar los beneficios de este método es a través de mecanismos de truncamiento los cuales establecen criterios para una terminación temprana del test. El mecanismo de De Souza analizado en este trabajo no fue diseñado para ser usado con procesos de Bernoulli, aún así los resultados son importantes ahorros en la cantidad de observaciones.

Se comprobó que los mecanismos de truncamiento presentan comportamientos opuestos entre sí al ser modificadas sus variables principales. Para el mecanismo de De Souza esta variable es el valor límite o de truncamiento (N_{tr}) y para el alternativo son el valor límite inferior (N_{co}), el de truncamiento (N_{tr}) y el valor crítico o de “permanencia” dentro de la zona de decisión (VC). Para el primero, existe una situación de compromiso entre las observaciones esperadas y el error cometido ya que al disminuir una de estas, la otra variable aumenta. Para el segundo, ambas variables disminuyen con el valor crítico quedando determinado éste en $VC = 1$.

⁸ Existe una frase popular que dice: el tiempo es dinero.

El mecanismo propuesto por el autor no genera la misma cantidad de ahorros en observaciones que el mecanismo de De Souza a pesar de haberse variado en el mismo intervalo que éste. La cantidad de observaciones duplica y el error cometido por el test triplica en dispersión a las correspondientes para el nuevo mecanismo.

Se estableció una comparación basada en igualdad de porcentaje de truncamientos. Se comprobó que el mecanismo de De Souza genera un valor esperado de observaciones para el valor límite $N_{tr} = 40$ de 33 observaciones menos que el mecanismo Alternativo. Esto es un ahorro de 45% en observaciones.

Por el contrario, el mecanismo Alternativo genera una disminución de 5,7% para el error tipo I. Esto es una del error en 35,2%.

Para poder comparar las observaciones y el error sin considerar porcentajes de truncamiento iguales se ideó la función Costo que permite ponderar estas variables por sus correspondientes valores económicos. Con el criterio de que la función Costo debe ser mínima para el par de variables (n, α) óptimo, se pudo analizar que relación deben tener estas variables para decidir que mecanismo de truncamiento es conveniente en cada caso o si en realidad, es mejor no truncar el test.

A fines prácticos se establece la siguiente regla de decisión:

- Si $C_{alfa} < 6,25 * C_n$, conviene aplicar el mecanismo de De Souza.
- Si $6,25 * C_n < C_{alfa} < 11,5 * C_n$, conviene aplicar el mecanismo Alternativo.
- Si $11,5 * C_n < C_{alfa}$, NO conviene aplicar ningún mecanismo al TRPS.

Esta regla sirve únicamente cuando las variables fundamentales $(\alpha, \beta, p_0$ y $p_1)$ y las variables principales de cada mecanismo (N_{co} , N_{tr} y VC) son las que se usaron en este trabajo.

A pesar de lo limitado que puede parecer este análisis, el objetivo de este trabajo se ha alcanzado con éxito: introducir un nuevo mecanismo de truncamiento que mostró poseer un rango de aplicación (Ver las reglas de decisión) en el cual el costo total del test es el mínimo alcanzable por las tres alternativas estudiadas en este trabajo.

Como se mencionó en el capítulo 6.1, para poder determinar que test conviene utilizar es necesario esforzarse por no definir el C_{alfa} con criterios subjetivos. La correcta valuación de C_n y C_{alfa} es un punto clave en el estudio previo del test.

El valor de la probabilidad de error tipo I puede ser impuesto por fuerzas exteriores como ser un mercado muy competitivo, clientes exigentes, especificaciones de calidad, etc. Afortunadamente, éste valor (alfa) no es el que se necesita para establecer que mecanismo de truncamiento conviene utilizar. El valor que se debe definir para usar la función Costo como herramienta de comparación y análisis es Calfa: el costo por unidad porcentual de error tipo I.

Es deseable que se continúe este trabajo con el objetivo de investigar que método conviene utilizar para situaciones no tan específicas como las del caso planteado en este trabajo. Puede extenderse el análisis de este trabajo a hipótesis diferentes, variables principales de cada mecanismo diferentes como así también estudiarse el mecanismo Alternativo para otros modelos de distribución.

8. REFERENCIAS

- [1]. Abraham Wald. 1947. "*Sequential Analysis*". Ed. John Wiley & Sons, Inc.
- [2]. Roberto Mariano García. 2004. "*Inferencia estadística y diseño de experimentos*". Ed. Eudeba.
- [3]. J. J. O'Connor y E. F. Robertson. <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Wald.html>
- [4]. Daniel I. De Souza Jr. "*Sequential life testing approach applied to metallurgical products when the Weibull model minimum life is different from zero*". CONAMET/SAM, Universidad de La Serena. Noviembre 2004.
- [5]. Daniel I. De Souza Jr. "*Accelerated life testing applied to metallurgical products with an underlying three-parameter Inverse Weibull model*". CONAMET/SAM, Universidad de La Serena. Noviembre 2004.
- [6]. Javier García de Jalón, José Ignacio Rodríguez, Alfonso Brazales. 2001. "*Aprenda Matlab 6.1 como si estuviera en primero*".
- [7]. Fernández Marcos G., Busoli Antonio C., Barbosa José C. 2002. "*Amostragem seqüencial de Spodoptera Frugiperda (J. E. Smith, 1797) (Lepidoptera, Noctuidae) em algodoeiro*". R. Bras. Agrobiologia, v.8, n.3, p.213-218, set-dez, 2002.
- [8]. P. Krishnan and H. Borowski. 1979. "*Sequential samples for public opinion polls*". The University of Alberta.
- [9]. Van Der Tweel I., Van Noord P.A.H. 2003. "*Early stopping in clinical trials and epidemiological studies for futility: conditional power versus sequential análisis*". Journal of Clinical Epidemiology 2003; 56:610-617.
- [10]. Devore Jay L. 1998. "*Probabilidad y Estadística*". 4ta edición. Ed. Internacional Thompson.

ANEXO I. CASOS REALES EN LOS QUE SE APLICA EL TRPS

I.1 Aplicación al agro: “*Muestreo secuencial de Spodoptera Frugiperda en el algodón*” [7].

Este caso fue realizado en Brasil, mas precisamente en la Hacienda Itamari Sur S.A. localizada en el municipio de Ponta Mora.

Para implementar un correcto control de larvas en el algodón es necesario poder estimar la densidad de esta plaga.

El test TRPS fue introducido de la siguiente manera: tres diferentes campos se dividieron en 100 parcelas de 1 ha cada una y las muestras fueron obtenidas semanalmente. El valor considerado como “nivel de control” fue del 20% de plantas infectadas.

1. Se utilizó la distribución Binomial Negativa que es usada para describir como varia la plaga a lo largo del tiempo.
2. La hipótesis nula fue $\mu_0 = 10\%$ (situación deseada) versus $H_1: \mu_1 = 20\%$.
3. α y β se fijaron ambas en 10%.

El resultado fue un ahorro de mas de 66% que para un test de número fijo de observaciones.

La información necesaria para desarrollar este caso fue obtenida de la base de registros históricos del CEMIP (Centro de Manejo Integrado de Plagas).

I.2 Aplicación a encuestas sociales o de opinión: “*Muestreo secuencial en cuestionarios de opinión pública*” [8].

Este caso fue realizado en Edmonton, Canadá antes de las elecciones federales del 22 de mayo de 1979.

El test TRPS fue introducido de la siguiente manera: la encuesta fue realizada vía telefónica y se les preguntó a los encuestados si estaban o no a favor del partido conservador, con la intención de determinar la proporción de votantes. Además, se tuvieron en cuenta las diferentes composiciones de las distintas áreas de la ciudad con el fin de homogeneizar las muestras y fijar así, un valor crítico de truncamiento para el test en 100 encuestados.

Se fijaron para este test los siguientes parámetros:

- $H_0: p_0 = 0,53$
- $H_1: p_1 \geq 0,57$
- $\alpha = \beta = 0,05$

De los cuatro grupos de datos que se tomaron, sólo uno de ellos terminó anticipadamente en 71 encuestados y los otros tres en 100, valor fijado para truncar la serie.

La información necesaria para desarrollar este caso fue obtenida a partir de los resultados de la votación federal del año 1974.

I.3 Aplicación en productos metalúrgicos: “Análisis secuencial de vida aplicado a productos metalúrgicos cuando la vida mínima del modelo de Weibull es diferente de cero” [4].

En este caso el TRPS es utilizado para estimar la resistencia a la fatiga de vigas de acero de baja aleación y alta resistencia.

Además de aplicar la metodología de muestreos secuenciales, De Souza desarrolla un estimador para el parámetro “vida mínima” que es considerado de mucha importancia en las industrias eléctricas y electrónicas. Para este caso también es muy importante para asegurar que estas las usadas en la construcción de puentes y edificios no van a fallar desde el momento inicial.

Se fijaron para este test los siguientes parámetros:

→ $H_0: \theta \geq \theta_0; \gamma \geq \gamma_0; \phi \geq \phi_0$ con $\theta_0 = 2.700.000$ ciclos, $\gamma_0 = 2,8$ y $\phi_0 = 840.000$ ciclos.

→ $H_1: \theta \leq \theta_1; \gamma \leq \gamma_1; \phi \leq \phi_1$ con $\theta_1 = 2.500.000$ ciclos, $\gamma_1 = 2,5$ y $\phi_1 = 750.000$ ciclos.

→ $\alpha = 0,05$ y $\beta = 0,1$.

donde θ , γ y ϕ son los parámetros de escala, forma y vida mínima, respectivamente.

En este trabajo se expone el mecanismo de truncamiento desarrollado por De Souza, el cual es analizado con los datos obtenidos sin aplicar dicho mecanismo. De haber truncado el test se hubieran reducido los ensayos destructivos de las vigas de 15 a 4.

Este mecanismo de truncamiento es el que se estudia en este trabajo.

I.4 Aplicación en estudios clínicos: “*Test secuencial aplicado a estudios epidemiológicos*” [9].

En los estudios clínicos, la utilidad del TRPS no solo es por la posibilidad de realizar pruebas en menor cantidad de pacientes, sino también porque brinda la posibilidad de terminar rápidamente con un tratamiento o estudio que no manifiesta los resultados esperados ahorrando así los recursos utilizados.

En este caso se realizó un estudio para determinar cuales hubiesen sido los resultados utilizando la metodología TRPS al intentar establecer una asociación entre la arteriosclerosis temprana con la presencia de tres anticuerpos virales: cytomegalovirus (CMV), herpes simples virus 1 (HSV1) y herpes simples virus 2 (HSV2).

La hipótesis planteada fue que la exposición a los virus mencionados (detectados con los anticuerpos correspondientes) están asociados a una arteriosclerosis temprana.

Los casos se estudiaron en pacientes sin evidencias de arteriosclerosis pero con un ensanchamiento anormal de la pared de la arteria carótida identificados por un método no-invasivo de ultrasonido.

El motivo económico por el cual una rápida conclusión es importante en estos casos radica en que los análisis de sangre de los pacientes (para evaluar el estado de los anticuerpos) son demasiado costosos para el laboratorio.

La implementación del TRPS habría logrado ahorros entre 50 y 76%.

ANEXO II. APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS

Para poder analizar los datos de la tabla 5.1.1 se codificó en Matlab 6.5 un programa que obtiene los valores de N_{tr} y α de la primera y tercera columna de la misma y luego calcula el polinomio de grado 2 con el método de mínimos cuadrados. Los valores de esta regresión se ven la parte derecha de la tabla 5.1.1.

Ecuación que permite recalcular los valores de alfa:

$$\rightarrow \alpha(n) = 18,79 - 0,07 n + 9.0836 \exp^{-0,05 n^2} \quad (5.a)$$

La varianza y el coeficiente de regresión validan los resultados.

R^2	S^2
0,80	2,30

Tabla II.1 – Coeficiente de determinación y varianza de la regresión.

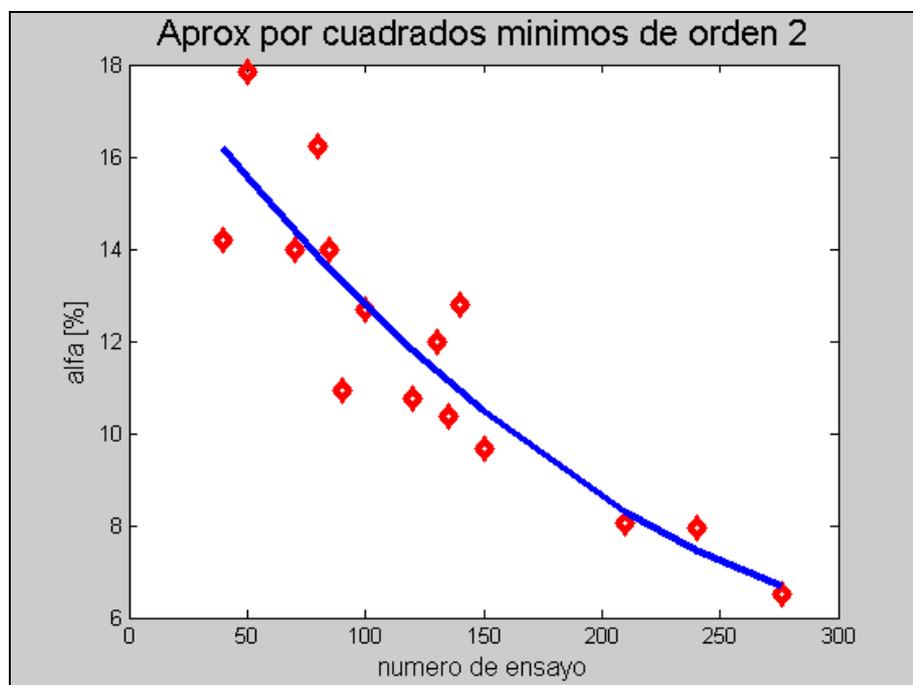


Figura II.1 – Aproximación por mínimos cuadrados de orden 2 para alfa.

La figura II.1 muestra gráficamente la curva de alfa modificada en función de los valores de N_{tr} .

ANEXO III. CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE TESTS DE HIPÓTESIS

Se extraen a continuación algunos conceptos básicos acerca de los tests de hipótesis que vale la pena refrescar. Para extender estas ideas se recomienda consultar la referencia [2].

1º - “Una hipótesis es una suposición o conjetura sobre la naturaleza, cuyo valor de verdad o falsedad no se conoce. Una hipótesis estadística es una hipótesis sobre una población estadística o sobre un fenómeno aleatorio”.

2º - “La hipótesis nula es la hipótesis objeto del ensayo”.

3º - “La hipótesis es el hecho más razonable, plausible, o que deba darse con mayor probabilidad”.

Existen dos tipos de errores que puede cometerse: el error denominado de tipo I, es la probabilidad (α) de rechazar la hipótesis nula cuando esta es verdadera y el error de tipo II, es la probabilidad (β) de aceptarla cuando esta es falsa.

Existen dos formas de plantear un test de hipótesis y están relacionadas con la gravedad que tengan cada uno de los errores antes mencionados. En los casos en que sea muy grave cometer un error tipo I, por ejemplo en inspección de lotes de producción, se debe plantear una hipótesis “optimista” de modo de rechazarla sólo cuando existan pruebas contundentes de que dichos lotes no cumplan las especificaciones. En los casos en que sea muy grave cometer un error tipo II, por ejemplo en invertir en un nuevo proceso o tratamiento térmico, se debe plantear una hipótesis “pesimista” de modo de rechazarla sólo cuando existan pruebas contundentes de que el nuevo proceso o tratamiento cumple las expectativas.

Por último, la potencia de un ensayo se define como la probabilidad de rechazar una hipótesis nula falsa. Esto es el complemento del error tipo II, o sea $\text{Potencia} = (1 - \beta)$. La potencia depende del verdadero valor del parámetro o de la hipótesis alternativa que se plantee.

El diseño de un ensayo de hipótesis clásico consiste de los siguientes pasos:

- Definir la posición, optimista o pesimista.
- Establecer la sensibilidad del ensayo.

→ Calcular el tamaño de la muestra, la región de rechazo o región crítica y establecer una regla de decisión.

Según Wald, un test de hipótesis es simplemente una regla de decisión que establece cuándo rechazar y cuándo aceptar dicha hipótesis en base a los resultados de una muestra [1].

ANEXO IV. BIOGRAFÍA DE ABRAHAM WALD [1902 – 1950]

Abraham Wald nació en Hungría. Después de la primera guerra mundial estudió en la Universidad de Cluj, Rumania. Entró en la Universidad de Viena en 1927. En 1938 viajó a Estados Unidos a realizar investigaciones en economía en la Universidad de Columbia con Hotelling. En 1943 comienza a desarrollar el tema “análisis secuencial” en respuesta a la demanda de métodos mas eficientes para control de calidad durante la segunda guerra. En 1947 publica su monografía “Análisis Secuencial” luego de 4 años de que sus trabajos fueran ocultados por la Armada y Marina estadounidense [3].

ANEXO V. CÓDIGOS DE LOS PROGRAMAS DESARROLLADOS

TRPS sin truncamiento.

%los unos que genera bernu son la cantidad de defectuosos

%Se necesitan definit_clasico porque ahi estan el prom de mediciones, la

%cant de accep y rech para calcular el alfa de la simulacion.

%En el definit_sprt esta el prom de observac, la cant de accep y rech y el

%alfa de sprt simulado. El vector 'corte' tiene los valores para graficar

%en excel. En 'M' estan las rectas.

clear all; clc;

p0 = 0.11; p1 = 0.17;

n = 276;

rc = 39;

corr = 2000;

alfa = 0.05; beta = 0.1;

pmed = (p0+p1)/2; pinf = 0.1065; psup = 0.19;

acepto = zeros(1,corr); rechazo = zeros(1,corr);

p = p1;

%-----testeo clasico-----

for j=1:corr

 for i=1:n

 A(i,j) = bernu(p);

 end

 B(j) = mean(A(:,j));

 C(j) = sum(A(:,j));

 if C(j) < rc || C(j) == rc

 acepto(j) = 1;

 else

 rechazo(j) = 1;

 end

end

prop_simu = mean(mean(A));

rech = sum(rechazo);

accep = sum(acepto);

alfa_clas = 100*rech/corr;

beta_clas = 100*accep/corr;

definit_clasico = [n, accep, alfa_clas, rech, beta_clas];%vector que sirve para ir a Excel!!!!!!!!!!!!!!

%-----testeo secuencial-----

aux1 = log10(beta/(1-alfa)); aux2 = log10((1-beta)/alfa);

aux3 = log10(p1/p0)-log10((1-p1)/(1-p0)); aux4 = log10((1-p0)/(1-p1));

ind = zeros(1,corr); rec = zeros(1,corr); ace = zeros(1,corr);

coin_accp = 0; coin_rech = 0; fall_sprt = 0; fall_clas = 0;

ord_accp = aux1/aux3; ord_rech = aux2/aux3;

pend = aux4/aux3;

W = zeros(n, corr);

for k = 1:n

 M(k,:) = [k, max(0, floor(ord_accp + pend*k)), ceil(ord_rech + pend*k)];

end

for j = 1:corr

 for i = 1:n

 if i == 1

 W(i,j) = A(i,j);

 else

 W(i,j) = W(i-1,j) + A(i,j);

 end

 if M(i,2) == 0

 if W(i,j) < M(i,2)

 ace(j) = 1;

 break

 end

 if W(i,j) == M(i,3) || W(i,j) > M(i,3)

 rec(j) = 1;

 break

 end

 else

```

    if W(i,j) == M(i,2) || W(i,j) < M(i,2)
        ace(j) = 1;
        break
    else
        if W(i,j) == M(i,3) || W(i,j) > M(i,3)
            rec(j) = 1;
            break
        end
    end
end
end
end
if i == n
    ind(j) = 1;
end
corte(j) = i;
end
totalrec = sum(rec);
totalace = sum(ace);
totalind = corr - totalace - totalrec;

prom_obs = mean(corte);
alfa_sprt = 100*totalrec/(corr-totalind);
beta_sprt = 100*totalace/(corr-totalind);
definit_sprt = [prom_obs, totalace, alfa_sprt,
totalrec, beta_sprt];%vector que sirve para ir a
Excel!!!!!!!!!!!!!!
definit_corte = corte';
%-----Generacion de graficas-----
caso = ceil(corr/3);
x = [1:n];
y = ord_acep + x * pend;
z = ord_rech + x * pend;
plot(x, y, 'r','linewidth', 3); hold on; axis([0 n 0
max(M(:,3))]);
plot(x, z, 'k','linewidth', 3);
plot(x,W(:,caso),'linewidth', 3);
title(['SPRT para la corrida N° ', num2str(caso)],
'fontsize', 16);
xlabel('numero de ensayo', 'fontsize', 12);
ylabel('cantidad de defectuosos', 'fontsize', 12);
%-----Comparacion de metodos-----
if p < pmed
for i = 1:corr
    if acepto(i) == 1
        if acepto(i) == ace(i)
            coin_acep = coin_acep + 1;
        end
        if acepto(i) == rec(i)
            fall_sprt = fall_sprt + 1;
        end
        if rechazo(i) == 1
            if rechazo(i) == rec(i)
                coin_rech = coin_rech + 1;
            end
            if rechazo(i) == ace(i)
                fall_clas = fall_clas + 1;
            end
        end
    end
end
total = coin_acep + fall_sprt + coin_rech +
fall_clas + totalind;
definit_compar = [coin_acep fall_sprt coin_rech
fall_clas totalind total];

```



```

        rec(j) = 1;
    else
        trunc_ace(j) = 1;
        ace(j) = 1;
    end
end
end

totalrec = sum(rec);
totalace = sum(ace);
totaltrunc_rec = sum(trunc_rec); totaltrunc_ace
= sum(trunc_ace); totaltrunc = totaltrunc_rec +
totaltrunc_ace;

prom_obs = mean(corte);
alfa_sprt = 100*totalrec/(corr);
beta_sprt = 100*totalace/(corr);
definit_sprt = [prom_obs, totalace, alfa_sprt,
totalrec, beta_sprt];%vector que sirve para ir a
Excel!!!!!!!!!!!!!!
definit_corte = corte';

caso = ceil(corr/3);
x = [1:n]; xtr = [1:max(M(:,4))];
y = ord_acep + x * pend;
z = ord_rech + x * pend;
w = ord_med + x * pend;

plot(x, y, 'r','linewidth', 3); hold on; axis([0 n 0
max(M(:,4))]);
plot(x, z, 'k','linewidth', 3);
plot(x, w, 'g','linewidth', 3);
plot(x,W(:,caso),'linewidth', 3);
%plot(x,W(:,caso+10),'linewidth', 3);
%plot(x,W(:,caso-15),'linewidth', 3);
plot(ntr,xtr,'mo','markersize',
4,'markerfacecolor','m');
title(['SPRT para la corrida N° ', num2str(caso), '
y Ntr ',num2str(ntr) ], 'fontsize', 16);
xlabel('numero de ensayo', 'fontsize', 12);
ylabel('cantidad de defectuosos', 'fontsize', 12);

%-----Comparacion de
metodos-----
if p < pmed
    for i = 1:corr
        if acepto(i) == 1
            if acepto(i) == ace(i)
                coin_acep = coin_acep + 1;
            end
            if acepto(i) == rec(i)
                fall_sprt = fall_sprt + 1;
            end
        end
        if rechazo(i) == 1
            if rechazo(i) == rec(i)
                coin_rech = coin_rech +1;
            end
            if rechazo(i) == ace(i)
                fall_clas = fall_clas +1;
            end
        end
    end
    else
        for i = 1:corr
            if acepto(i) == 1
                if acepto(i) == ace(i)
                    coin_acep = coin_acep + 1;
                end
                if acepto(i) == rec(i)
                    fall_clas = fall_clas +1;
                end
            end
            if rechazo(i) == 1
                if rechazo(i) == rec(i)
                    coin_rech = coin_rech +1;
                end
                if rechazo(i) == ace(i)
                    fall_sprt = fall_sprt + 1;
                end
            end
        end
        total = coin_acep + fall_sprt + coin_rech +
fall_clas;
        definit_compar = [coin_acep totaltrunc_ace
coin_rech totaltrunc_rec total fall_sprt
fall_clas];
    end
end

```

TRPS con el mecanismo propuesto por el autor.

```
clear all; clc;
p0 = 0.11; p1 = 0.17;
n = 276;
rc = 39;
corr = 20;
alfa = 0.05; beta = 0.1;
pmed = (p0+p1)/2; pinf = 0.09; psup = 0.19;
acepto = zeros(1,corr); rechazo = zeros(1,corr);
ntr = 140;%valor esperado en el cual va a
truncar la serie
nco = 40;
tta_lim = 25; ttr_lim = tta_lim;

if tta_lim > ntr-nco || ttr_lim > ntr-nco
    fprintf('hubo un error en el criterio de
truncamiento');
    break
end
p = 0.11;
%-----testeo clasico-----
for j=1:corr
    for i=1:n
        A(i,j) = bernu(p);
    end
    B(j) = mean(A(:,j));
    C(j) = sum(A(:,j));
    if C(j) < rc || C(j) == rc
        acepto(j) = 1;
    else
        rechazo(j) = 1;
    end
end
prop_simu = mean(mean(A));
rech = sum(rechazo);
acep = sum(acepto);
alfa_clas = 100*rech/corr;
beta_clas = 100*acep/corr;
definit_clasico = [n, acep, alfa_clas, rech,
beta_clas];
```

```
%-----testeo secuencial-----
aux1 = log10(beta/(1-alfa)); aux2 = log10((1-
beta)/alfa);
aux3 = log10(p1/p0)-log10((1-p1)/(1-p0)); aux4
= log10((1-p0)/(1-p1));
rec = zeros(1,corr); ace = zeros(1,corr);trunc =
zeros(n,1);trunc_ace = zeros(n,1);trunc_rec =
zeros(n,1);
coin_acep = 0; coin_rech = 0; fall_sprt = 0;
fall_clas = 0;tta = 0;ttr = 0;jh = 0;
RA = zeros(1,ntr); RR = zeros(1,ntr);
ord_acep = aux1/aux3; ord_rech = aux2/aux3;
pend = aux4/aux3; ord_med =
(ord_rech+ord_acep)/2;
W = zeros(n, corr);
for k = 1:n
    M(k,:) = [k, max(0, floor(ord_acep +
pend*k)), ord_med + pend*k, ceil(ord_rech +
pend*k)];
end
pto_fin = [ntr M(ntr, 3)]; pto_acep = [nco
(ord_acep + pend*nco)]; pto_rech = [nco
ord_rech + pend*nco];
pend_acep = (pto_fin(2)-
pto_acep(2))/(pto_fin(1)-pto_acep(1));
pend_rech = (pto_fin(2)-
pto_rech(2))/(pto_fin(1)-pto_rech(1));
for k = nco:ntr
    RR(k) = pto_rech(2) + pend_rech*(k-nco+1);
    RA(k) = pto_acep(2) + pend_acep*(k-
nco+1);
end
for j = 1:corr
    for i = 1:ntr
        if i < nco
            if i == 1
                W(i,j) = A(i,j);
            else
                W(i,j) = W(i-1,j) + A(i,j);
            end
            if M(i,2) == 0
                if W(i,j) < M(i,2)
                    ace(j) = 1;
                    break
                end
            end
            if W(i,j) == M(i,4) || W(i,j) > M(i,4)
```



```

prom_obs = mean(corte);
alfa_sprt = 100*totalrec/(corr);
beta_sprt = 100*totalace/(corr);
definit_sprt = [prom_obs, totalace, alfa_sprt,
totalrec, beta_sprt];
definit_corte = corte';
caso = ceil(corr/3);
x = [1:n]; xtr = [1:max(M(:,4))]; rr = [nco:ntr];
y = ord_rech + x * pend;
z = ord_acep + x * pend;
w = ord_med + x * pend;

plot(x, y, 'r','linewidth', 3); hold on; axis([0 n 0
max(M(:,4))]);
plot(x, z, 'k','linewidth', 3);
plot(x, w, 'g','linewidth', 3);
plot(x,W(:,caso),'linewidth', 3);
%plot(x,W(:,caso+10),'linewidth', 3);
%plot(x,W(:,caso-15),'linewidth', 3);
plot(rr,RR(nco:ntr),'r','linewidth', 3); plot(rr,
RA(nco:ntr),'k','linewidth', 3);

plot(ntr,xtr,'mo','markersize',
4,'markerfacecolor','m');
plot(nco,xtr,'mo','markersize',
4,'markerfacecolor','m');
%title(['SPRT para la corrida N° ',
num2str(caso), ' y valor critico
',num2str(tta_lim)], 'fontsize', 16);
title(['SPRT con valor critico
',num2str(tta_lim)], 'fontsize', 16);
xlabel('numero de ensayo', 'fontsize', 12);
ylabel('cantidad de defectuosos', 'fontsize', 12);
%-----Comparacion de metodos-----
if p < pmed
for i = 1:corr
if acepto(i) == 1
if acepto(i) == ace(i)
coin_acep = coin_acep + 1;
end
if acepto(i) == rec(i)
fall_sprt = fall_sprt + 1;
end
end
if rechazo(i) == 1
if rechazo(i) == rec(i)
coin_rech = coin_rech + 1;
end
if rechazo(i) == ace(i)
fall_sprt = fall_sprt + 1;
end
end
end
end
total = coin_acep + fall_sprt + coin_rech +
fall_clas;
definit_compar = [coin_acep totaltrunc_ace
coin_rech totaltrunc_rec total fall_sprt
fall_clas];

```