

**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES – ITBA**

**ESCUELA DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA**

# **Implementación Numérica de un Modelo de Fracturación Hidráulica mediante XFEM**

**AUTOR: De Cunto, Luis Octavio (Leg. N° 52351)**

**TUTOR: D'hers, Sebastián**

# Resumen

La técnica de Fracturación Hidráulica es un proceso de importante relevancia en la extracción de petróleo y gas. Resumidamente, este proceso consiste en inyectar un fluido a muy alta presión en una roca para fracturarla y, de esta manera, aumentar su permeabilidad. Físicamente, este proceso involucra tres problemas diferentes: Las variaciones de presión existentes en el fluido dentro de la fractura, la deformación de la roca debido a dicha presión ejercida por el fluido, y la propagación de la fractura.

Este trabajo tiene como objetivo modelar numéricamente dicho proceso, teniendo en cuenta los tres fenómenos nombrados previamente. Al depender mutuamente, las ecuaciones que describen dichos fenómenos se encuentran acopladas, formando un sistema de ecuaciones no Lineal. Es por esto que se resuelven las ecuaciones que describen cada fenómeno iterativamente, tratando de modelar cada parte del problema en forma independiente.

Se utiliza el método XFEM para modelar adecuadamente la fractura, ya que no es necesario que la malla se encuentre alineada con la fractura y, por otra parte, evita el problema de remallar cuando la fractura avanza.

# Indice

<b>Resumen</b> . . . . .	ii
<b>Indice</b> . . . . .	iii
<b>Lista de Tablas</b> . . . . .	v
<b>Lista de Figuras</b> . . . . .	vi
<b>1 Introducción</b> . . . . .	1
<b>2 Presentación del Problema</b> . . . . .	3
2.1 Reservorios No Convencionales . . . . .	3
2.2 Fracturación Hidráulica . . . . .	5
2.2.1 Fluido de Fracturación . . . . .	5
2.2.2 Proceso de Fracking . . . . .	7
<b>3 Modelo Teórico del Problema</b> . . . . .	9
3.1 Descripción Física . . . . .	9
3.2 Mecánica del Sólido . . . . .	10
3.2.1 Material . . . . .	10
3.2.2 Problema Elástico . . . . .	10
3.2.3 Ley Cohesiva . . . . .	11
3.2.4 Principio de los Trabajos Virtuales . . . . .	12
3.3 Mecánica del Fluido . . . . .	13
3.3.1 Características del Fluido . . . . .	13
3.3.2 Ecuación de Lubricación de Reynolds . . . . .	14
3.3.3 Caudal Perdido ( <i>Leak-off</i> ) . . . . .	14
3.4 Mecánica de Fractura . . . . .	15
3.4.1 Mecánica de Fractura Lineal Elástica . . . . .	15
3.4.2 Factores de Intensidad de Tensiones . . . . .	16
3.4.3 Integral J . . . . .	17
3.4.4 Relación entre Parámetros Energéticos . . . . .	18
3.4.5 Cálculo de Parámetros Energéticos . . . . .	18
3.4.6 Propagación de la Fractura . . . . .	20
3.4.7 Dirección de la Fractura . . . . .	20
<b>4 Modelo Numérico del Sólido</b> . . . . .	21
4.1 Partición de la Unidad (PU) . . . . .	21
4.2 Enriquecimiento de una Solución . . . . .	21
4.2.1 Enriquecimiento intrínseco . . . . .	22

4.2.2	Enriquecimiento extrínseco . . . . .	22
4.3	Aproximación XFEM . . . . .	22
4.3.1	Descripción de las discontinuidades . . . . .	23
4.3.2	Funciones de enriquecimiento . . . . .	23
4.3.3	Discretización . . . . .	26
4.3.4	Implementación Numérica . . . . .	28
4.4	Aplicación del método XFEM al caso particular . . . . .	28
4.4.1	Enriquecimiento . . . . .	28
4.4.2	Desarrollo del término en la discontinuidad . . . . .	30
4.4.3	Cálculo de la Matriz de Rigidez . . . . .	31
4.4.4	Cálculo de los términos en la discontinuidad . . . . .	32
4.4.5	Post-Proceso: Propagación de la fractura . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Modelo Numérico del Fluido . . . . .</b>	<b>33</b>
5.1	Ecuación a modelar . . . . .	33
5.1.1	Modelado de <i>Leak-off</i> . . . . .	34
5.2	Método de Elementos Finitos . . . . .	34
5.2.1	Mallado . . . . .	34
5.2.2	Aplicación del FEM a la ecuación . . . . .	34
5.2.3	Esquema temporal . . . . .	35
5.2.4	Condiciones de Borde . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Acople Fluido-Estructura . . . . .</b>	<b>37</b>
6.1	Sistema de Ecuaciones . . . . .	37
6.2	Algoritmo de Solución . . . . .	37
6.2.1	Esquema Temporal del acople FSI . . . . .	37
6.2.2	Iteraciones de Picard . . . . .	38
6.2.3	Diagrama de Flujo del Algoritmo . . . . .	40
<b>7</b>	<b>Validación y Resultados . . . . .</b>	<b>41</b>
7.1	Modelo XFEM . . . . .	41
7.1.1	Double Cantilever Bean (DCB) . . . . .	41
7.1.2	Placa rectangular con grieta transversal sometida a tensión normal . . . . .	46
7.1.3	Placa rectangular con grieta transversal sometida a corte . . . . .	50
7.1.4	Placa cuadrada sometida a tensión normal y de corte con propagación de fractura . . . . .	53
7.2	Modelo de la Ecuación de Lubricación . . . . .	58
7.2.1	Flujo entre placas planas paralelas sin <i>leak-off</i> . . . . .	58
7.2.2	Flujo entre placas planas paralelas con <i>leak-off</i> constante . . . . .	61
7.2.3	Flujo dentro de una fractura tipo KGD . . . . .	62
7.3	Acople FSI . . . . .	64
7.3.1	Modelo KGD sin <i>leak-off</i> . . . . .	64
7.3.2	Modelo KGD con <i>leak-off</i> . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Conclusiones . . . . .</b>	<b>68</b>
	<b>Referencias . . . . .</b>	<b>69</b>

# Lista de Tablas

3.1	Solución de Westergaard para los campos de desplazamientos y tensiones. . . . .	17
7.1	Valores de grados de libertad obtenidos para nodos con desplazamientos impuestos y comparación con resultados de Khoei. . . . .	42
7.2	DCB: Valores de $\mathcal{G}$ y $K_1$ calculados para diferentes radios de dominio de integral $J$ . . . . .	45

# Lista de Figuras

1.1	Tipos de fractura correspondientes a los modelos teóricos PKN y KGD. [1]. . . . .	2
2.1	Esquema de yacimiento convencional y no convencional. [2] . . . . .	3
2.2	Clasificación de reservorios convencionales y no convencionales de acuerdo a las características del mismo. [3] . . . . .	5
2.3	Proceso de Fracturación hidráulica. [4] . . . . .	7
3.1	Problema de fracturación hidráulica simplificado. El fluido ejerce presión dentro de la roca, lo que causa la propagación de una fisura [5]. . . . .	9
3.2	Modelo de sólido deformable con discontinuidad [6]. . . . .	11
3.3	Diferentes tipos de leyes de tracción cohesiva [7]. . . . .	11
3.4	Volumen de control correspondiente al problema del fluido dentro de la fractura. [8]. . . . .	14
3.6	Coordenadas polares referidas al origen de la fractura. [6] . . . . .	16
3.5	Modos de fractura. . . . .	16
3.7	Ángulos de propagación correspondientes a modos $K_I$ y $K_{II}$ puro. . . . .	20
4.1	<i>Level-set function</i> $\phi(\mathbf{x})$ . . . . .	23
4.2	<i>Base de Funciones de Enriquecimiento Crack Tip</i> . . . . .	25
4.3	Elementos enriquecidos. . . . .	29
4.4	Elementos subdivididos en triángulos con sus correspondientes Puntos de Gauss. . . . .	31
5.1	Nodos del modelo de Elementos Finitos para el fluido. . . . .	34
6.1	Cantidad de iteraciones necesarias para distintos valores de $\alpha$ y de largo de fractura. . . . .	39
6.2	Diagrama de Flujo del algoritmo FSI. . . . .	40
7.1	Double Cantilever Beam (DCB) [6]. . . . .	41
7.2	Ancho máximo de la fractura para diferentes mallados. . . . .	42
7.3	Campos de tensiones calculados. . . . .	43
7.4	DCB: Campos de tensiones obtenidos por Khoei. . . . .	44
7.5	Placa sometida a tensión normal. . . . .	46
7.6	Error del Factor $K_I$ en función del número de nodos, para diferentes dominios de la integral $J$ . . . . .	48
7.7	Error del Factor $K_I$ en función del tamaño de dominio de la integral $J$ , para diferentes refinamientos. . . . .	48
7.8	Valores de $K_I$ para distintos largos de grieta. . . . .	49
7.9	Placa sometida a tensión de corte. . . . .	50
7.10	Error de los Factores $K_I$ y $K_{II}$ obtenidos en este trabajo en función del número de nodos, para diferentes dominios de la integral $J$ . . . . .	51
7.11	Error del Factor $K_I$ en función del tamaño de dominio de la integral $J$ , para diferentes refinamientos. . . . .	52

7.12 Error del Factor $K_I$ en función del tamaño de dominio de la integral $J$ , para diferentes refinamientos. . . . .	52
7.13 Placa cuadrada sometida a diferentes estados de tensión. . . . .	53
7.14 Propagación de la fractura para diferentes valores del radio de integración. . . . .	54
7.15 Propagación de la fractura para diferentes valores de $da$ . . . . .	55
7.16 Propagación de la fractura para diferentes refinamientos. . . . .	55
7.17 Propagación de la fractura para diferentes valores del ángulo de desplazamientos $\alpha$ . . . . .	56
7.18 Valores del ángulo de propagación $\theta_c$ para distintos valores de $\alpha$ . . . . .	57
7.19 Flujo entre placas planas paralelas. . . . .	58
7.20 Campo de presiones calculado para el caso entre placas planas sin <i>leak-off</i> . . . . .	59
7.21 Resultados obtenidos para un flujo entre placas planas paralelas sin <i>leak-off</i> para distintos valores de $Q_0^1$ , $\mu$ y $w_0$ . . . . .	60
7.22 Resultados obtenidos para un flujo entre placas planas paralelas con <i>leak-off</i> constante. . . . .	61
7.23 Error del modelo numérico respecto de la solución teórica. . . . .	62
7.24 Fractura en modelo KGD. . . . .	62
7.25 Resultados del modelo numérico comparados con el modelo KGD . . . . .	63
7.26 Resultados obtenidos para un Problema de Fracturación Hidráulica y comparación con el modelo KGD. . . . .	65
7.27 Largo de fractura para el modelo con y sin <i>leak-off</i> , . . . . .	66
7.28 Presión máxima para el modelo con <i>leak-off</i> constante, . . . . .	67

# Capítulo 1

## Introducción

Durante los últimos 150 años, el uso extendido del petróleo en diversas industrias, en particular combustibles para generación de energía, lo han convertido en un producto imprescindible para el mundo en la actualidad. Dentro de esta industria, una de las operaciones principales es la extracción de petróleo de un reservorio o yacimiento, la cual puede diferir completamente entre regiones distintas debido a las características y condiciones particulares de cada yacimiento. En particular, cuando la permeabilidad es muy baja y no permite la extracción de petróleo por medios convencionales, es necesario utilizar técnicas de estimulación de reservorios.

Dentro de estas técnicas, una de las más importantes es la llamada fracturación hidráulica o *Fracking*, que consiste en aumentar la permeabilidad inyectando un fluido (agua mezclada con aditivos) a alta presión, el cual provoca la fractura de la roca formando una red de grietas que posibilita la extracción de gas y petróleo del reservorio.

A pesar de que el *Fracking* ha sido empleado durante más de 60 años, aún existen estimaciones y variables del proceso que pueden optimizarse para mejorar la eficiencia del mismo. Por este motivo, existe la necesidad de desarrollar modelos numéricos robustos capaces de simular esta técnica, que permitan realizar estimaciones fidedignas, en relación a la cantidad de fluido a inyectar, la forma y distribución de las fracturas creadas y la producción a obtener.

Un modelo de fracturación hidráulica requiere realizar un acoplamiento entre el cálculo de la presión en el fluido dentro de la fractura y la propagación de dicha fractura debido a la distribución de presiones que deben vencer las tensiones de formación en la estructura.

Los primeros modelos analíticos capaces de describir una fractura en 2 dimensiones fueron los modelos PKN (Perkins - Kern - Nordgren) [9, 10], utilizado cuando el largo de la fractura es mucho mayor que su altura 1.1a, y el modelo KGD (Khristianovic - Geertsma - de Klerk) [11], el cual es aplicable cuando la altura de la fractura es mayor que su largo 1.1b. Posteriormente, se desarrolló otro modelo teórico llamado P3D (Pseudo-3D), el cual es una extensión del modelo PKN para casos en 3 dimensiones. Estos 3 modelos proponen un cálculo para el ancho de la fractura con el cual es posible estimar el volumen de fluido de fracturación necesario para el proceso.

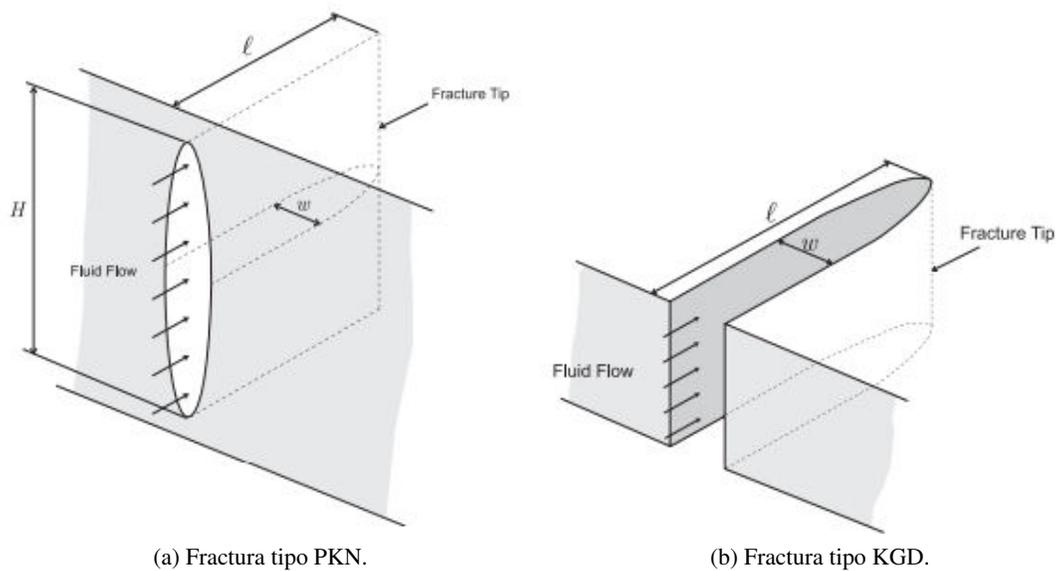


Figura 1.1: Tipos de fractura correspondientes a los modelos teóricos PKN y KGD. [1].

Con el desarrollo de la mecánica computacional, surgieron modelos numéricos capaces de describir problemas físicos como el Método de los Elementos Finitos (FEM), de gran aplicación en la mecánica del continuo. Este método tiene la desventaja de que solo puede aplicarse a casos donde el dominio es un medio continuo por lo que para modelar problemas de mecánica de fractura el mallado debe describir explícitamente la fractura y, a medida que la fractura crece, es necesario realizar una malla nueva sobre un nuevo dominio y resolver un problema diferente en cada iteración. Esta acción de volver a mallar y resolver nuevamente el sistema de ecuaciones aumenta notablemente el costo computacional.

Es así que surgen modelos del tipo Zero-thickness interface element based models, los cuales intercalan, entre los bordes de los diferentes elementos del FEM elementos de espesor nulo, por los cuales el cuerpo puede fracturarse. Estos modelos, a pesar de que solucionan el problema del remallado, mantienen la desventaja del método anterior que es el alto costo computacional, el cual en este caso no se debe al remallado sino que ocurre debido al número de grados de libertad del problema, que aumenta por el uso de los elementos de espesor nulo. Por otro lado, en este modelo el cuerpo solo puede fracturarse por los elementos de espesor nulo, por lo que el recorrido de la fractura se encuentra predeterminado por la posición donde se encuentran estos elementos, lo que se convierte en una importante desventaja al tratar de modelar la propagación.

Con el desarrollo del método de partición de la unidad (PUM) [12], comenzaron a desarrollarse distintos métodos basados en FEM, tales como el GFEM (Generalized Finite Element Method) [13] o el XFEM (eXtended Finite Element Method) [14], los cuales permiten mejorar la solución del FEM y, a su vez extender su uso a dominios discontinuos. Estos métodos generalizaban la idea principal del FEM a dominios discontinuos, agregando en su formulación, funciones discontinuas que permiten “enriquecer” la solución.

En este trabajo, se estudia la propagación de fracturas de tipo KGD, utilizando una formulación XFEM para el problema de mecánica del sólido acoplado con una formulación con Elementos Finitos en una dimensión para el problema del fluido. Además, se tiene en cuenta dentro de la formulación el efecto de una ley cohesiva para el sólido y un efecto de *leak-off* modelado por una ley de Darcy para el fluido.

## Capítulo 2

# Presentación del Problema

### 2.1 Reservorios No Convencionales

Los reservorios, o yacimientos, de hidrocarburos, pueden clasificarse, de acuerdo con sus características y propiedades físico-mecánicas, en 2 grandes grupos: Convencionales y No convencionales. Los Yacimientos Convencionales son aquellos en los cuales las características del yacimiento permiten una fácil extracción del hidrocarburo. Por el contrario, en los Yacimientos No Convencionales, el hidrocarburo contenido no fluye de forma natural hacia el pozo, por lo que es necesario realizar un tratamiento de estimulación en el reservorio, que permita su posterior extracción (Figura 2.1). Para determinar si un reservorio se clasifica como Convencional o No Convencional, es necesario tener en cuenta la permeabilidad del material del reservorio y la viscosidad dinámica del hidrocarburo.

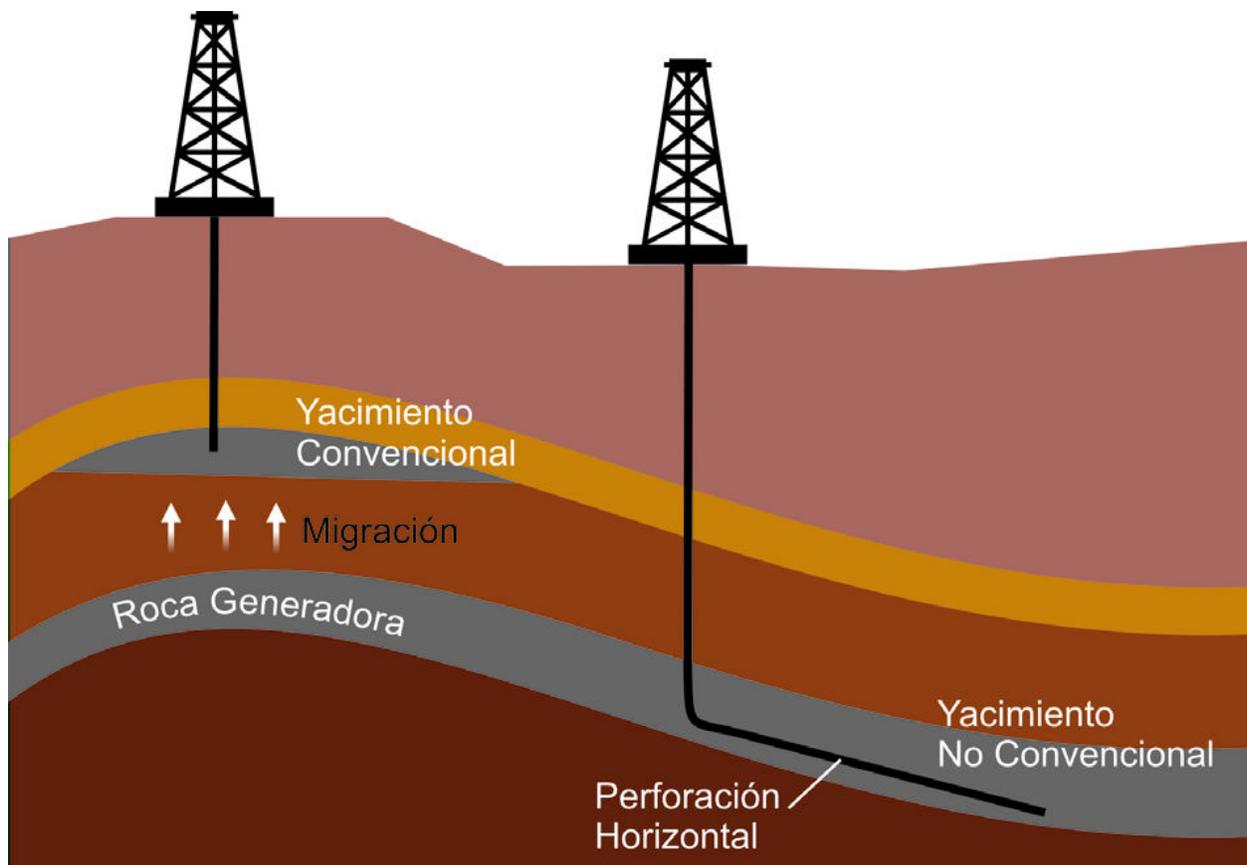


Figura 2.1: Esquema de yacimiento convencional y no convencional. [2]

La permeabilidad de un material se define como “la capacidad del mismo de permitirle a un flujo que lo atraviese sin alterar su estructura interna”. Su valor depende fuertemente de la porosidad del material, la

cual determina la cantidad de espacio ocupado por poros o huecos de un material, y de qué tan conectados se encuentran dichos poros, ya que las conexiones entre poros son las que permiten el flujo de un fluido a través del material. Generalmente, se distinguen 2 tipos de permeabilidad:

- Permeabilidad intrínseca: Depende exclusivamente de las características del material. Su unidad de medida es el  $m^2$ , aunque tradicionalmente se utiliza el Darcy<sup>1</sup>.

- Permeabilidad real (de Darcy): Esta propiedad tiene en cuenta, además de las propiedades del material, las características del flujo que lo atraviesa. De esta manera, es posible encontrar diferentes valores de permeabilidad real, dependiendo de qué fluido sea el que lo traspase.

La viscosidad dinámica de un fluido es una propiedad que determina la resistencia del mismo a deformaciones graduales ocasionadas por tensiones de corte. Para un cierto flujo, la velocidad del mismo depende fuertemente de la viscosidad cinemática del fluido que lo conforma. Usualmente, los líquidos tienen valores de viscosidad dinámica alrededor de 3 órdenes de magnitud mayores que los valores para los gases. Su unidad de medida es el  $Pa \cdot seg$ .

Utilizando estas propiedades, es posible desarrollar un gráfico que permita determinar la clasificación de un reservorio en base a sus características (Figura 2.2). Puede observarse en el mismo que para permeabilidades menores a  $0,1mD$  se considera al reservorio como No Convencional, sin importar qué hidrocarburo se encuentre en el mismo. Esto se debe a que para valores tan bajos de permeabilidad, el material del reservorio resulta muy poco permeable, sin importar de qué fluido está compuesto el flujo. Para valores de permeabilidad mayores a  $0,1mD$  la clasificación depende de un compromiso entre la porosidad del material y la viscosidad del hidrocarburo, siendo el yacimiento convencional para hidrocarburos menos viscosos, y no convencional para hidrocarburos viscosos como el caso del petróleo pesado.

---

<sup>1</sup>  $1 \text{ Darcy} = 9,869 \cdot 10^{-13} m^2$

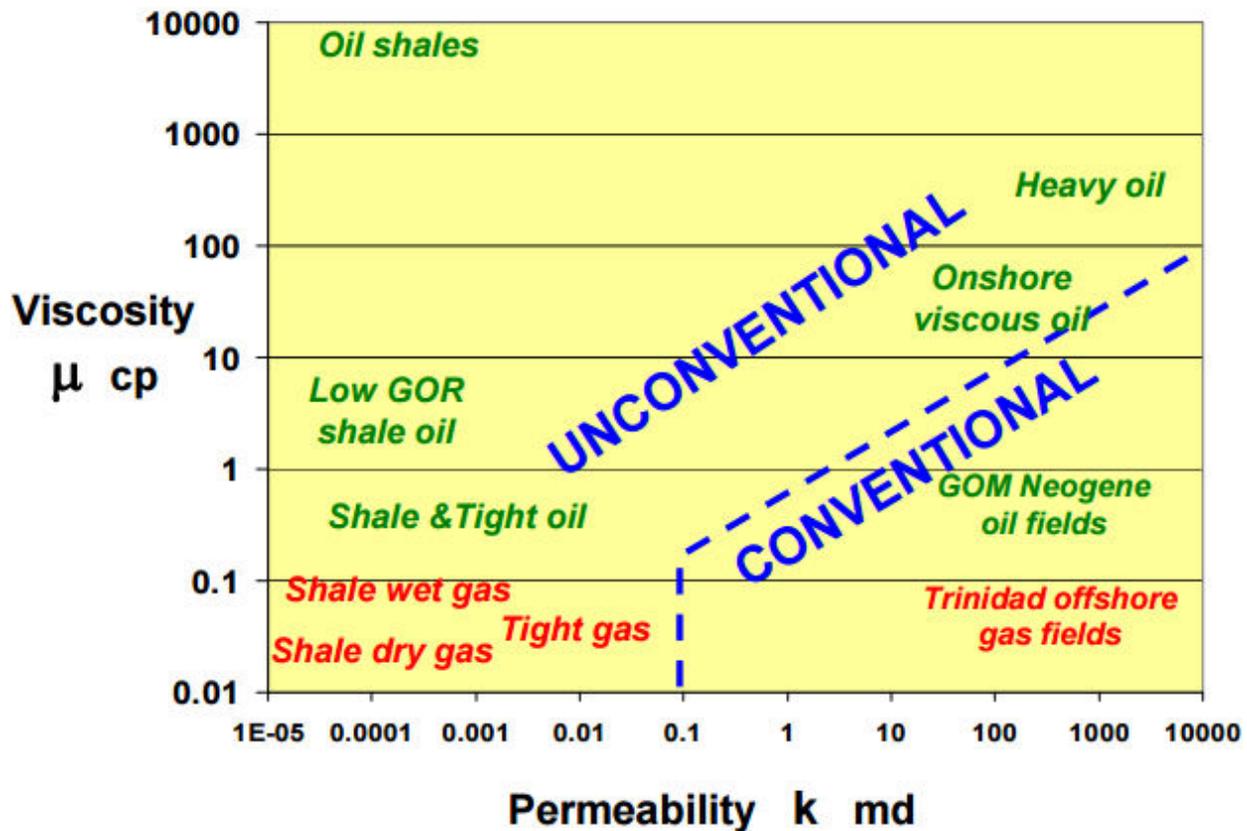


Figura 2.2: Clasificación de reservorios convencionales y no convencionales de acuerdo a las características del mismo. [3]

## 2.2 Fracturación Hidráulica

Esta técnica de estimulación consiste en originar caminos alternativos dentro de la roca para que los hidrocarburos logren llegar al pozo de extracción inyectando un fluido a muy alta presión para fracturar la roca.

### 2.2.1 Fluido de Fracturación

El fluido de fracturación, como su nombre lo indica, es el agente causante de la fracturación de la roca, y el componente más relevante de la técnica de fracturación hidráulica. El mismo debe cumplir los siguientes requisitos:

- Debe poder bombearse con facilidad.
- Debe ser capaz de mantener en suspensión un material propante (material encargado de mantener la fractura abierta una vez finalizado el proceso) mientras es bombeado, y de depositarlo en las fracturas formadas.
- Debe poder fluir a través de la roca a fracturar, con una pérdida mínima de fluido por entre los poros. No debe taponar los poros de las rocas en forma permanente.

## 2.2. *Fracturación Hidráulica*

---

- Bajo las condiciones de presión y temperatura del pozo, debe ser compatible con el hidrocarburo a extraer.

En la fracturación hidráulica, como su nombre lo indica, el fluido de fracturación se encuentra compuesto de aproximadamente un 98-99,5 % de agua, que se complementa con aditivos químicos para mejorar ciertas propiedades del fluido. Si bien estos aditivos varían de acuerdo a las condiciones características de cada pozo, existen ciertos aditivos que se encuentran presentes en prácticamente todas las extracciones donde es utilizada la fracturación hidráulica.

Además de los aditivos químicos, es muy importante destacar que, en todo proceso de fracturación hidráulica, se agrega un propante, o agente de sostenimiento, el cual tiene como objetivo impedir el cierre de la fractura creada una vez terminado el bombeo de fluido. El propante debe ser resistente a los esfuerzos y a la corrosión (debido al ambiente ácido del fluido de fracturación), tener una baja gravedad específica (para evitar la segregación o decantación del mismo), mantener una permeabilidad alta frente a los gases en condiciones de alta presión, y, en lo posible, debe tener un bajo costo (ya que debe utilizarse en grandes cantidades). Generalmente, se utilizan arenas, las cuales pueden ser comunes o cubiertas con resina, como también materiales cerámicos de alta resistencia.

## 2.2.2 Proceso de Fracking

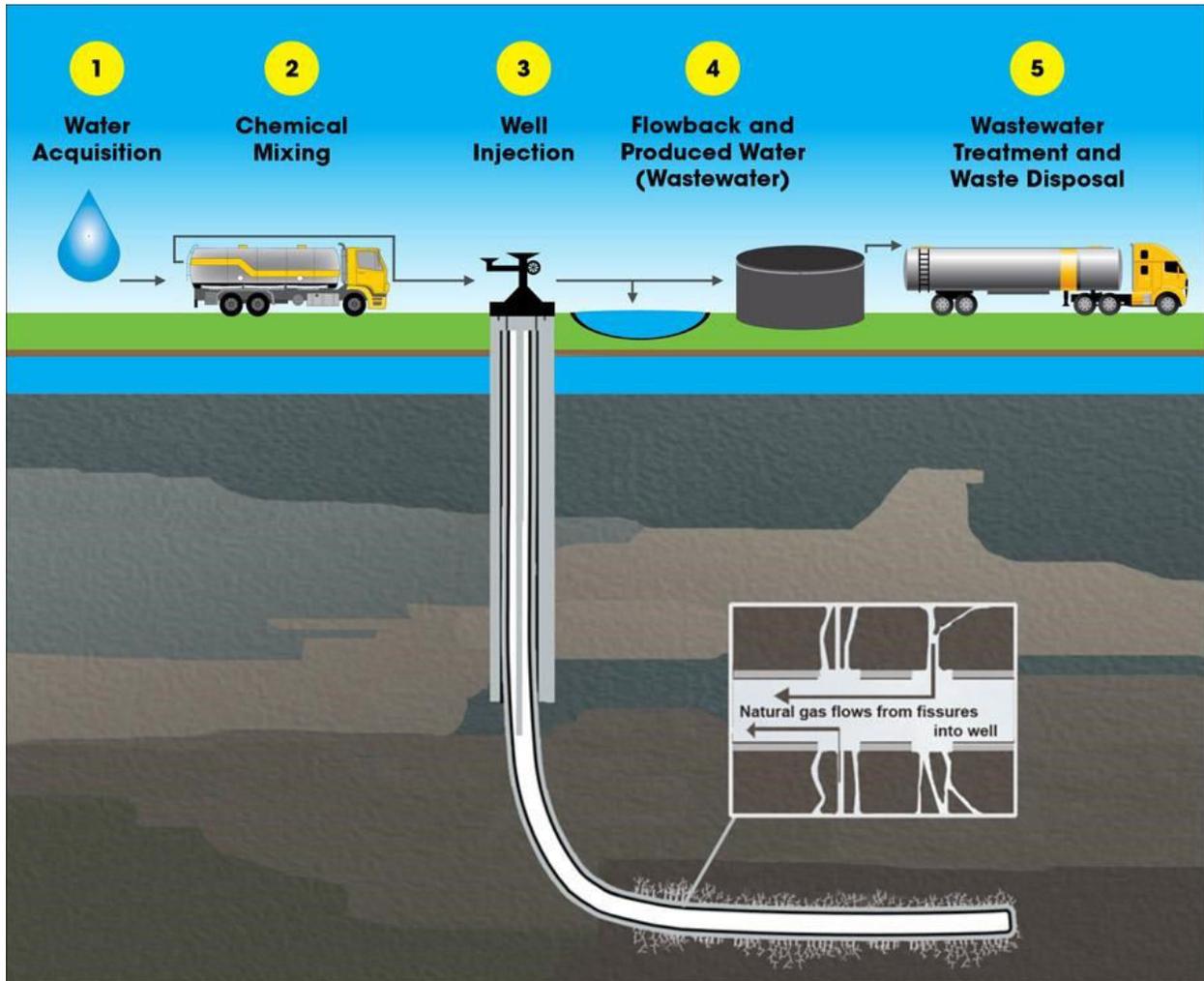


Figura 2.3: Proceso de Fracturación hidráulica. [4]

Durante el proceso, el fluido es bombeado a presión en profundidad en la carcasa de producción o *casing*, la cual se encuentra perforada en diferentes posiciones a lo largo del eje de la misma. El fluido tiende a salir por estas perforaciones, generando un flujo transversal al eje de la carcasa dentro de la roca. Debido a la alta presión a la que se encuentra el fluido, si dicha presión vence a las tensiones de formación de la roca, el flujo es capaz de generar una fractura, abriéndose camino dentro de la misma.

Usualmente ocurre que parte del fluido de fracturación se escapa a través de las paredes de la fractura ya que, si bien la permeabilidad de la roca es muy baja, la misma no es nula. Este fenómeno es llamado pérdida de fluido por *leak-off*, y es mayor a medida que la fractura crece debido a que el área de las paredes de fractura es mayor.

Mientras la inyección de fluido a alta presión continúa, y la tasa de inyección sea mayor a la de pérdida por *leak-off*, la fractura puede seguir creciendo o propagarse. Sin embargo, para que esto ocurra, la tasa a la cual el fluido es inyectado, debe ser lo suficientemente rápida para que se mantenga la presión necesaria para propagar la fractura.

En materiales isótropos, la fractura se propagará en la dirección de menor resistencia, la cual será definida por las tensiones dentro de la roca, por lo que la misma dependerá de las características particulares de la formación en la que se realizará la fracturación y de las condiciones ambientales (presión y temperatura) en el lugar donde se realiza el proceso. Por otra parte, la forma de la fractura también se verá afectada por las características particulares en las que se realiza el proceso, aunque, generalmente, en este caso, son las propiedades del fluido (como la viscosidad) y las características del bombeo (caudal de fluido inyectado) las más relevantes.

Finalmente, cuando se deja de inyectar fluido, la presión comienza a disminuir y el propante que se encuentra dentro del fluido de fracturación comienza a actuar, apuntalando la fractura creada para evitar que la misma se cierre. Esta fractura, generada y apuntalada, actúa como un camino auxiliar a los poros naturales de la formación, que aumenta la permeabilidad de la roca (debido al aumento del número de conexiones entre diferentes poros y fracturas naturales), y permite que los hidrocarburos puedan fluir hacia el pozo de extracción.

## Capítulo 3

# Modelo Teórico del Problema

### 3.1 Descripción Física

En forma simplificada, el proceso de fracturación hidráulica puede describirse físicamente como la apertura, y posterior propagación, de una grieta en la roca, causada por tensiones generadas debido a un flujo de un fluido que se encuentra a muy altas presiones. Mientras la fractura se abre, el flujo avanza dentro de la roca, originando la propagación de la fisura en una dirección, determinada por las tensiones en la roca (Figura 3.1).

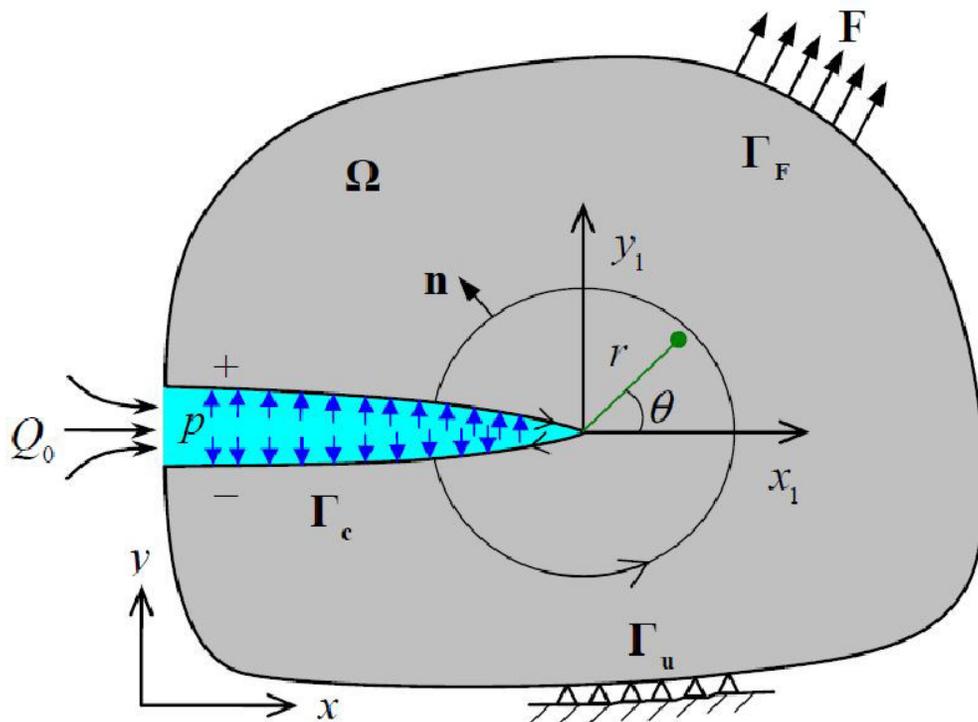


Figura 3.1: Problema de fracturación hidráulica simplificado. El fluido ejerce presión dentro de la roca, lo que causa la propagación de una fisura [5].

Sin embargo, existen ciertos fenómenos durante el proceso a tener en cuenta que la descripción anterior no tiene en cuenta y que tienen una influencia significativa en los resultados. Al ya mencionado efecto de *leak-off*, se le agrega el hecho de que la fractura tiende a resistir a abrirse debido a las tensiones de formación a que el flujo no es invíscido, lo que origina una caída de presión a lo largo de la fractura. Todos estos fenómenos deben encontrarse modelados de forma apropiada.

La resolución del problema de fracturación hidráulica consiste en hallar la apertura  $w(x,t)$  y el largo de la fractura  $a(t)$ , además de la distribución de presiones  $p(x,t)$  a lo largo de la misma. Para lograr esto, es necesario resolver, en cada instante de tiempo, las ecuaciones de la Mecánica de Fractura Lineal Elástica (LEFM), que determinan el los desplazamientos y las tensiones en la roca, y las ecuaciones simplificadas de *Navier-Stokes*, en particular, la ecuación de lubricación de Reynolds, la cual describe el flujo del fluido de un canal plano, asemejable a una fractura. Por otra parte, una vez resueltas estas ecuaciones, se debe calcular la dirección de propagación de la fisura utilizando los conceptos y criterios de LEFM. En las siguientes secciones se describirán estos modelos teóricos.

En este trabajo, se describe el problema utilizando el modelo de fractura KGD, el cual es bidimensional y *plane strain* y consiste en una grieta que se extiende en dirección transversal a la inyección de fluido, tal como se muestra en la Figura 3.1.

## 3.2 Mecánica del Sólido

### 3.2.1 Material

Los reservorios donde están confinados los hidrocarburos se encuentran formados por rocas. Las mismas son materiales frágiles y porosos, y, si bien, existen diferentes tipos y clasificaciones, todas tienen ciertas características en común. En particular, sus propiedades mecánicas, aunque diferentes, se encuentran en un rango que permite caracterizar todos los tipos como uno solo. Las rocas son materiales frágiles, es decir que su capacidad de absorber energía por deformación plástica bajo tracción antes de fracturarse es nula o muy baja.

Es importante destacar que los valores de porosidad entre diferentes tipos de rocas varían considerablemente, lo que lleva a que, dependiendo del material del reservorio, ocurran comportamientos diferentes para cada reservorio. Sin embargo, al analizar el problema en particular, se encuentra que los reservorios a considerar se caracterizan por ser muy poco permeables (por ser no convencionales), por lo que se modela el material como si no tuviera porosidad, algo que estrictamente no es correcto debido al efecto de *leak-off* mencionado anteriormente y a las fisuras preexistentes.

### 3.2.2 Problema Elástico

Como todo cuerpo sólido deformable, las rocas que componen un reservorio se rigen por las ecuaciones de la mecánica de sólidos. Para plantear el mismo, puede considerarse un cuerpo sólido deformable de volumen  $\Omega$  y superficie externa  $\Gamma$  con una discontinuidad  $\Gamma_d$  en su interior, como se muestra en la Figura 3.2. El mismo se comporta de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

- Ecuación de equilibrio:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

- Relación constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.2)$$

- Ecuación de compatibilidad:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (3.3)$$

Sujeto a las siguientes condiciones de borde:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \Gamma_t \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{t}}_d \quad \text{en } \Gamma_d \quad (3.5)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{en } \Gamma_u \quad (3.6)$$

donde  $\bar{\mathbf{u}}$  y  $\bar{\mathbf{t}}$  son desplazamientos y tracciones conocidas,  $\bar{\mathbf{n}}$  es el versor normal a las diferentes superficies, mientras que  $\bar{\mathbf{t}}_d$  es la tracción en la discontinuidad, la cual puede expresarse como:

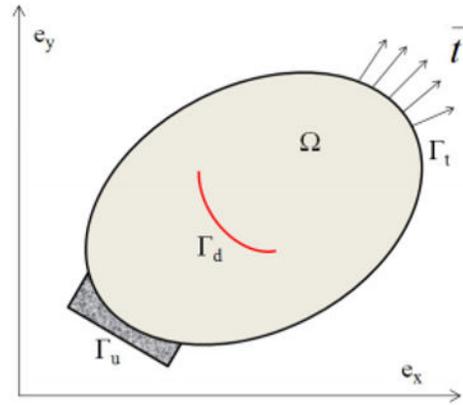


Figura 3.2: Modelo de sólido deformable con discontinuidad [6].

$$\bar{\mathbf{t}}_d = |\sigma_{coh} - p| \bar{\mathbf{n}} \quad (3.7)$$

siendo  $\sigma_{coh}$  es la tensión cohesiva, cuyo valor se encuentra descrito por una ley cohesiva.

### 3.2.3 Ley Cohesiva

Al analizar el comportamiento de un cuerpo con una fractura interna y, en particular, de la propagación de dicha fractura, es importante considerar la existencia de una ley cohesiva del material existente en las superficies de la fractura interna. Esta ley describe una tensión cohesiva en las superficies de la fractura, la cual tiende a impedir la apertura de la misma, y cuyo valor es función de la energía de Fractura  $\mathcal{G}_c$ , que es una constante del material.

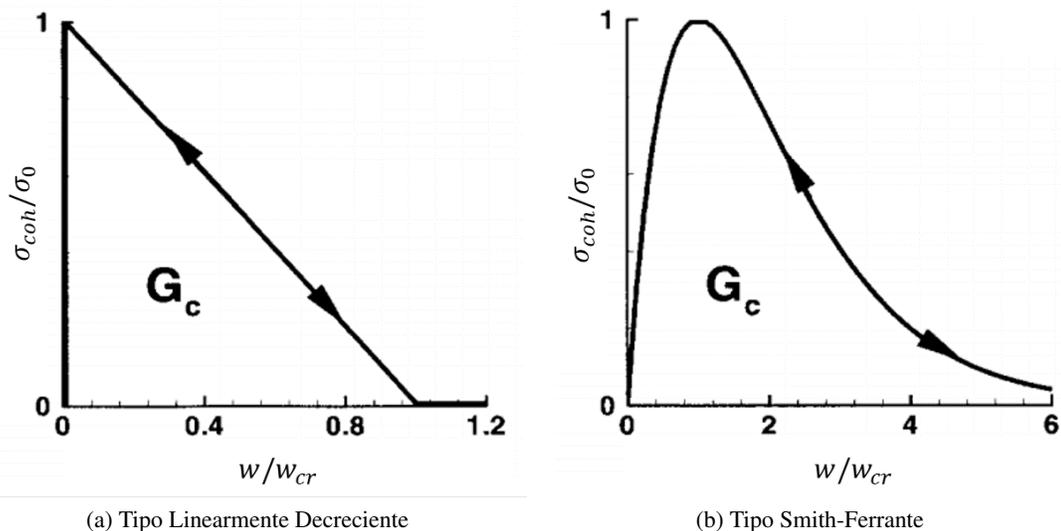


Figura 3.3: Diferentes tipos de leyes de tracción cohesiva [7].

Una de las características más importantes es que la ley cohesiva, no se aplica en toda la fractura, ya que existe una apertura crítica para la cual, a mayores aperturas, la tensión cohesiva se anula. Es por esto que

puede hablarse de una zona cohesiva, la cual se extiende desde el origen de la fractura, donde la apertura es nula, hasta la posición donde supera la apertura crítica. En la Figura 3.3, se muestran 2 ejemplos de leyes cohesivas y sus expresiones. Para este trabajo, se utiliza una ley cohesiva de tipo linear decreciente, de la forma:

$$\sigma_{coh} = \begin{cases} \sigma_0 - mw & w \in [0, w_{cr}] \\ 0 & w \notin [0, w_{cr}] \end{cases} \quad (3.8)$$

con  $m$  y  $\sigma_0$  constantes dependientes del material.

A partir de la ley cohesiva puede recuperarse el valor de la energía de Fractura del material como:

$$\mathcal{G}_c = \int_0^{w_{cr}} \sigma_{coh}(w)dw \quad (3.9)$$

Este parámetro representa la energía necesaria por unidad de superficie para poder propagar una fractura en un material, y luego será utilizada en este trabajo como criterio de propagación.

### 3.2.4 Principio de los Trabajos Virtuales

Considérese un cuerpo sólido de material frágil, elástico lineal, isotrópico y homogéneo con una discontinuidad como el que se muestra en la Figura 3.2, cuyo volumen  $\Omega$  se encuentra delimitado por la superficie  $\Gamma$ . Escribiendo la ecuación de equilibrio (3.1) para este cuerpo:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Donde  $\boldsymbol{\sigma}$  determina el tensor de tensiones, mientras que  $\mathbf{b}$  representa a las fuerzas de masa por unidad de volumen. Utilizando la notación de Einstein, se puede escribir la ecuación anterior como:

$$\sigma_{ij,j} + f_i^B = 0$$

Introduciendo un desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{u}_i$  e integrando, se obtiene:

$$\delta \mathbf{u}_i (\sigma_{ij,j} + f_i^B) = 0$$

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_i (\sigma_{ij,j} + f_i^B) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_i f_i^B d\Omega = 0 \quad (3.10)$$

Utilizando la propiedad  $(\delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij})_{,j} = \delta \mathbf{u}_{i,j} \sigma_{ij} + \delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij,j}$ :

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij,j} d\Omega = \int_{\Omega} [(\delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij})_{,j} - \delta \mathbf{u}_{i,j} \sigma_{ij}] d\Omega$$

Reemplazando en la ecuacion (3.10):

$$\int_{\Omega} [(\delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij})_{,j} - \delta \mathbf{u}_{i,j} \sigma_{ij}] d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_i f_i^B d\Omega = 0$$

Separando las integrales dentro del corchete:

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij})_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_i f_i^B d\Omega = 0 \quad (3.11)$$

Aplicando el Teorema de la divergencia para campos discontinuos<sup>2</sup>:

<sup>2</sup>  $\int_{\Omega} F_{i,i} d\Omega = \int_{\Gamma} F_i n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_d} [[F_i]] n_i d\Gamma$ , siendo  $F_i = u_i^V \sigma_{ij}$  y  $[[F_i]] = F^+ - F^-$  el salto en la discontinuidad.

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij})_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij} n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_d} [[\delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij}]] n_i d\Gamma$$

Reemplazando en la ecuación (3.11):

$$\int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij} n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_d} [[\delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij}]] n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_i f_i^B d\Omega = 0$$

Definiendo la superficie  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ :

$$\int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij} n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij} n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_d} [[\delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij}]] n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_i f_i^B d\Omega = 0$$

Sabiendo que  $\delta \mathbf{u}_i = 0$  en  $\Gamma_u$  y que  $\sigma_{ij} n_i = f_i^t$  en  $\Gamma_t$ , y reemplazando en la ecuación anterior:

$$\int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}_i f_i^t d\Gamma - \int_{\Gamma_d} [[\delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij}]] n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_i f_i^B d\Omega = 0 \quad (3.12)$$

Como el tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  es simétrico (es decir  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ), entonces, se tiene que:

$$\delta \mathbf{u}_{i,j} \sigma_{ij} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{u}_{i,j} + \delta \mathbf{u}_{j,i}) \sigma_{ij} = \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}$$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación (3.12):

$$\int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}_i f_i^t d\Gamma - \int_{\Gamma_d} [[\delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij}]] n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_i f_i^B d\Omega = 0$$

Reordenando los términos:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_i f_i^B d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}_i f_i^t d\Gamma - \int_{\Gamma_d} [[\delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij}]] n_i d\Gamma$$

Que puede escribirse en forma tensorial como:

$$\int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T \cdot \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{u})^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_d} [[(\delta \mathbf{u})^T \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}]] \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.13)$$

La ecuación anterior representa el Principio de los Trabajos Virtuales para un cuerpo con una fisura. En esta ecuación, el término de la izquierda representa el trabajo virtual de las fuerzas internas del cuerpo, los primeros 2 términos de la derecha representan el trabajo virtual de las fuerzas externas y el último término de la derecha es el trabajo virtual dentro de la fisura.

## 3.3 Mecánica del Fluido

### 3.3.1 Características del Fluido

Como se ha descrito anteriormente, el fluido de fracturación se encuentra compuesto de un 98-99.5% de agua, mientras que el 1.5-2% restante lo completan aditivos químicos que facilitan el proceso de fracturación. Por razones de simplificación, en este trabajo se modela el fluido de fracturación como un fluido de una sola fase, con las propiedades físicas del agua. Por otra parte, tampoco se ha incluido el transporte del material propante en el fluido, y su posterior decantación en las fracturas formadas.

El flujo se considera laminar debido a que, si bien las presiones y velocidades pueden ser altas, la turbulencia no afecta considerablemente el proceso. Por otra parte, debido a que no existen variaciones de densidad muy importantes, el flujo se considera incompresible y las propiedades del fluido se consideran constantes en todo el dominio durante todo el proceso.

### 3.3.2 Ecuación de Lubricación de Reynolds

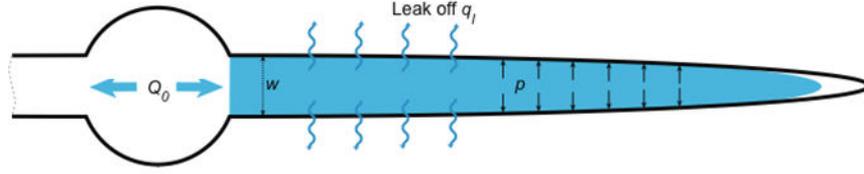


Figura 3.4: Volumen de control correspondiente al problema del fluido dentro de la fractura. [8].

El comportamiento del fluido, en cada instante de tiempo, dentro de la fractura puede modelarse de acuerdo a la teoría de lubricación de Reynolds (Figura 3.4). En particular, con las ecuaciones de conservación de masa y de momento lineal correspondientes a un flujo laminar de Poiseuille [15]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + q_l'' = -\frac{\partial q}{\partial s} \quad (3.14)$$

$$q = -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial s} \left( w^3 \frac{\partial p}{\partial s} \right) \quad (3.15)$$

En la primera ecuación,  $w$  es el ancho de la fractura,  $q$  es el caudal de fluido por unidad de área,  $q_l''$  es el caudal perdido por unidad de área o término de *leak-off* mientras que en la segunda ecuación,  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido. Esta ecuación se encuentra definida en un sistema de coordenadas donde  $s$  representa la dirección paralela y  $n$  la dirección perpendicular a la fractura. Combinando estas ecuaciones, es posible obtener la ecuación de lubricación correspondiente:

$$\begin{aligned} q_l'' &= \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{1}{12\mu} \left( w^3 \frac{\partial p}{\partial s} \right) \right] \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= +q_l'' + \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{1}{12\mu} \left( w^3 \frac{\partial p}{\partial s} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

tomando la viscosidad del fluido constante en todo el proceso:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = +q_l'' + \frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial s} \left[ w^3 \frac{\partial p}{\partial s} \right] \quad (3.17)$$

que puede escribirse como:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla \cdot \left[ \frac{w^3}{12\mu} \nabla \cdot p \right] + q_l'' = 0 \quad (3.18)$$

### 3.3.3 Caudal Perdido (*Leak-off*)

Existen distintos modelos para determinar el *leak-off* tales como el uso del coeficiente de *leak-off*, un valor constante de caudal perdido por unidad de longitud, o simplemente un caudal constante de valor negativo colocado en una posición en particular. En este trabajo, se utiliza un modelo que responde a la ley de Darcy, expresado como:

$$q_l'' = -2 \frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (3.19)$$

Donde  $\kappa$  es una constante que representa la permeabilidad de la roca y  $\mu$  es la viscosidad del material. El término  $\frac{\partial p}{\partial n}$  representa la variación de la presión en la dirección normal a la fractura, es decir a través de las superficies de la fractura. Al ser 2 las superficies de *leak-off*, se multiplica la expresión del caudal por 2. Respecto a este modelo, es importante destacar que el caudal perdido varía con la posición en la fractura, debido a su dependencia de la presión, y que su valor puede cambiar de signo, comportándose este término como una fuente o un sumidero.

### 3.4 Mecánica de Fractura

#### 3.4.1 Mecánica de Fractura Lineal Elástica

Partiendo de que la fractura se propagará hasta que se cumpla una condición de equilibrio energético del sistema (en este caso el cuerpo fracturado), se plantea la ecuación de conservación de la energía:

$$E = P + W_s$$

siendo  $E$  la energía total del sistema,  $P$  la energía potencial producida por las fuerzas internas y externas del sistema, y  $W_s$  el trabajo hecho al propagar la fractura. Derivando esta ecuación respecto de la variación de la superficie de la fractura ( $\partial A_c$ ):

$$\frac{\partial E}{\partial A_c} = \frac{\partial P}{\partial A_c} + \frac{\partial W_s}{\partial A_c}$$

Dado que se plantea esta ecuación en el estado de equilibrio, la energía del sistema se mantiene constante y, por lo tanto el término izquierdo de la ecuación anterior se anula:

$$0 = \frac{\partial P}{\partial A_c} + \frac{\partial W_s}{\partial A_c}$$

Es así que se introduce un parámetro energético para evaluar la propagación de fractura, la tasa de energía liberada, que se define como:

$$\mathcal{G} = -\frac{\partial P}{\partial A_c} = \frac{\partial W_s}{\partial A_c}$$

Utilizando este parámetro, es posible determinar una condición para la cual la fractura propagará, la cual puede escribirse como:

$$\mathcal{G}_c \leq \mathcal{G} \quad (3.20)$$

en esta condición,  $\mathcal{G}_c$  es llamada tasa de energía crítica, y se considera una propiedad del material, independiente de la geometría o de las cargas aplicadas.

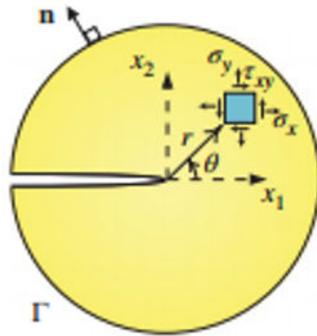


Figura 3.6: Coordenadas polares referidas al origen de la fractura. [6]

### 3.4.2 Factores de Intensidad de Tensiones

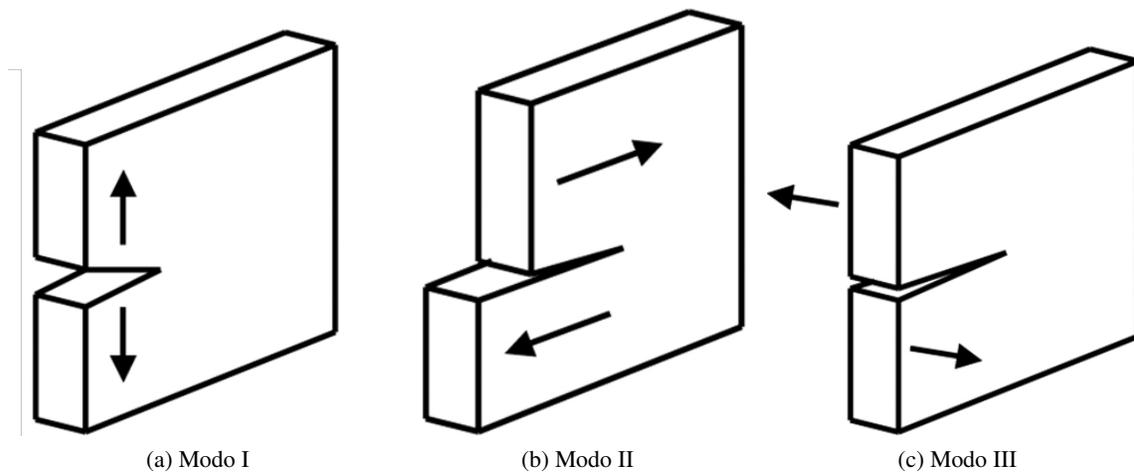


Figura 3.5: Modos de fractura.

Los Factores de Intensidad de Tensiones (o SIF) son 3 parámetros energéticos asociados a 3 modos de fractura distintos (Figura 3.5). Los mismos se encuentran expresados en coordenadas polares referidas al origen de la fractura (Figura 3.6), y se definen como:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}(r, 0)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yx}(r, 0)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yz}(r, 0)$$

En base a estos factores de intensidad de tensiones, Westergaard [16] y Williams [17] desarrollaron soluciones al campo de tensiones en las cercanías del origen de la fractura para los distintos modos, de la forma:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_l}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad l = [I, II, III]$$

En particular, la solución de Westergaard para el campo de desplazamientos y de tensiones se muestra en la Tabla 3.1. Esta solución tiene en cuenta un parámetro llamado constante de Kosolov cuyo valor es:

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{Plane Stress} \\ 3-4\nu & \text{Plane Strain} \end{cases}$$

	Campo de desplazamientos	Campo de tensiones
Modo I	$u_x = \frac{1+\nu}{4\pi E} K_I \sqrt{2\pi r} \left[ (2\kappa - 1) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$ $u_y = \frac{1+\nu}{4\pi E} K_I \sqrt{2\pi r} \left[ (2\kappa + 1) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$	$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$ $\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$ $\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
Modo II	$u_x = \frac{1+\nu}{4\pi E} K_{II} \sqrt{2\pi r} \left[ (2\kappa + 3) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$ $u_y = \frac{1+\nu}{4\pi E} K_{II} \sqrt{2\pi r} \left[ (2\kappa - 3) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$	$\sigma_{xx} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$ $\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$ $\sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$
Modo III	$u_z = \frac{2(1+\nu)}{\pi E} K_{III} \sqrt{2\pi r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0$ $\sigma_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ $\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Tabla 3.1: Solución de Westergaard para los campos de desplazamientos y tensiones.

Por otra parte, también es posible desarrollar una condición de propagación, o criterio de falla del material, basada en los SIF como:

$$K_c^2 \leq K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{E'}{2G} K_{III}^2$$

donde  $K_c$  es una propiedad del material llamada resistencia a la fractura y  $E'$  se define dependiendo el caso sea *Plain Stress* o *Plain Strain*:

$$E' = \begin{cases} E & \text{Plain Stress} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{Plain Strain} \end{cases}$$

### 3.4.3 Integral J

Cherpanow [18] y Rice [19] extendieron la definición de tasa de energía liberada, desarrollado por Griffith para materiales elásticos homogéneos e isotrópicos, introduciendo el concepto de Integral J para casos bidimensionales bajo pequeñas deformaciones. La misma se define como:

$$J = \int_{\Gamma} \left[ W dx_2 - T_i \frac{\partial u}{\partial x_1} ds \right] \quad (3.21)$$

donde  $W$  es la energía elástica liberada definida como  $W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ ,  $T_i = \sigma_{ij} n_j$ ,  $\Gamma$  una curva cerrada que encierra el origen de la fractura,  $x_1$  es la dirección tangente y  $x_2$  la dirección perpendicular a la fractura en el origen de la misma, tal como se muestra en la Figura (3.6). Esta integral representa una forma de medir la energía liberada durante la ampliación de una grieta, y su valor es independiente de la curva  $\Gamma$ , siempre y cuando la misma encierre el origen de la fractura. El primer término de la integral representa el incremento

neto de la deformación elástica dentro del área delimitada por  $\Gamma$ , mientras que el segundo término representa el trabajo total realizado por las fuerzas que actúan sobre el contorno  $\Gamma$  durante el desplazamiento  $ds$  [20]. Físicamente, este concepto describe el cambio de energía de deformación por unidad de espesor para un aumento infinitesimal de la longitud de la grieta. La Integral J también puede escribirse como:

$$J = \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (3.22)$$

### 3.4.4 Relación entre Parámetros Energéticos

Se ha demostrado que, para casos de fractura bajo modos mixtos bajo condiciones elásticas, existe una relación entre los valores de los parámetros energéticos antes descritos. Irwin demostró que el concepto de SIF se relaciona con la tasa de energía liberada mediante la ecuación:

$$\mathcal{G} = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{(1 + \nu)K_{III}^2}{E} \quad (3.23)$$

Por otra parte, Rice demostró que el valor de la Integral J es igual al de la tasa de energía liberada  $\mathcal{G}$ , para fracturas en sólidos elásticos. Es por esto, que es posible relacionar la integral  $J$ , los factores  $K_I$ ,  $K_{II}$  y  $K_{III}$  y la tasa de energía liberada  $\mathcal{G}$  como:

$$\mathcal{G} = J = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{(1 + \nu)K_{III}^2}{E} \quad (3.24)$$

### 3.4.5 Cálculo de Parámetros Energéticos

Para poder evaluar una condición de propagación para casos con modos mixtos de fractura en 2 dimensiones, se utiliza un método llamado *Método de la Integral de Interacción* [21]. En este método, se parte de un estado de desplazamientos, deformaciones y tensiones arbitrario y se descompone en 2 estados diferentes:

$$u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)} \quad (3.25)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \quad (3.26)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \quad (3.27)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.25), (3.26) y (3.27) en la definición de Integral  $J$  de la ecuación (3.22):

$$J^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} \left( \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \right) \left( \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \right) \delta_{1j} - \left( \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( u_i^{(1)} + u_i^{(2)} \right) \right] n_j d\Gamma \quad (3.28)$$

Operando, se puede llegar a escribir la expresión anterior como:

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)} \quad (3.29)$$

Donde  $M^{(1,2)}$ , es la integral de interacción entre los estados (1) y (2), se escribe como:

$$M^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left[ W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (3.30)$$

En la ecuación anterior,  $W^{(1,2)}$  es la densidad de energía de interacción, un concepto que se define como:

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}$$

Utilizando las ecuaciones (3.24) y (3.29), se puede llegar a la relación:

$$M^{(1,2)} = \frac{2}{E'} \left( K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \quad (3.31)$$

Dado que el desarrollo anterior es válido para cualquier estado de tensiones, se eligen los estados (1) y (2) de manera apropiada. Es así que, mediante este desarrollo, se realiza el siguiente procedimiento:

- Eligiendo como estado (1) el estado de tensiones correspondiente a un modo de fractura mixto y el estado (2) a un estado de tensiones correspondiente a un modo de fractura  $I$ , puede calcularse el  $K_I$  correspondiente al estado (1), partiendo de la ecuación (3.31), como:

$$M^{(1,I)} = \frac{2}{E'} \left( K_I^{(1)} K_I^{(I)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(I)} \right)$$

$$M^{(1,I)} = \frac{2}{E'} \left( K_I^{(1)} \cdot 1 + K_{II}^{(1)} \cdot 0 \right)$$

$$M^{(1,I)} = \frac{2}{E'} K_I^{(1)}$$

$$K_I^{(1)} = \frac{E'}{2} M^{(1,I)}$$

- Eligiendo como estado (1) el estado de tensiones correspondiente a un modo de fractura mixto y el estado (2) a un estado de tensiones correspondiente a un modo de fractura  $II$ , puede calcularse el  $K_{II}$  correspondiente al estado (1), partiendo de la ecuación (3.31), como:

$$M^{(1,II)} = \frac{2}{E'} \left( K_I^{(1)} K_I^{(II)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(II)} \right)$$

$$M^{(1,II)} = \frac{2}{E'} \left( K_I^{(1)} \cdot 0 + K_{II}^{(1)} \cdot 1 \right)$$

$$M^{(1,II)} = \frac{2}{E'} K_{II}^{(1)}$$

$$K_{II}^{(1)} = \frac{E'}{2} M^{(1,II)}$$

Con los valores  $K_I^{(1)}$  y  $K_{II}^{(1)}$  calculados, es posible utilizar la ecuación (3.23) para calcular la tasa de energía liberada  $\mathcal{G}$  como:

$$\mathcal{G} = \frac{K_I^{(1)} + K_{II}^{(1)}}{E'} \quad (3.32)$$

### 3.4.6 Propagación de la Fractura

Una vez conocidos los parámetros energéticos, es necesario saber si la fractura existente puede propagarse, y, si esto es posible, en qué dirección. Para saber esto, en primer lugar, se utiliza la condición de propagación:

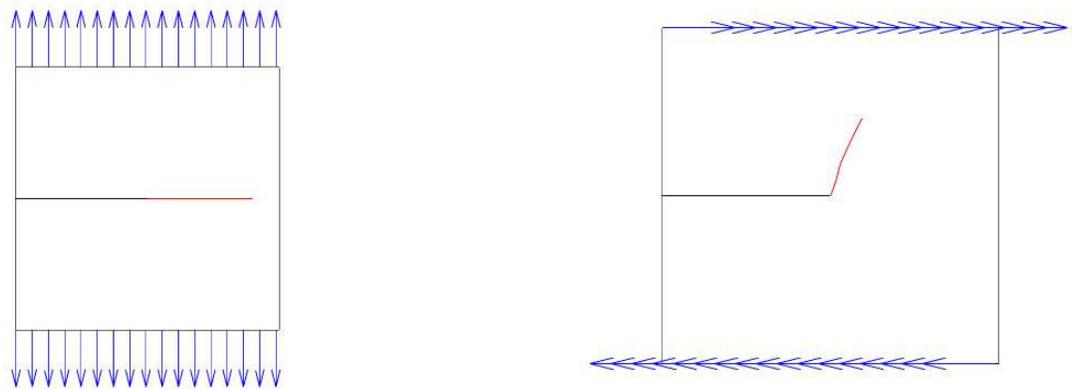
$$\mathcal{G}_c \leq \mathcal{G} \quad (3.33)$$

### 3.4.7 Dirección de la Fractura

En caso de cumplirse la condición anterior, es necesario conocer la dirección de propagación. Para esto, existen distintos criterios [22] tales como los locales, basados en los valores de los campos de tensiones o deformaciones en las cercanías del origen de la fractura (MCSC<sup>3</sup>, MSC<sup>4</sup>), los globales, basados en la distribución de energía a lo largo de la fractura (MSERRC<sup>5</sup>), o los mixtos, que utilizan parte de los 2 enfoques anteriores (MFC<sup>6</sup>, MSED<sup>7</sup>). En este trabajo, se utiliza el MCSC [23], o criterio de máxima tensión circunferencial, desarrollado por Erdogan y Sih, el cual determina el ángulo de propagación de la fractura basandose en los SIF como:

$$\theta_c = 2 \arctan \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right] \quad (3.34)$$

En la ecuación anterior, el ángulo  $\theta_c$  se mide en radianes en el sistema de coordenadas polares referidos a la fractura mostrado en la Figura 3.6. En la Figura 3.7, se muestra la propagación para modos  $K_I$  y  $K_{II}$  puro. Se observa que para el primero, como es de esperar, el ángulo  $\theta_c$  es igual a 0, mientras que para el modo  $K_{II}$  puro, el ángulo obtenido por el criterio MCSC es de  $70,5^\circ$ .



(a) Propagación correspondiente a un modo I puro.

(b) Propagación correspondiente a un modo II puro.

Figura 3.7: Ángulos de propagación correspondientes a modos  $K_I$  y  $K_{II}$  puro.

<sup>3</sup>Maximum Circumferential Stress Criterion

<sup>4</sup>Maximum Strain Criterion

<sup>5</sup>Maximal Strain Energy Release Rate Criterion

<sup>6</sup>Material Forces Criterion

<sup>7</sup>Minimal Strain Energy Density Criterion

# Capítulo 4

## Modelo Numérico del Sólido

### 4.1 Partición de la Unidad (PU)

El concepto de Partición de la Unidad está basado en la idea de cubrir el dominio  $\Omega$  de la solución de un Problema de Valores de Frontera con subdominios  $\Omega_i$  de geometría arbitraria centrados en nodos  $\mathbf{x}_i$ . De esta manera, el dominio de la solución se define como:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i \quad (4.1)$$

Con esta idea en mente, puede definirse una Partición de Unidad como una colección de funciones globales  $f_i(\mathbf{x})$  asociadas a los diferentes dominios  $\Omega_i$ , que cumplen con la condición:

$$\sum_{i=1}^N f_i(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.2)$$

En base a esta definición, se demuestra que para una función  $g(\mathbf{x})$  definida en el dominio  $\Omega$ , se cumple que:

$$\sum_{i=1}^N f_i(\mathbf{x})g(\mathbf{x}_i) \cong g(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

En particular, si  $f_i(\mathbf{x}) = N_i(\mathbf{x})$ , las funciones de forma standard del FEM, y  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ , se obtiene la aproximación por el Método de Elementos Finitos:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cong \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}_i \quad (4.4)$$

### 4.2 Enriquecimiento de una Solución

El enriquecimiento de una solución consiste en mejorar una solución aproximada basándose en las características particulares del problema a resolver. De esta manera, si se conoce localmente una solución analítica del problema o del comportamiento que debería tener la solución, pueden agregarse términos que se asemejen a la solución exacta:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x}) \left[ \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^M p_j(\mathbf{x})\mathbf{a}_{ij} \right] \quad (4.5)$$

La ecuación anterior representa la aproximación mediante el llamado PUFEM (Partition of Unity Finite Element Method) [12], en el cual a la aproximación FEM se le agregan las funciones  $p_j(\mathbf{x})$ , que se asemejan a la solución exacta y enriquecen la solución. Esto se puede ver de forma más clara al escribir la ecuación anterior como una suma entre la solución por FEM y un término enriquecido:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P N_i(\mathbf{x})p_j(\mathbf{x})\bar{\mathbf{a}}_{ij} \quad (4.6)$$

El enriquecimiento de una solución puede darse de forma intrínseca o extrínseca, de acuerdo a si se modifica la base de funciones o si se agregan nuevos grados de libertad.

#### 4.2.1 Enriquecimiento intrínseco

El enriquecimiento intrínseco mejora la solución aproximada utilizando una nueva base de funciones  $\tilde{N}_i(\mathbf{x})$ , la cual se obtiene mediante cuadrados mínimos:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \tilde{N}_i(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}_i \quad (4.7)$$

Con el enriquecimiento intrínseco, si bien se mantiene el número de grados de libertad, el costo computacional aumenta considerablemente debido a los cálculos que son necesarios para la obtención de la nueva base de funciones.

#### 4.2.2 Enriquecimiento extrínseco

Este procedimiento mejora la solución aproximada agregándole nuevos términos, los cuales se encuentran asociados a nuevos grados de libertad, lo que implica un aumento del costo computacional. El enriquecimiento extrínseco puede darse de forma global (PUFEM, GFEM), enriqueciendo todo el dominio de la solución, o de forma local, donde sólo se enriquece en las cercanías de la discontinuidad (XFEM):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}_i + \sum_{k=1}^P \sum_{j=1}^{M_k} N_j(\mathbf{x})\psi_k(\mathbf{x})\bar{\mathbf{a}}_{ij} \quad (4.8)$$

Los métodos con enriquecimiento local permiten minimizar el aumento del costo computacional, dado que sólo se le agregarán grados de libertad en las regiones específicas, en lugar de hacerlo en todo el dominio. Sin embargo, esta reducción no es gratuita, ya que aparecen regiones donde nodos enriquecidos y no enriquecidos forman parte de un mismo elemento (*blending elements*), lo que lleva a una tasa de convergencia un poco menor. En este trabajo, no se han modificado estos elementos, por lo que los mismos presentan nodos enriquecidos (aquellos que también pertenecen a un elemento enriquecido) y nodos sin enriquecer.

### 4.3 Aproximación XFEM

El XFEM (eXtended Finite Element Method) [14] es un método de resolución de ecuaciones diferenciales que extiende el campo de aplicación del FEM clásico a funciones y dominios discontinuos. Este método está basado en el Método de Partición de la Unidad (PUFEM) y consiste en un enriquecimiento extrínseco de forma local, es decir, sólo en las regiones cercanas a la discontinuidad. Una de las características más importantes de este método es que, si bien el enriquecimiento es local, permite modelar discontinuidades independientemente del mallado a utilizar lo que lo hace ideal para resolver problemas donde las discontinuidades varían con el tiempo.

Para entender esta técnica, se considera un dominio  $\Omega$ , con una discontinuidad  $\Gamma_d$  sobre el cual se define una función  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , la cual puede ser discontinua sobre  $\Gamma_d$ , para la cual se quiere construir una aproximación mediante Elementos Finitos. Si es posible conocer en forma aproximada el comportamiento de la función cerca de la discontinuidad, puede escribirse la aproximación XFEM como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}_i + \sum_{j=1}^M N_j(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{a}}_j \quad (4.9)$$

donde  $\psi(x)$  es una función o una base de funciones que se asemeja a la solución analítica del problema a resolver.

### 4.3.1 Descripción de las discontinuidades

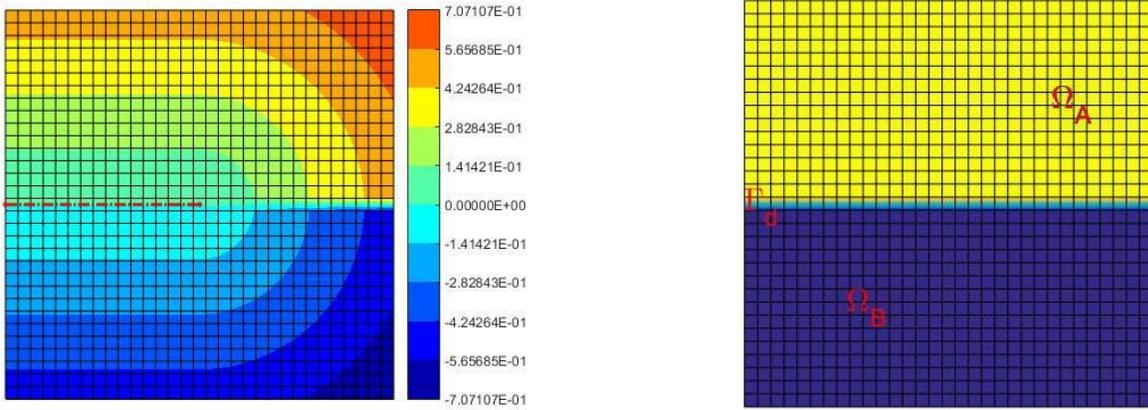
Para describir matemáticamente las discontinuidades se utilizan las llamadas *level-set functions* o conjuntos de nivel. En base a estas funciones es posible dividir el dominio en regiones de acuerdo a las discontinuidades existentes, dado que las mismas tienen distintos valores en cada uno de los subdominios que generan. Como ejemplo, si se tiene una discontinuidad como puede ser una fractura  $\Gamma_d$  a lo largo del dominio  $\Omega$ , se puede definir la función:

$$\phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \operatorname{sgn}(n_{\Gamma_d} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*))$$

donde  $\mathbf{x}^*$  al punto sobre la discontinuidad  $\Gamma_d$  más cercano a  $\mathbf{x}$  (la proyección de  $\mathbf{x}$  sobre  $\Gamma_d$ ). Esta función define 2 subdominios  $\Omega_A$  y  $\Omega_B$  donde:

$$\phi(\mathbf{x}) \begin{cases} > 0 & \mathbf{x} \in \Omega_A \\ = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma_d \\ < 0 & \mathbf{x} \in \Omega_B \end{cases} \quad (4.10)$$

Es muy importante resaltar que estas funciones dependen exclusivamente de la geometría del dominio por lo que permiten describir las discontinuidades y definir las regiones a enriquecer independiente de la malla que se utilice.



(a) Valores de  $\phi(\mathbf{x})$  para una discontinuidad lineal

(b) Subdivisión del dominio de acuerdo a  $\phi(\mathbf{x})$ .

Figura 4.1: *Level-set function*  $\phi(\mathbf{x})$

### 4.3.2 Funciones de enriquecimiento

Para cualquier caso, dependiendo de cual sea la discontinuidad en cada región a enriquecer, la base de funciones de enriquecimiento variará para capturar el efecto local de cada discontinuidad en particular. Las

bases de funciones a utilizar son elegidas de acuerdo al tipo de discontinuidad a modelar. Como ejemplo, pueden enumerarse:

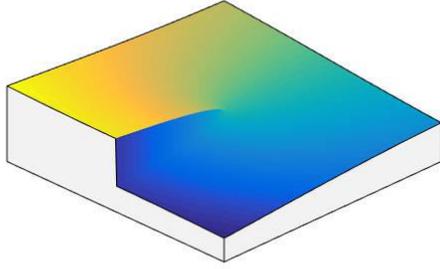
- Discontinuidades lineales (Fracturas): Para un dominio donde exista una discontinuidad lineal puede utilizarse una función Heaviside signo para definir los puntos a un lado y a otro de la discontinuidad:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & \phi(\mathbf{x}) < 0 \\ 0 & \phi(\mathbf{x}) = 0 \\ 1 & \phi(\mathbf{x}) > 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

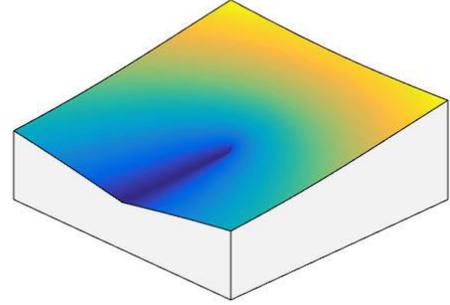
- Fractura lineal elástica: Para el caso de una fractura lineal elástica, pueden enriquecerse los elementos atravesados completamente por la discontinuidad con la función Heaviside signo, como en cualquier discontinuidad lineal. Sin embargo, aquellos elementos parcialmente atravesados por la fractura no pueden enriquecerse de la misma manera. Dado que estos elementos contienen el extremo de la fractura o *Crack Tip*, se enriquecen con una base de funciones que tenga en cuenta el campo de desplazamientos en las cercanías del *Crack Tip*. Para esto, se utiliza una base de funciones basada en la solución de *Westergaard* para el campo de desplazamientos (Tabla 3.1):

$$\psi_I(r, \theta) = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\} \quad (4.12)$$

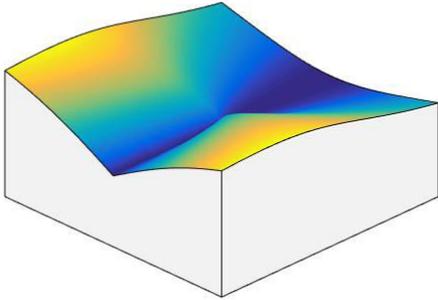
Estas funciones se encuentran definidas en un sistema de coordenadas polares alineado con a fractura con centro en el *Crack Tip*. En la Figura (4.2), puede observarse que  $\psi_1(r, \theta) = \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$  es discontinua en las cercanías del *Crack Tip*.



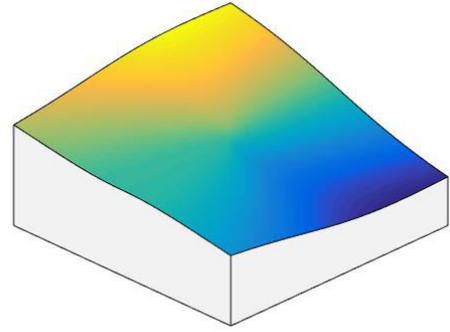
(a)  $\psi_1(r, \theta) = \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$



(b)  $\psi_2(r, \theta) = \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$



(c)  $\psi_3(r, \theta) = \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta)$



(d)  $\psi_4(r, \theta) = \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta)$

Figura 4.2: Base de Funciones de Enriquecimiento Crack Tip.

Para cualquier función de enriquecimiento a utilizar, es necesario realizar una modificación. Si se escribe la base de funciones de enriquecimiento como  $\psi_k$ , el valor del campo  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  en un nodo  $i$  puede escribirse como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) = \bar{\mathbf{u}}_i + \psi(\mathbf{x}_i) \bar{\mathbf{a}}_i$$

Como el valor de  $\psi(\mathbf{x}_i)$  no es necesariamente nulo, la expresión anterior puede ser diferente del valor nodal del campo  $\bar{\mathbf{u}}_i$ , por lo que se corrige la aproximación XFEM restándole a las funciones de enriquecimiento su valor en el nodo asociado a las mismas. De esta manera, la aproximación XFEM queda definida como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}_i + \sum_{j=1}^M N_j(\mathbf{x}) (\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_j)) \bar{\mathbf{a}}_j \quad (4.13)$$

Que, escribiendo las funciones de enriquecimiento asociadas a un nodo  $j$  como  $\bar{\psi}_j(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_j)$ , se puede expresar como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}_i + \sum_{j=1}^M N_j(\mathbf{x}) \bar{\psi}_j(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{a}}_j \quad (4.14)$$

### 4.3.3 Discretización

Una vez definida la región a enriquecer y las funciones de enriquecimiento, el paso siguiente es discretizar la ecuación del problema:

$$\int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T \cdot \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{u})^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_d} \left[ [(\delta \mathbf{u})^T \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}] \right] \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

La aproximación XFEM del campo desplazamientos viene dada por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}_i + \sum_{j=1}^M N_j(\mathbf{x}) \bar{\psi}_j(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{a}}_j \quad (4.15)$$

que también puede escribirse como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^{std}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{N}^{enr}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{D}} \quad (4.16)$$

donde:

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_i^{std}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} N_i(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & N_i(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_j^{enr}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} N_j(\mathbf{x}) (\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_j)) & 0 \\ 0 & N_j(\mathbf{x}) (\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_j)) \end{bmatrix}$$

En base a esta aproximación, es posible aplicar el método XFEM para aproximar el campo de deformaciones como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[ \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}_i + \sum_{j=1}^M N_j(\mathbf{x}) \bar{\psi}_j(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{a}}_j \right]$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \bar{\mathbf{u}}_i + \sum_{j=1}^M \left[ \frac{\partial N_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_j)) + N_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_j)) \right] \bar{\mathbf{a}}_j$$

Que puede escribirse como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{std}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{B}^{enr}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{D}} \quad (4.17)$$

donde  $\mathbf{B} = [ \mathbf{B}^{std} \quad \mathbf{B}^{enr} ]$  para un caso en dos dimensiones:

$$\mathbf{B}_i^{std}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_j^{enr}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial [N_j(\mathbf{x})(\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_j))]}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial [N_j(\mathbf{x})(\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_j))]}{\partial y} \\ \frac{\partial [N_j(\mathbf{x})(\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_j))]}{\partial y} & \frac{\partial [N_j(\mathbf{x})(\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_j))]}{\partial x} \end{bmatrix}$$

De manera similar, pueden aproximarse  $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$  y  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ , escribiendo los mismos como:

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^{std}(\mathbf{x}) \delta \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{N}^{enr}(\mathbf{x}) \delta \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \delta \bar{\mathbf{D}} \quad (4.18)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{std}(\mathbf{x}) \delta \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{B}^{enr}(\mathbf{x}) \delta \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \delta \bar{\mathbf{D}} \quad (4.19)$$

Reemplazando estas aproximaciones en la ecuación 3.13:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{B}(\mathbf{x}) \delta \bar{\mathbf{D}})^T : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{N}(\mathbf{x}) \delta \bar{\mathbf{D}})^T \bar{\mathbf{b}} \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\mathbf{N}(\mathbf{x}) \delta \bar{\mathbf{D}})^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_d} \left[ [(\mathbf{N}(\mathbf{x}) \delta \bar{\mathbf{D}})^T \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}] \right] \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

Operando, se obtiene:

$$\int_{\Omega} \delta \bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{B}^T : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \left[ [\delta \bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{N}^T \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}] \right] \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0$$

Como  $\delta \bar{\mathbf{D}}^T$  es independiente del dominio, el mismo puede salir de las integrales:

$$\delta \bar{\mathbf{D}}^T \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \left[ [\mathbf{N}^T \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}] \right] \cdot \mathbf{n} d\Gamma \right\} = 0$$

Como el término  $\delta \bar{\mathbf{D}}^T$  es una función arbitraria, para cumplir la ecuación anterior es necesario que el término entre llaves sea igual a cero, es decir:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \left[ [\mathbf{N}^T \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}] \right] \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0$$

Introduciendo la relación constitutiva  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\mathbf{B}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{D}}$  y reemplazándola en el primer término de la ecuación anterior:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \bar{\mathbf{D}} - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \left[ [\mathbf{N}^T \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}] \right] \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0$$

Esta última ecuación puede escribirse como:

$$\mathbf{K} \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_d \quad (4.20)$$

donde:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{B}^{stdT} \mathbf{C} \mathbf{B}^{std} d\Omega & \int_{\Omega} \mathbf{B}^{stdT} \mathbf{C} \mathbf{B}^{enr} d\Omega \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^{enrT} \mathbf{C} \mathbf{B}^{std} d\Omega & \int_{\Omega} \mathbf{B}^{enrT} \mathbf{C} \mathbf{B}^{enr} d\Omega \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_b = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} d\Omega$$

$$\mathbf{F}_t = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma$$

$$\mathbf{F}_d = - \int_{\Gamma_d} \left[ [\mathbf{N}^T \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}] \right] \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

### 4.3.4 Implementación Numérica

En este trabajo, se implementa el método XFEM utilizando una formulación isoparamétrica de elementos Q4. De esta manera, las funciones de forma standard  $N_i$  en coordenadas isoparamétricas pueden escribirse como:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i)$$

siendo el par  $(\xi_i, \eta_i)$  las coordenadas isoparamétricas del nodo  $i$ , asociado a la función de forma  $N_i$ .

Como en el FEM clásico, la integración numérica de la matriz de rigidez se realiza mediante una Cuadratura de Gauss. En forma resumida, este método permite aproximar una integral en dos dimensiones como:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i, \eta_i)$$

donde  $(\xi_i, \eta_i)$  corresponden a la posición del punto de Gauss  $i$  en el espacio natural y  $w_i(\xi_i, \eta_i)$  el peso asociado a ese punto de Gauss. Este método se aplica de manera diferente dependiendo de si un elemento es cortado (o no) por la discontinuidad:

- Elementos no Cortados por la discontinuidad:

Para estos elementos, la integración se realiza mediante una Cuadratura de Gauss simple en toda el área del elemento.

- Elementos Cortados por la discontinuidad:

Estos elementos deben subdividirse en triángulos alineados con la discontinuidad para poder realizar correctamente la Cuadratura de Gauss. Una vez subdivididos, se integra numéricamente, mediante la Cuadratura de Gauss, en cada triángulo.

Es necesario tener en cuenta que para calcular el valor de las funciones de enriquecimiento en los puntos de Gauss, es necesario mapear los mismos desde las coordenadas naturales a las estructurales. Si bien el mapeo del espacio estructural al natural es relativamente sencillo cuando se conocen las funciones de forma, como se mostró en la sección anterior, la transformación inversa resulta más compleja, y solo puede realizarse teniendo en cuenta ciertas consideraciones geométricas de los puntos a mapear [24].

## 4.4 Aplicación del método XFEM al caso particular

### 4.4.1 Enriquecimiento

Para el caso que se modela en este trabajo, es necesario enriquecer la solución con 2 bases de funciones dependiendo de si los elementos son cortados total o parcialmente por la discontinuidad:

- Enriquecimiento *Crack Tip*:

En primer lugar, se define el conjunto  $N^{CT}$  de los elementos parcialmente cortados por la discontinuidad. Este conjunto contiene a todos los elementos cuyos bordes se intersecan con la discontinuidad una sola vez. Físicamente esto implica que los elementos de este conjunto contienen el inicio o fin de una fractura (el *Crack Tip*). Los nodos pertenecientes a los elementos de este conjunto se enriquecen con la base de funciones *Crack Tip* definida anteriormente en la ecuación 4.12.

- Enriquecimiento Heaviside:

Como en el caso anterior, se define el conjunto  $N^H$  como el conjunto de los elementos cortados totalmente por la discontinuidad, es decir que la discontinuidad cruza los límites del elemento 2 veces. De esta manera, los elementos pertenecientes a este conjunto quedan divididos en 2 partes por la discontinuidad. A los nodos pertenecientes a estos elementos, se los enriquece con la función Heaviside definida en la ecuación 4.11.

Un detalle importante a destacar es que cada nodo puede enriquecerse únicamente por una sola base de funciones. Es por esto que se define que aquellos nodos pertenecientes a elementos de los conjuntos  $N^{CT}$  y  $N^H$  simultáneamente se los enriquece con la base de funciones *Crack Tip*. Con los enriquecimientos definidos, puede expresarse la aproximación del campo de desplazamientos y de deformaciones como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}_i + \sum_{j=1}^{N^H} N_j(\mathbf{x}) \bar{H}_j(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{a}}_j + \sum_{k=1}^{N^{CT}} \sum_{l=1}^4 N_k(\mathbf{x}) \bar{F}_{kl}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{b}}_{kl}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N B_i(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}_i + \sum_{j=1}^{N^H} B_j(\mathbf{x}) \bar{H}_j(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{a}}_j + \sum_{k=1}^{N^{CT}} \sum_{l=1}^4 B_k(\mathbf{x}) \bar{F}_{kl}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{b}}_{kl}$$

Que en forma matricial puede escribirse como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{std}(\mathbf{x}) & \mathbf{N}^H(\mathbf{x}) & \mathbf{N}^{CT}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{std}(\mathbf{x}) & \mathbf{B}^H(\mathbf{x}) & \mathbf{B}^{CT}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

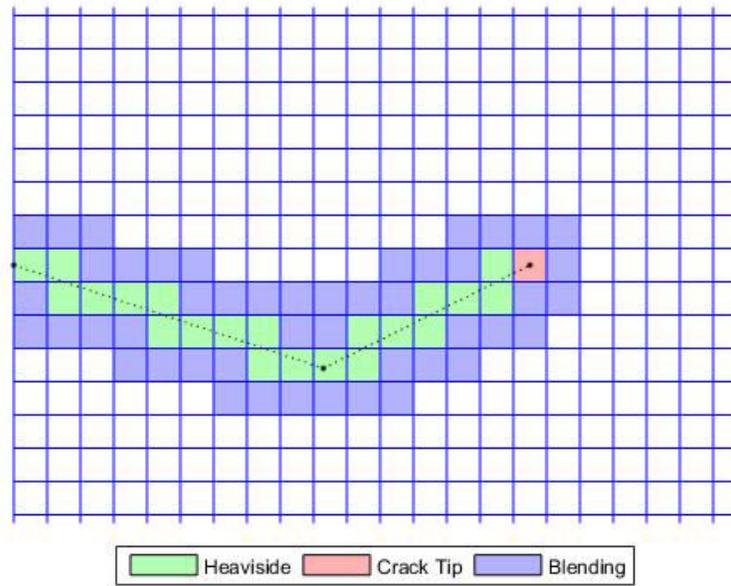


Figura 4.3: Elementos enriquecidos.

#### 4.4.2 Desarrollo del término en la discontinuidad

En el método XFEM simple, el término que describe las cargas en la discontinuidad generalmente se anula debido a que se supone como condición de borde que la tensión en la discontinuidad es nula. Sin embargo, para el caso particular que se trata en este trabajo, al existir una presión interna (debido al fluido) y tensiones cohesivas, el término  $F_d$  debe desarrollarse cuidadosamente. En primer lugar, se parte de la ecuación:

$$\mathbf{F}_d = - \int_{\Gamma_d} [[\mathbf{N}^T \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}]] \cdot \mathbf{n}_d d\Gamma$$

Desarrollando el operador Salto:

$$\mathbf{F}_d = - \int_{\Gamma_{d+}} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_d d\Gamma + \int_{\Gamma_{d-}} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_d d\Gamma \quad (4.23)$$

El producto  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  define la tracción normal en cada uno de los bordes. La misma viene dada por la ecuación 3.7 e involucra la tracción cohesiva y la presión del fluido:

$$\mathbf{t}_d = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{coh} - \bar{p}) \mathbf{n}_d$$

Reemplazando en la ecuación 4.23:

$$\mathbf{F}_d = - \int_{\Gamma_{d+}} \mathbf{N}^T (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{coh} - \bar{p}) \mathbf{n}_d d\Gamma + \int_{\Gamma_{d-}} \mathbf{N}^T (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{coh} - \bar{p}) \mathbf{n}_d d\Gamma$$

De acuerdo a la ecuación 3.8, la tensión cohesiva se modela como una función de la separación  $h$  del campo de desplazamientos. Esta separación puede calcularse utilizando el método XFEM como:

$$h(\mathbf{x}) = [[\mathbf{u}(\mathbf{x})]] = [[\mathbf{N}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{D}}]] = [[\mathbf{N}(\mathbf{x})]] \bar{\mathbf{D}}$$

Reemplazando esta expresión de la separación en la expresión de la ley cohesiva:

$$\boldsymbol{\sigma}_{coh} = \boldsymbol{\sigma}_0 - m [[\mathbf{N}]] \bar{\mathbf{D}}$$

Y reemplazando esta última en la expresión del término  $\mathbf{F}_d$ :

$$\mathbf{F}_d = - \int_{\Gamma_{d+}} \mathbf{N}^T (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 - m [[\mathbf{N}]] \bar{\mathbf{D}} - p) \mathbf{n}_d d\Gamma + \int_{\Gamma_{d-}} \mathbf{N}^T (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 - m [[\mathbf{N}]] \bar{\mathbf{D}} - p) \mathbf{n}_d d\Gamma$$

Desarrollando la expresión anterior:

$$\mathbf{F}_d = - \int_{\Gamma_d} [[\mathbf{N}^T (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{coh} - \bar{p})]] \mathbf{n}_d d\Gamma + \int_{\Gamma_d} [[\mathbf{N}^T m [[\mathbf{N}]]]] \mathbf{n}_d d\Gamma \bar{\mathbf{D}}$$

En la ecuación anterior, al ser valores nodales, término  $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{coh} - \bar{p})$  puede salir del operador salto, mientras que el valor  $m$  de la segunda integral, al ser una constante puede ubicarse fuera de la integral:

$$\mathbf{F}_d = \int_{\Gamma_d} [[\mathbf{N}^T]] (\bar{p} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{coh}) \mathbf{n}_d d\Gamma + m \int_{\Gamma_d} [[\mathbf{N}^T]] [[\mathbf{N}]] \mathbf{n}_d d\Gamma \bar{\mathbf{D}} \quad (4.24)$$

Renombrando los términos como:

$$\mathbf{F}_p = \int_{\Gamma_d} [[\mathbf{N}^T]] (p - \boldsymbol{\sigma}_0) \mathbf{n}_d d\Gamma \quad (4.25)$$

$$\mathbf{K}_{coh} = -m \int_{\Gamma_d} [[\mathbf{N}^T]] [[\mathbf{N}]] \mathbf{n}_d d\Gamma \quad (4.26)$$

Lo que permite reescribir la ecuación 4.20 como:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_{coh}) \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_p \quad (4.27)$$

Esta última ecuación es la ecuación particular del problema a resolver.

### 4.4.3 Cálculo de la Matriz de Rigidez

Para calcular la matriz de rigidez, como se explicó anteriormente, es necesario subdividir los elementos a enriquecer en regiones alineadas con la discontinuidad. Para esto, se realiza una subdivisión en triángulos utilizando una Triangulación de Delaunay, basada en los vértices del elemento, los puntos donde la discontinuidad cruza los bordes del elemento y, en caso de existir, los puntos de quiebre o cambio de dirección de la discontinuidad. De esta manera, los elementos afectados pueden subdividirse en 4, 5 o hasta 6 triángulos:

- 4 triángulos: elementos atravesados por la discontinuidad en línea recta (Tipo *Lineal*).
- 5 triángulos: elementos que contienen un *Crack Tip* (Tipo *Crack Tip*).
- 6 triángulos: elementos donde ocurre un cambio de dirección en la discontinuidad (Tipo *Lineal*).

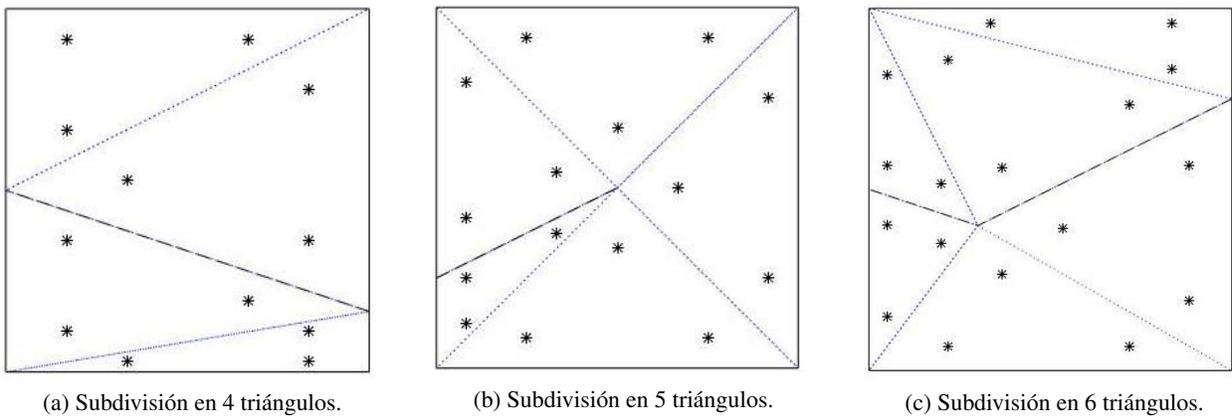


Figura 4.4: Elementos subdivididos en triángulos con sus correspondientes Puntos de Gauss.

De esta manera, la matriz de rigidez para un elemento  $e$  cortado por la discontinuidad puede calcularse como:

$$K_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega = \sum_{i=1}^T \int_{\Omega_{e_i}} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega$$

Donde  $T$  es el número de triángulos en que se subdivide el elemento.

Para la integración numérica, se evalúa la integral mediante la Cuadratura de Gauss usando una integración  $2 \times 2$  (4 puntos de Gauss) para los elementos no afectados por la discontinuidad, y 3 puntos de Gauss por triángulo para los elementos que se subdividen.

#### 4.4.4 Cálculo de los términos en la discontinuidad

Los términos  $\mathbf{K}_{coh}$  y  $\mathbf{F}_p$  se integran numéricamente evaluandolos en los puntos de cruce de la discontinuidad con los elementos. Para el término  $\mathbf{K}_{coh}$ , conocer las funciones de forma y el valor de la constante  $m$  es suficiente para calcular su valor. Sin embargo, para el término  $\mathbf{F}_p$  se debe conocer el valor del campo de presiones  $p(\mathbf{x})$  y de  $\sigma_0(\mathbf{x})$  en todos los puntos de integración. El campo de presiones se obtiene de la resolución de la ecuación de lubricación, la cual junto con la ecuación 4.27 forman el sistema a resolver, mientras que el término  $\sigma_0(\mathbf{x})$  depende de la apertura a cada momento: si la apertura  $h(\mathbf{x})$  en un punto  $\mathbf{x}$  es menor que un valor crítico  $\sigma_0(\mathbf{x})$  toma un valor a determinar por la ley cohesiva. En caso contrario, la ley cohesiva se anula y  $\sigma_0(\mathbf{x})$  y  $m$  son iguales a 0, provocando que la matriz de rigidez cohesiva  $\mathbf{K}_{coh}$  se anule y que el término  $\mathbf{F}_p$  se modifique, quedando como:

$$\tilde{\mathbf{F}}_p = \int_{\Gamma_d} [[\mathbf{N}^T]] p \mathbf{n}_d d\Gamma$$

#### 4.4.5 Post-Proceso: Propagación de la fractura

Para analizar si la fractura propagará, se calculan los factores  $K_I$  y  $K_{II}$  utilizando el método de la integral de interacción, descrito en el Capítulo 3.

Para calcular la integral  $M^{(1,2)}$  se utiliza una adaptación numérica de la misma [14] evaluada en los puntos de Gauss de cada elemento:

$$\int_A \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (4.28)$$

Donde  $A$  es el área dentro de una circunferencia de radio  $R$  centrada en el *Crack Tip* y  $q(x,y)$  es una función de peso cuyo valor es 1 para los nodos dentro de la circunferencia y 0 en los demás nodos.

Una vez calculados  $K_I$  y  $K_{II}$ , se calcula la tasa de energía  $\mathcal{G}$  de acuerdo a la ecuación 3.32 y si el criterio de propagación de la ecuación 3.33 se cumple, se calcula la dirección de propagación de la fractura mediante la ecuación 3.34.

# Capítulo 5

## Modelo Numérico del Fluido

### 5.1 Ecuación a modelar

Como ya se ha explicado anteriormente, el comportamiento del fluido dentro de la fractura se rige por la ecuación de lubricación:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla \cdot \left[ \frac{w^3}{12\mu} \nabla \cdot p \right] + q_l'' = 0 \quad (5.1)$$

donde, para el caso particular de este trabajo, el término de *leak-off* se modela de acuerdo a la ley de Darcy, por lo que la ecuación anterior queda expresada como:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla \cdot \left[ \frac{w^3}{12\mu} \nabla \cdot p \right] - 2 \frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (5.2)$$

De manera similar a lo hecho con la ecuación que domina el comportamiento del sólido, se multiplica la ecuación anterior por una función  $\delta p$  y se integra la misma en el dominio [8], que en este caso es el espacio dentro de la fractura:

$$\int_{\Gamma_d} \delta p^T \left( \frac{\partial w}{\partial t} - \nabla \cdot \left[ \frac{w^3}{12\mu} \nabla \cdot p \right] - 2 \frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad (5.3)$$

Desarrollando la ecuación anterior:

$$\int_{\Gamma_d} \delta p^T \frac{\partial w}{\partial t} d\Gamma - 2 \int_{\Gamma_d} \delta p^T \frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_d} \delta p^T \nabla \cdot \left[ \frac{w^3}{12\mu} \nabla \cdot p \right] d\Gamma \quad (5.4)$$

Integrando por partes el lado derecho, se obtiene:

$$\int_{\Gamma_d} \delta p^T \nabla \cdot \left[ \frac{w^3}{12\mu} \nabla \cdot p \right] d\Gamma = \delta p^T \frac{w^3}{12\mu} \nabla \cdot p \Big|_{\partial\Gamma_d} - \int_{\Gamma_d} (\nabla \cdot \delta p)^T \left( \frac{w^3}{12\mu} \nabla \cdot p \right) d\Gamma$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación 5.4:

$$\int_{\Gamma_d} \delta p^T \frac{\partial w}{\partial t} d\Gamma - 2 \int_{\Gamma_d} \delta p^T \frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma = \delta p^T \frac{w^3}{12\mu} \nabla \cdot p \Big|_{\partial\Gamma_d} - \int_{\Gamma_d} (\nabla \cdot \delta p)^T \left( \frac{w^3}{12\mu} \nabla \cdot p \right) d\Gamma$$

que, reordenando los términos puede escribirse como:

$$\int_{\Gamma_d} (\nabla \cdot \delta p)^T \left( \frac{w^3}{12\mu} \nabla \cdot p \right) d\Gamma = - \int_{\Gamma_d} \delta p^T \frac{\partial w}{\partial t} d\Gamma + 2 \int_{\Gamma_d} \delta p^T \frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma - \delta p^T \frac{w^3}{12\mu} \nabla \cdot p \Big|_{\partial\Gamma_d} \quad (5.5)$$

### 5.1.1 Modelado de *Leak-off*

Para aproximar el término de leak-off en el modelo, se define una distancia fija  $\Delta n$  para la cual se supone que la presión es la presión de formación de la roca  $p_f$ :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{p - p_f}{\Delta n}$$

Esto se realiza para poder modelar la ecuación principal del fluido en forma unidimensional.

## 5.2 Método de Elementos Finitos

### 5.2.1 Mallado

El fluido se encuentra contenido en la fractura la cual, si bien es bidimensional, se simplifica a una dimensión debido a que el largo de la fractura  $l$  es en magnitud mucho mayor que su ancho  $w$ . Es por esta razón que se utiliza un mallado unidimensional, el cual se encuentra definido por las intersecciones entre la fractura y el mallado (Figura 5.1). Estos puntos de cruce entre la fractura y el mallado representan los nodos de elementos unidimensionales, que se utilizan para aproximar el campo de presiones. Cabe destacar que en este modelo se supone como hipótesis que el fluido no llega hasta el *Crack Tip*, por lo que el mismo no forma parte de la grilla.

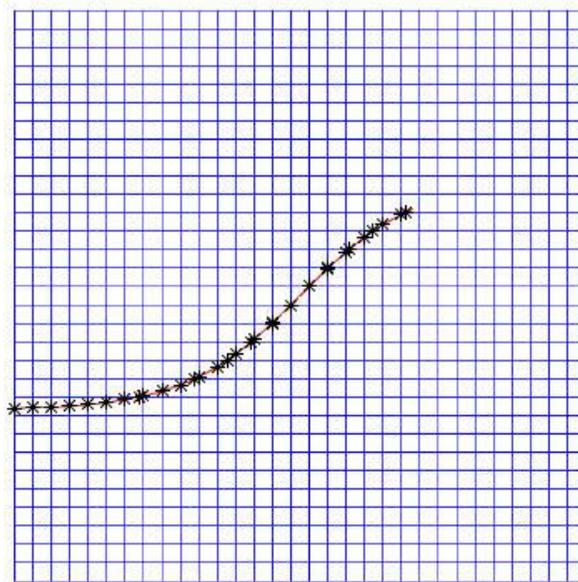


Figura 5.1: Nodos del modelo de Elementos Finitos para el fluido.

### 5.2.2 Aplicación del FEM a la ecuación

De manera similar a lo hecho con el campo  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  y  $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$  en las ecuaciones 4.16 y 4.18, se discretizan  $p$ ,  $\delta p$  y sus derivadas como:

$$\begin{aligned}
 p(s) &= \sum_{i=1}^N N_i(s) \bar{p}_i = \mathbf{N}(s) \bar{p} \\
 \delta p(s) &= \sum_{i=1}^N N_i(s) \bar{p}_i = \mathbf{N}(s) \bar{\delta} p \\
 \nabla \cdot p(s) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \bar{p}_i = \mathbf{B}(s) \bar{\delta} p \\
 \nabla \cdot \delta p(s) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \bar{p}_i = \mathbf{B}(s) \bar{\delta} p
 \end{aligned}$$

donde  $N_i(s)$  son las funciones de forma standard de un elemento barra del Método de Elementos Finitos. Reemplazando las expresiones anteriores en la ecuación 5.5, se obtiene:

$$\int_{\Gamma_d} (\mathbf{B}(s) \bar{\delta} p)^T \left( \frac{w^3}{12\mu} \mathbf{B}(s) \bar{p} \right) d\Gamma = - \int_{\Gamma_d} (\mathbf{N}(s) \bar{\delta} p)^T \frac{\partial w}{\partial t} d\Gamma + 2 \int_{\Gamma_d} (\mathbf{N}(s) \bar{\delta} p)^T \frac{\kappa}{\mu} \frac{(\mathbf{N}(s) \bar{p} - p_f)}{\Delta n} d\Gamma - (\mathbf{N}(s) \bar{\delta} p)^T \frac{w^3}{12\mu} \nabla \cdot (\mathbf{N}(s) \bar{p}) \Big|_{s=0}$$

Desarrollando la ecuación anterior, se obtiene:

$$\bar{\delta} p^T \left( \int_{\Gamma_d} \mathbf{B}^T \frac{w^3}{12\mu} \mathbf{B} d\Gamma \bar{p} + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \frac{\partial w}{\partial t} d\Gamma - 2 \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \frac{\kappa}{\mu \Delta n} \mathbf{N} d\Gamma \bar{p} + 2 \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \frac{\kappa}{\mu} \frac{p_f}{\Delta n} d\Gamma + \mathbf{N}^T \frac{w^3}{12\mu} \nabla \cdot (\mathbf{N}(s) \bar{p}) \Big|_{\partial \Gamma_d} \right) = 0$$

Igualando a cero el término entre paréntesis y reordenando los términos nuevamente:

$$\left[ \int_{\Gamma_d} \mathbf{B}^T \frac{w^3}{12\mu} \mathbf{B} d\Gamma - 2 \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \frac{\kappa}{\mu \Delta n} \mathbf{N} d\Gamma \right] \bar{p} = - \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \frac{\partial w}{\partial t} d\Gamma - \mathbf{N}^T \frac{w^3}{12\mu} \nabla \cdot (\mathbf{N}(s) \bar{p}) \Big|_{\partial \Gamma_d} - 2 \mathbf{N}^T \frac{\kappa}{\mu} \frac{p_f}{\Delta n} \Gamma_d$$

Que puede escribirse en forma matricial como:

$$(A(w) - A_{perm}) \bar{p} = R(w) + R_t(w) + R_{perm}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 A(w) &= \int_{\Gamma_d} \mathbf{B}^T \frac{w^3}{12\mu} \mathbf{B} d\Gamma & A_{perm} &= 2 \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \frac{\kappa}{\mu \Delta n} \mathbf{N} d\Gamma \\
 R(w) &= - \mathbf{N}^T \frac{w^3}{12\mu} \nabla \cdot (\mathbf{N}(s) \bar{p}) \Big|_{\partial \Gamma_d} & R_t(w) &= - \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \frac{\partial w}{\partial t} d\Gamma & R_{perm} &= - 2 \mathbf{N}^T \frac{\kappa}{\mu} \frac{p_f}{\Delta n} \Gamma_d
 \end{aligned}$$

### 5.2.3 Esquema temporal

Para la dependencia temporal del problema, se utiliza un esquema implícito donde la derivada temporal de la apertura  $w$  en un tiempo  $n + 1$  queda definida como

$$\frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{\gamma_i}^{n+1} = \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t}$$

Es en este tiempo  $n + 1$  en que, de acuerdo al esquema implícito, se plantea la ecuación a resolver.

#### 5.2.4 Condiciones de Borde

Una vez escrito el sistema en forma matricial, para resolver el problema del campo de presiones se deben introducir las condiciones de borde. La condición de borde del caudal inyectado viene dada por el término  $R(w)$ , mientras que en el último nodo, se impone como presión nodal, la presión  $p_f$ , cuyo valor es el de la presión en el llamado *Fluid Lag*. De esta manera, se considera que el frente del fluido no llega hasta el *Crack Tip* y que queda un espacio dentro de la fractura de longitud despreciable llamado *Fluid Lag*, en el cual no hay fluido.

# Capítulo 6

## Acople Fluido-Estructura

### 6.1 Sistema de Ecuaciones

De acuerdo a lo descrito en los capítulos anteriores, el sistema de ecuaciones que modela el proceso queda definido como:

$$\begin{cases} (\mathbf{K}(t) + \mathbf{K}_{coh}(t)) \bar{D}(t) = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_p(p) \\ w(t) = [\mathbf{N}] \bar{D}(t) \\ (A(w) - A_{perm}(t)) \bar{p}(t) = R(w) + R_t(w) + R_{perm}(t) \end{cases}$$

Como puede observarse, es un sistema de ecuaciones no lineal por lo que se requiere de un algoritmo iterativo para su resolución. En este trabajo, para resolver el acople entre las distintas ecuaciones, se utiliza un método de *Iteraciones de Picard*, el cual será descrito más adelante.

### 6.2 Algoritmo de Solución

#### 6.2.1 Esquema Temporal del acople FSI

El sistema de ecuaciones a resolver es un sistema dinámico ya que para cada paso de tiempo, la fractura se modifica y los campos de desplazamientos y de presiones varían. En este trabajo, se modela el problema como una sucesión de procesos cuasiestáticos en cada paso de tiempo. La dependencia temporal del problema se modela con el término  $\frac{\partial w}{\partial t}$  en la ecuación de lubricación, el cual comunica los cambios de apertura entre pasos de tiempo consecutivos.

La duración de cada paso de tiempo se calcula de manera tal que se cumpla la ecuación de conservación de masa del fluido en la fractura:

$$Q'_0 = \int_0^a \frac{\partial w}{\partial t} ds + \int_0^a q_l''(s) ds$$

Modelando los términos de esta ecuación de acuerdo a lo visto en el capítulo anterior:

$$Q'_0 = \int_0^a \frac{\Delta w}{\Delta t} ds + 2 \int_0^a \frac{\kappa}{\mu} \frac{p_i - p_f}{\Delta n} ds$$

Evaluando las integrales como sumatorias en el dominio del modelo de fluidos, se obtiene:

$$Q'_0 = \sum_{i=1}^{n_{ps}} \frac{\Delta w_i}{\Delta t} \Delta s_i + 2 \sum_{i=1}^{n_{ps}} \frac{\kappa}{\mu} \frac{p_i - p_f}{\Delta n} \Delta s_i$$

En la ecuación anterior, la primera integral corresponde al cambio de volumen de la fractura en cada paso de tiempo, mientras que la segunda integral representa el volumen de fluido perdido por *leak-off* en el mismo paso de tiempo. Despejando la ecuación anterior para el paso de tiempo, se obtiene:

$$\Delta t = \frac{\sum_{i=1}^{n_{ps}} \Delta w_i \Delta s_i}{Q'_0 - 2 \frac{\kappa}{\mu} \sum_{i=1}^{n_{ps}} (p_i - p_f) \frac{\Delta s_i}{\Delta n} \Delta s_i} \quad (6.1)$$

Es importante destacar que a medida que la solución converge, al variar la apertura en cada iteración, el volumen varía y, por lo tanto, el paso de tiempo se ajusta para cumplir la ecuación de conservación de masa del fluido.

### 6.2.2 Iteraciones de Picard

Para resolver el sistema de ecuaciones no lineal en un paso de tiempo  $n$  se utiliza un método de *Iteraciones de Picard*, el cual es una estrategia de punto fijo, que utiliza un factor de relajación para estabilizar las variaciones entre las iteraciones.

#### Procedimiento

1. Se toma como valor inicial del campo de presiones y de aperturas, el valor convergido del paso anterior:  $p_0^{(n)} = p^{(n-1)}$  y  $w_0^{(n)} = w^{(n-1)}$ .
2. Para una iteración  $k + 1$ , se resuelve la ecuación XFEM y se calcula el valor de las aperturas  $w_{k+1}^{(n)}$ .
3. Se calcula el paso de tiempo  $\Delta t_{k+1}$  de acuerdo a la ecuación 6.1.
4. Se resuelve la ecuación del campo de presiones y se la asigna a un valor intermedio  $p_{k+1/2}^{(n)}$ .
5. Se calcula el valor del campo de presiones como  $p_{k+1}^{(n)} = (1 - \alpha)p_k^{(n)} + \alpha p_{k+1/2}^{(n)}$ .
6. Se calcula el valor del campo de aperturas como  $w_{k+1}^{(n)} = (1 - \alpha)w_k^{(n)} + \alpha w_{k+1/2}^{(n)}$ .
7. Si el criterio de convergencia se cumple, la solución se define como convergida y se pasa al siguiente paso de tiempo. En caso contrario, se vuelve al paso 2.

#### Criterio de Convergencia

En un paso de tiempo cualquiera, para determinar si el campo de presiones y aperturas se encuentra convergido, se utilizan los siguientes criterios:

$$\varepsilon_{p_k} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{pts}} |p_i^{(k)} - p_i^{(k-1)}|}{\sum_{i=1}^{n_{pts}} |p_i^{(k)}|} < \varepsilon \quad \varepsilon_{h_k} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{pts}} |w_i^{(k)} - w_i^{(k-1)}|}{\sum_{i=1}^{n_{pts}} |w_i^{(k)}|} < \varepsilon$$

En los criterios anteriores,  $k$  determina la iteración dentro de un paso de tiempo, mientras que  $\varepsilon$  es un valor de tolerancia predeterminado, que en este trabajo tiene el valor de  $10^{-6}$ . Para que la solución se considere convergida, ambos criterios deben cumplirse, por lo que no basta con que uno de los campos converja, ya que esto puede llevar a errores en los siguientes pasos de tiempo.

#### Elección de $\alpha$

El coeficiente de relajación  $\alpha$  es un número real entre 0 y 1 que determina cuánto relajar la solución entre iteraciones para evitar cambios bruscos que lleven a una divergencia. En este trabajo se observó que para valores de  $\alpha$  mayores a 0,5 el sistema no converge (Figura 6.1), un hecho también observado por Dahi ([25]). Se llevó a cabo un análisis numérico para elegir el valor de  $\alpha$ , tratando de optimizar el número de iteraciones necesarias para lograr la convergencia. Para esto, se realizaron simulaciones del problema para

## 6.2. Algoritmo de Solución

distintos valores del largo de la fractura  $a$  y para distintos valores de  $\alpha$  buscando el valor de  $\alpha$  óptimo para minimizar el tiempo de convergencia.

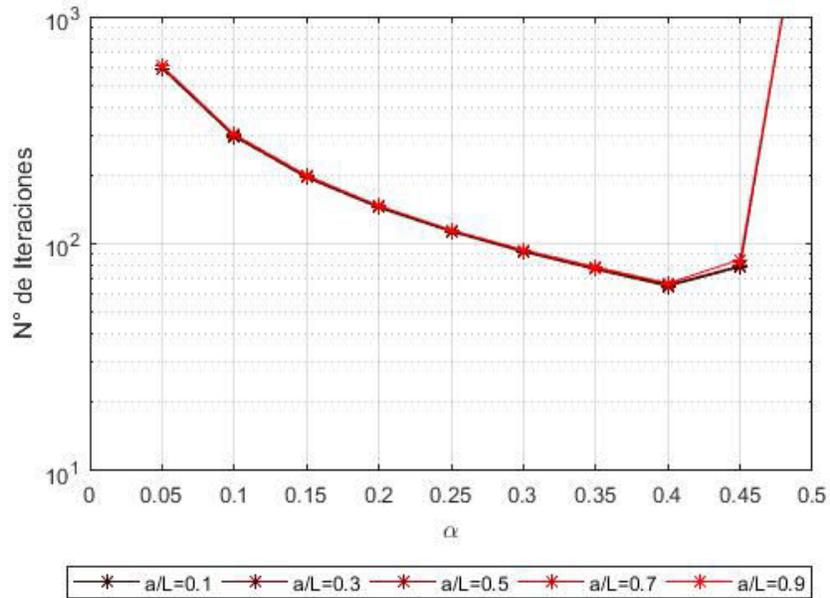


Figura 6.1: Cantidad de iteraciones necesarias para distintos valores de  $\alpha$  y de largo de fractura.

Como se observa en la Figura, el valor óptimo de  $\alpha$  se encuentra cercano a 0,4.

## 6.2.3 Diagrama de Flujo del Algoritmo

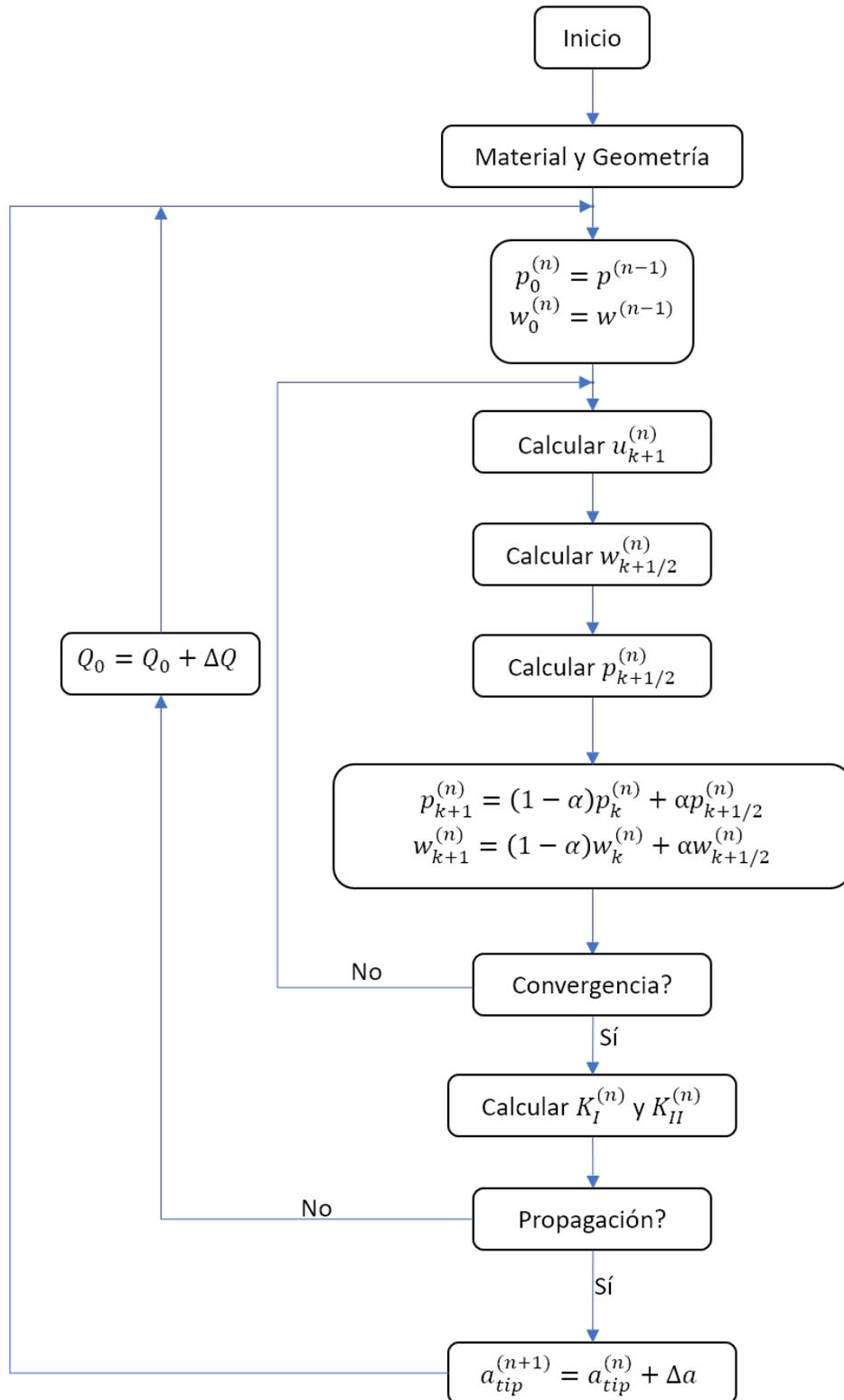


Figura 6.2: Diagrama de Flujo del algoritmo FSI.

# Capítulo 7

## Validación y Resultados

### 7.1 Modelo XFEM

El objetivo principal del algoritmo del modelo XFEM consiste en predecir correctamente la propagación de una grieta en un cuerpo fracturado. Como se ha explicado anteriormente, para lograr esto, es necesario calcular los Factores de Intensidad de Tensiones, para lo cual es necesario conocer las tensiones y desplazamientos del cuerpo fracturado en cada momento. Para validar el código correspondiente, se modelaron casos conocidos, o donde existía una solución analítica para los Factores de Intensidad de Tensiones. De esta manera, es posible contrastar los resultados obtenidos y validar el código.

#### 7.1.1 Double Cantilever Beam (DCB)

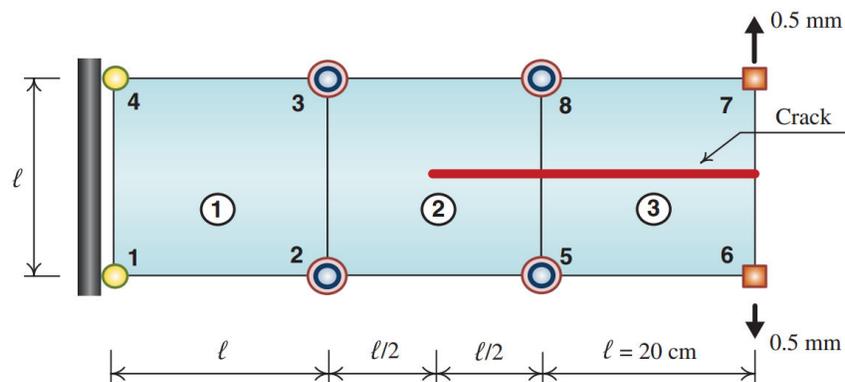


Figura 7.1: Double Cantilever Beam (DCB) [6].

En primer lugar, se utiliza el algoritmo XFEM para modelar una viga en voladizo con una grieta desde el centro hasta uno de sus bordes, como se muestra en la Figura 7.1. La viga, de largo  $L$  y altura  $h$ , se encuentra bajo condición *plain-strain*, empotrada en uno de sus bordes laterales, mientras que en el otro borde lateral se imponen desplazamientos verticales  $u_0$  en las esquinas. La fractura se encuentra ubicada en la línea media de la viga, en la dirección del largo de la viga desde el borde con desplazamientos impuestos hasta el centro de la misma. En este trabajo, se modela este caso para  $h = 20\text{ cm}$ ,  $L = 3h = 60\text{ cm}$ ,  $u_0 = 0,5\text{ mm}$  y un material con  $E = 2 \cdot 10^6\text{ kg/cm}^2$  y  $\nu = 0,3$ . Para el modelo, se utilizaron mallas estructuradas de elementos Q4 con refinamientos  $3 \times 1$ ,  $45 \times 15$ ,  $75 \times 25$  y  $135 \times 45$ , y los resultados obtenidos fueron comparados con los mostrados en el trabajo de Khoei [6].

Para verificar el cálculo del campo de desplazamientos, se compararon los valores de los grados de libertad de los 2 nodos a los que se les impusieron desplazamientos, con los valores de estos grados de libertad en el trabajo de Khoei. Estos resultados se muestran en la Tabla 7.1, donde los subíndices *B* (Bottom) y *T* (Top) corresponden a los nodos 6 y 7 respectivamente. En la Figura 7.2 se muestra el ancho máximo de la fractura ( $h_{m\acute{a}x}$ ) para los diferentes mallados, en función del número de elementos. A simple vista,

puede observarse que al refinar la malla, esta variable se acerca cada vez más a un valor fijo, asegurando la convergencia. Por otra parte, es importante destacar, que, para una malla de 3 elementos, los resultados obtenidos por Khoei dan una apertura máxima de  $99,76 \times 10^{-3} m$ , lo cual indica que los valores calculados se encuentran en el orden previsto (para el mallado de 3 elementos, la diferencia es de 0.025 %). Estos errores pueden deberse, principalmente, a los puntos de Gauss utilizados en la integración numérica de la matriz de rigidez, ya que, mientras que en este trabajo se utiliza la integración descrita anteriormente, en el trabajo de Khoei se divide cada elemento en una subgrilla de  $8 \times 8$  rectángulos con 4 puntos de Gauss en cada uno (256 puntos de Gauss por elemento).

DoF	Valor Obtenido	Khoei	Diferencia
$u_{xB}$	0,00836	0,00817	2,33 %
$u_{yB}$	-0,05	-0,05	0 %
$u_{xT}$	0,00836	0,00817	2,33 %
$u_{yT}$	0,05	0,05	0 %
$a_{xB}$	-0,01484	-0,01569	5,42 %
$a_{yB}$	0,04979	0,04988	0,18 %
$a_{xT}$	0,01484	0,01569	5,42 %
$a_{yT}$	0,04979	0,04988	0,18 %

Tabla 7.1: Valores de grados de libertad obtenidos para nodos con desplazamientos impuestos y comparación con resultados de Khoei.

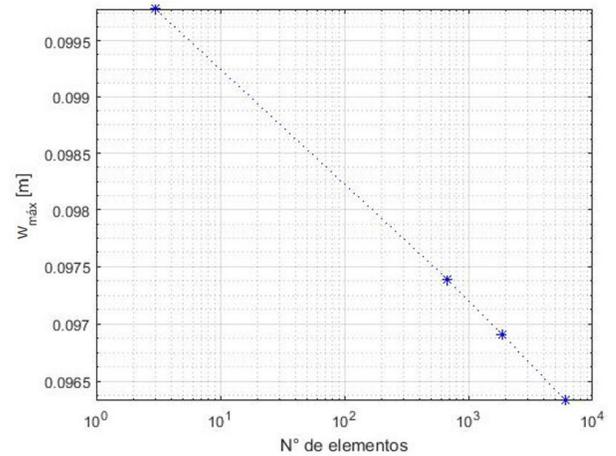
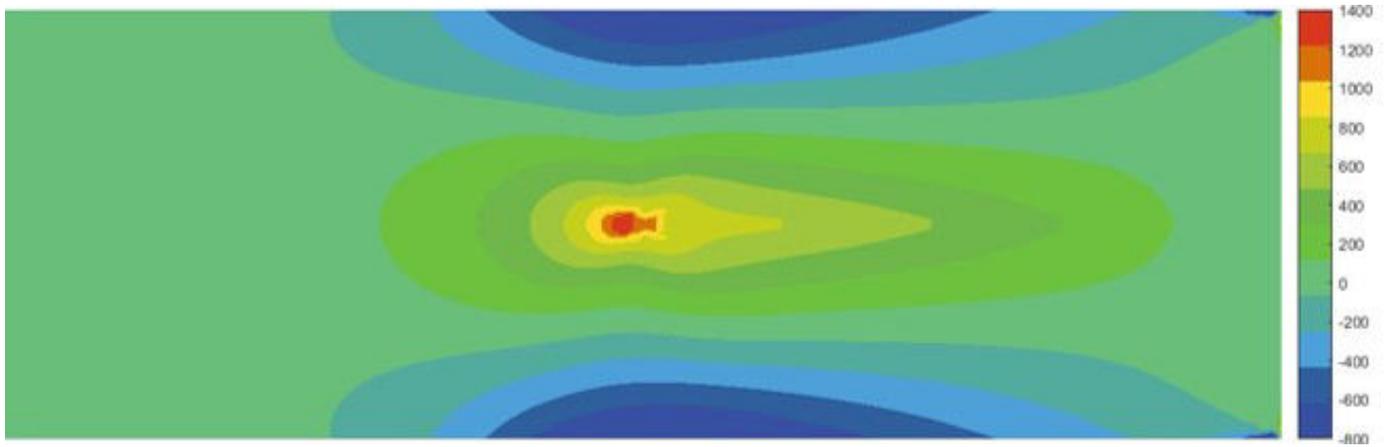
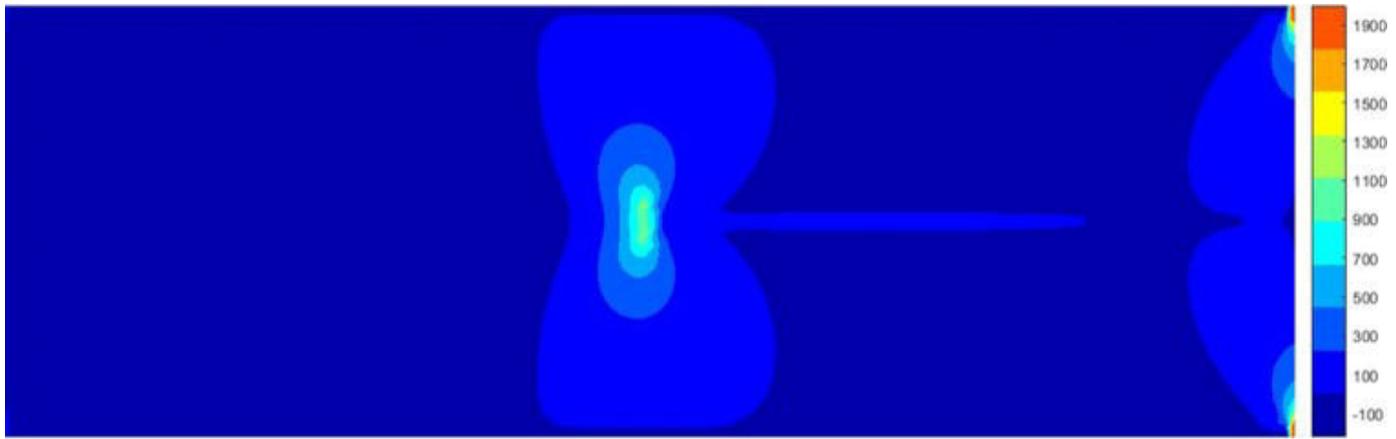


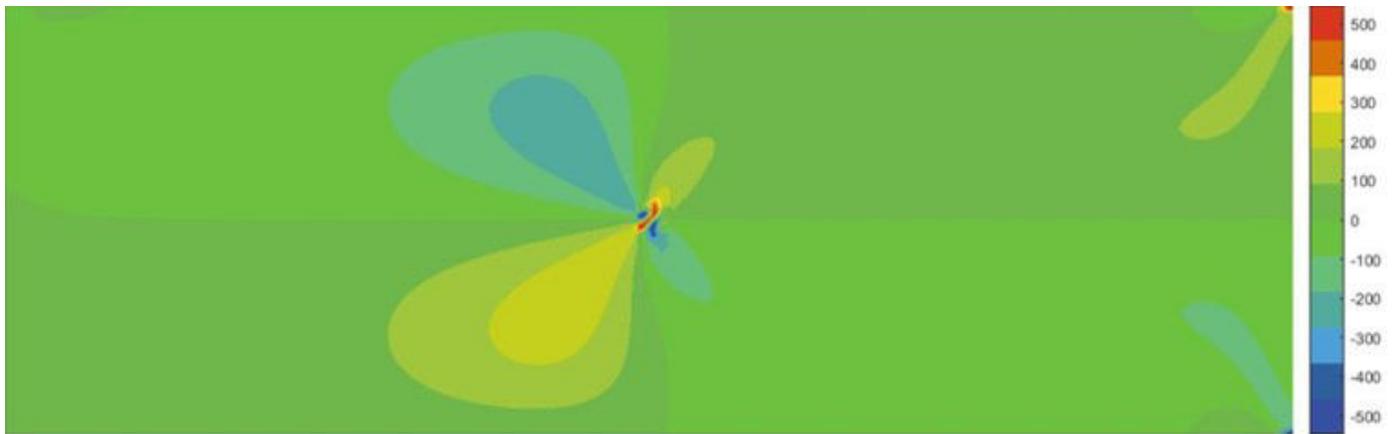
Figura 7.2: Ancho máximo de la fractura para diferentes mallados.



(a)  $\sigma_{xx}$



(b)  $\sigma_{yy}$



(c)  $\tau_{xy}$

Figura 7.3: Campos de tensiones calculados.

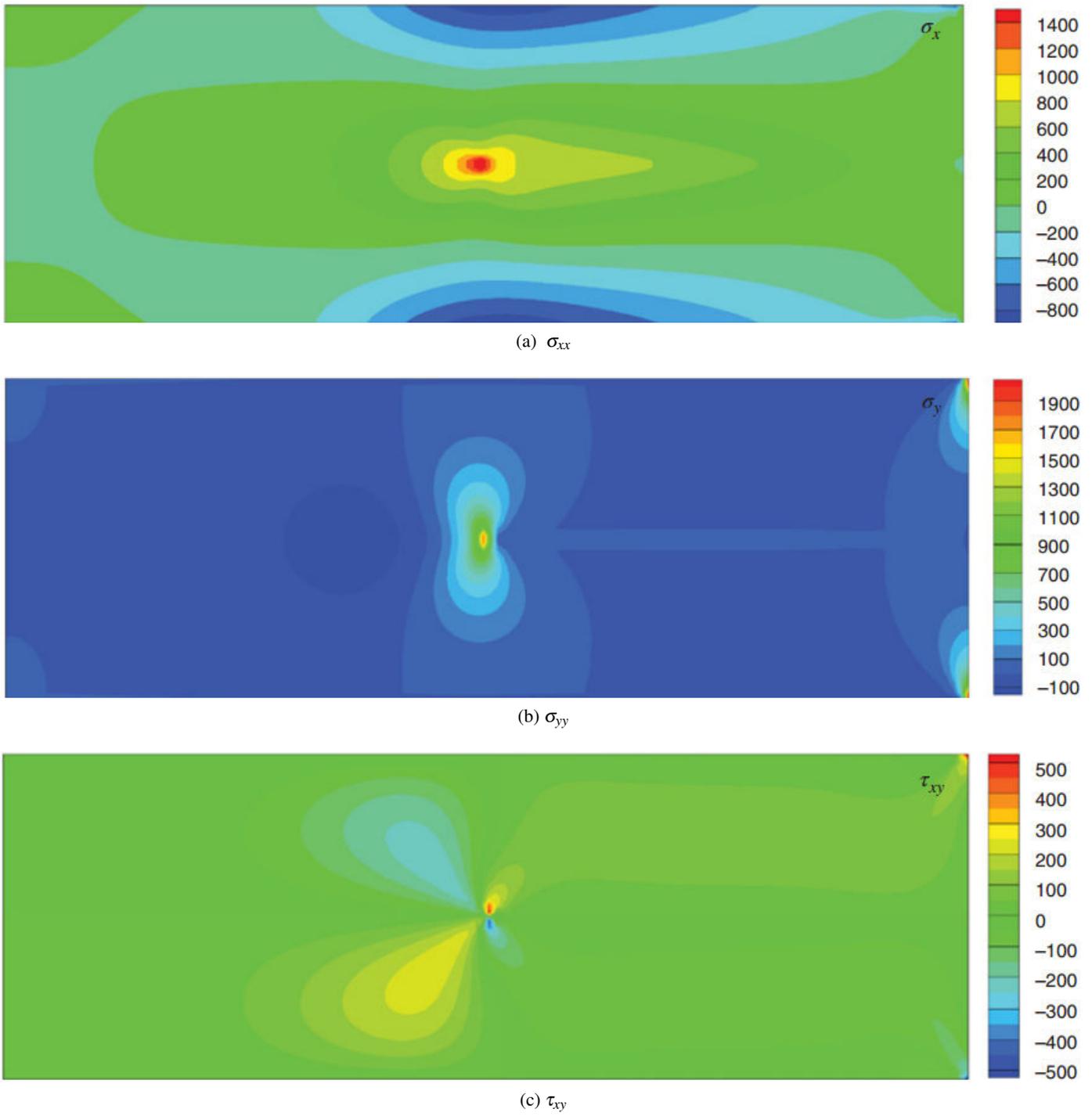


Figura 7.4: DCB: Campos de tensiones obtenidos por Khoei.

En la Figura 7.3, se muestran los campos de tensiones  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\tau_{xy}$  obtenidos en este trabajos para una malla de 135x45 elementos, mientras que en la Figura 7.4 se muestran los campos de tensiones obtenidos en el trabajo de Khoei para el mismo mallado. Puede observarse que estos campos son similares. También, como se comentó anteriormente, la existencia de pequeñas diferencias en los valores de los campos obtenidos puede deberse, en menor medida, a los diferentes puntos de Gauss utilizados en cada trabajo, al realizar la integración numérica. Finalmente, en la Tabla 7.2, se muestran los valores de los parámetros energéticos  $\mathcal{G}$  y  $K_I$ , obtenidos para distintos radios de dominio  $r_d$  de la integral  $J$ , los cuales se encuentran expresados como un múltiplo de la longitud característica de cada malla  $l_e = \sqrt{A_{ele}}$ , siendo  $A_{ele}$  el área de un elemento. En la misma tabla, ntre parentésis se encuentra la diferencia con respecto al valor convergido calculado por Khoei.. Para validar estos resultados, se prefirió comparar los mismos con los valores convergidos de  $\mathcal{G}$  y  $K_I$  obtenidos por Khoei, es decir para la malla mas refinada y el dominio de integración más amplio. Nuevamente, las discrepancias existentes, pueden deberse principalmente a la forma de integración numérica utilizada en cada trabajo. Como es de esperar, la diferencia respecto de los valores convergidos disminuye considerablemente al refinar la malla y aumentar el dominio de integración.

Mallado	$r_d/l_e$	1	2	3	4	5
45x15	$\mathcal{G}$	2.2107 (5.27%)	2.1426 (2.03%)	2.1199 (0.95%)	2.1182 (0.87%)	2.1163 (0.78%)
	$K_I$	2204.20 (2.59%)	2170.00 (1.00%)	2158.50 (0.46%)	2157.60 (0.42%)	2156.60 (0.38%)
75x25	$\mathcal{G}$	2.1955 (4.55%)	2.1328 (1.56%)	2.1140 (0.67%)	2.1133 (0.63%)	2.1119 (0.57%)
	$K_I$	2196.60 (2.24%)	2165.10 (0.77%)	2155.50 (0.33%)	2155.10 (0.31%)	2154.40 (0.27%)
135x45	$\mathcal{G}$	2.1771 (3.67%)	2.1180 (0.86%)	2.1016 (0.08%)	2.1016 (0.08%)	2.1007 (0.03%)
	$K_I$	2187.40 (1.81%)	2157.50 (0.42%)	2149.20 (0.03%)	2149.20 (0.03%)	2148.70 (0.01%)

Tabla 7.2: DCB: Valores de  $\mathcal{G}$  y  $K_I$  calculados para diferentes radios de dominio de integral  $J$ .

### 7.1.2 Placa rectangular con grieta transversal sometida a tensión normal

El segundo caso que se modela es el de una placa rectangular de ancho  $w$  y altura  $H$  con una grieta transversal de largo  $a = W/2$ , fija en su borde inferior y sometida a una tensión normal  $\sigma_0$  constante en su borde superior, como se muestra en la Figura 7.5. Este caso se modela como *plain-strain*, con  $E = 1000$ ,  $\nu = 0,3$  y  $\sigma_0 = 1$ , para una geometría de  $H = 2$  y  $W = 1$ . Las mallas a utilizar, como en el caso anterior, son estructuradas de elementos  $Q4$  y mallas de  $12 \times 24$ ,  $24 \times 48$ ,  $30 \times 60$  y  $40 \times 80$  nodos equiespaciados. Como puede observarse, el modo de fractura en este caso es I puro, es decir que el Factor de Intensidad de Tensiones  $K_{II}$  tiene un valor teórico nulo.

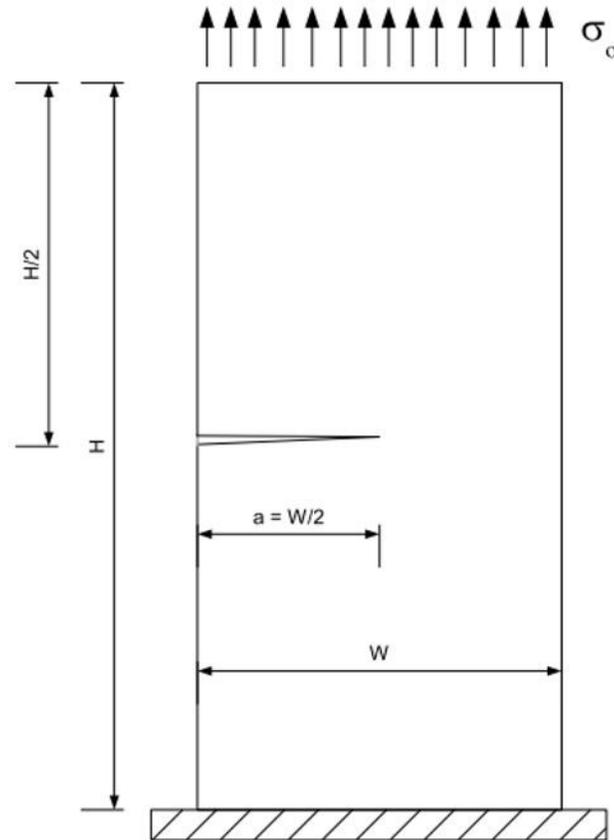


Figura 7.5: Placa sometida a tensión normal.

Los resultados obtenidos para este caso se comparan con los obtenidos por Ahmed [26], y los valores de  $K_I$ , se contrastan además con el valor teórico dado por Ewalds y Wanhill [27]:

$$K_I = C \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (7.1)$$

donde  $C$  es un factor de corrección que depende de la relación entre el largo de la fractura y el ancho del cuerpo:

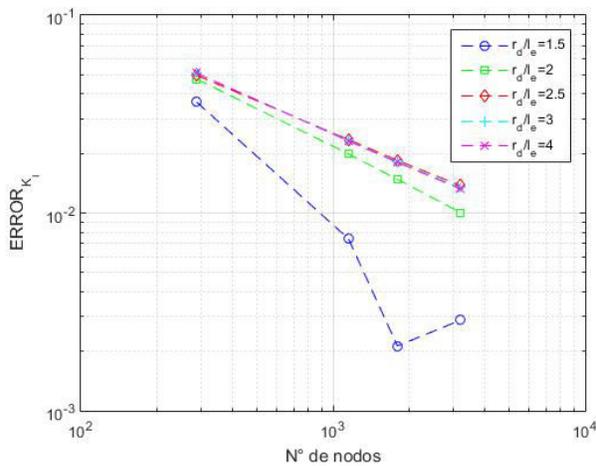
$$C = 1,12 - 0,231 \left(\frac{a}{w}\right) + 10,55 \left(\frac{a}{w}\right)^2 - 21,72 \left(\frac{a}{w}\right)^3 + 30,39 \left(\frac{a}{w}\right)^4$$

En base a este valor, se define una medida de error como:

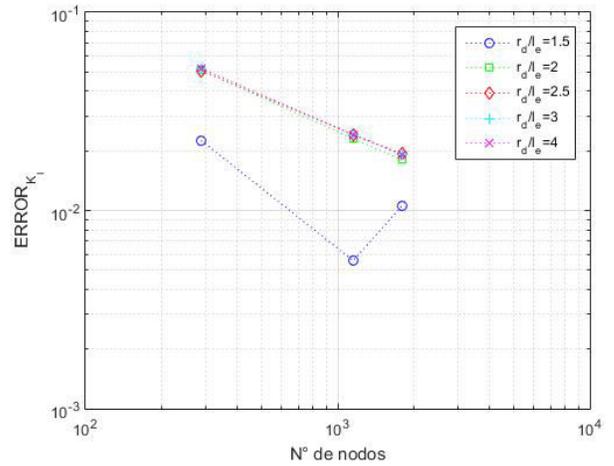
$$ERROR_{K_I} = \frac{|K_{I_{num}} - K_{I_{teor}}|}{K_{I_{teor}}}$$

donde  $K_{I_{num}}$  es el valor del factor  $K_I$  obtenido numéricamente mediante la simulación, mientras que  $K_{I_{teor}}$  es el valor obtenido mediante la ecuación 7.1.

En las Figuras 7.6a y 7.6b, se muestra el valor de este error para diferentes mallados utilizando distintos radios de dominio de la integral  $J$ , especificados (como en el caso anterior) como función de la longitud característica  $l_e$ . Puede observarse que, para todos los dominios, excepto el más pequeño, los valores de  $K_I$  convergen al valor exacto al refinar la malla. Esta discrepancia en la convergencia del primer dominio de integración, se observa también en los resultados obtenidos por Ahmed, y puede deberse a que el dominio de integración que se está tomando es muy pequeño, y, por lo tanto, el valor de la integral no se está calculando correctamente. Otro factor que puede incidir en la diferencia entre ambos resultados puede ser el factor de corrección  $C$ , el cual fue obtenido mediante correlaciones experimentales.



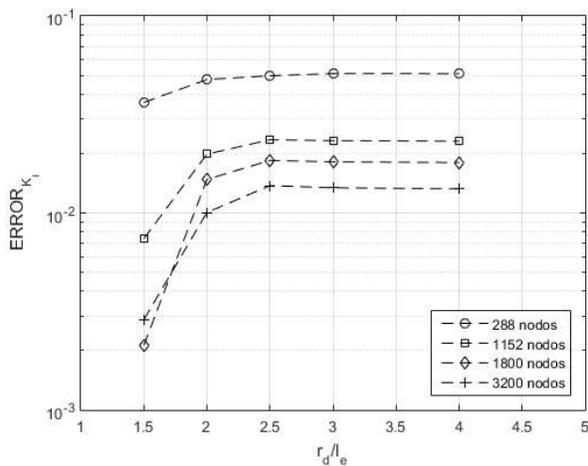
(a) Valores actuales.



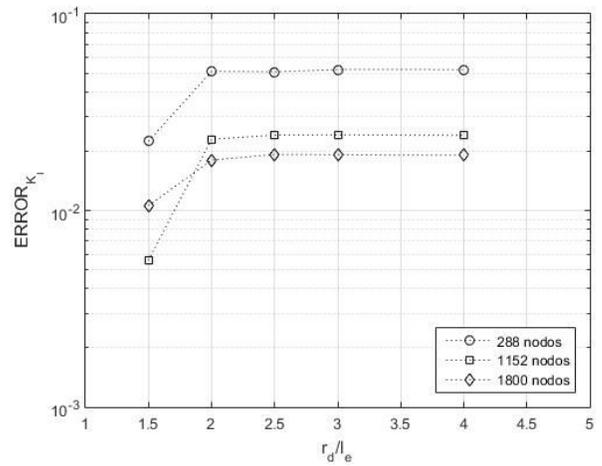
(b) Valores obtenidos por Ahmed.

Figura 7.6: Error del Factor  $K_I$  en función del número de nodos, para diferentes dominios de la integral  $J$ .

Para analizar este hecho, se procede a graficar los mismos valores de error, como función del tamaño del dominio de la integral, como se muestra en las Figuras 7.7a y 7.7b. En las mismas puede observarse como, para valores de  $r_d/l_e$  mayores a 2.5, los valores del error se mantienen constantes para todos los refinamientos, es decir, que el valor de  $K_I$  se vuelve independiente del radio de a utilizar. Observando estos mismos gráficos, se puede ver que, para un dominio de integración dado, los errores son siempre menores cuando mayor es el refinamiento.



(a) Valores obtenidos en este trabajo.



(b) Valores obtenidos por Ahmed.

Figura 7.7: Error del Factor  $K_I$  en función del tamaño de dominio de la integral  $J$ , para diferentes refinamientos.

Finalmente, se estudian los resultados del valor de  $K_I$  frente a diferentes largos de grieta  $a$ , contrastando

estos resultados con los obtenidos con la ecuación 7.1, como se observa en la Figura 7.8. Puede verse que para valores de  $a/W$  menores a 0.7, los resultados obtenidos numéricamente coinciden notablemente con los predichos por la ecuación 7.1. Sin embargo, para valores mayores, se encuentra que los valores numéricos difieren mucho de la ecuación teórica. Esto puede explicarse, ya que esta ecuación es válida cuando  $a/W$  es menor a 0.6, como se muestra en la Figura 7.8.

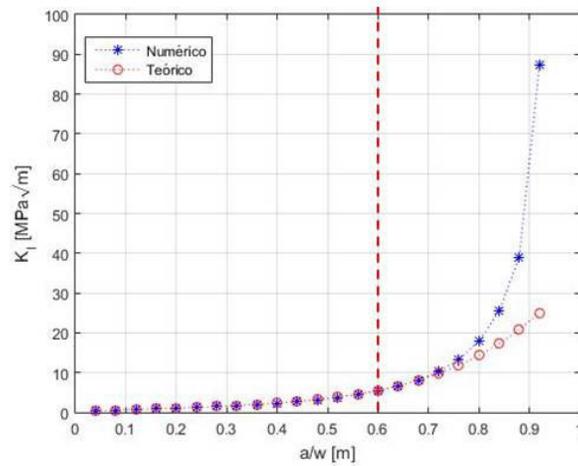


Figura 7.8: Valores de  $K_I$  para distintos largos de grieta.

### 7.1.3 Placa rectangular con grieta transversal sometida a corte

Para investigar el comportamiento del algoritmo XFEM frente a un modo de fractura mixto, se resuelve el caso mostrado en la Figura 7.9, similar al caso anterior, con la diferencia de que la placa se somete a una tensión de corte constante  $\tau_0$ . En este caso, también *plain-strain*, los parámetros se toman del trabajo de Yau [21], siendo  $E = 100ksi$ ,  $\nu = 0,3$ , y  $\tau_0 = 1 psi$ , y las dimensiones  $H = 16in$  y  $w = 7in$ . Con estos valores, se conoce que los Factores de Intensidad de Tensiones son:

$$K_I = 34 psi\sqrt{in} \quad K_{II} = 4,55 psi\sqrt{in}$$

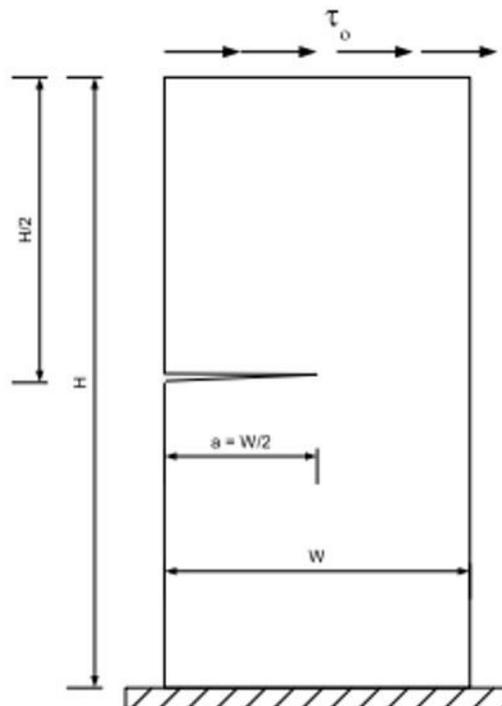


Figura 7.9: Placa sometida a tensión de corte.

De manera similar al caso anterior, se definen errores para ambos Factores de Intensidad de Tensiones:

$$ERROR_{K_I} = \frac{|K_{I_{num}} - K_{I_{exact}}|}{K_{I_{exact}}} \quad ERROR_{K_{II}} = \frac{|K_{II_{num}} - K_{II_{exact}}|}{K_{II_{exact}}}$$

donde  $K_{I_{exact}}$  y  $K_{II_{exact}}$  son los valores indicados anteriormente.

En las Figuras 7.10a y 7.10b, se muestran los valores de error obtenidos para  $K_I$  y  $K_{II}$ , obteniendo resultados similares a los del caso anterior, donde las simulaciones con el dominio de integración más pequeño muestran un comportamiento anormal respecto a las demás simulaciones, las cuales convergen normalmente al refinar la malla.

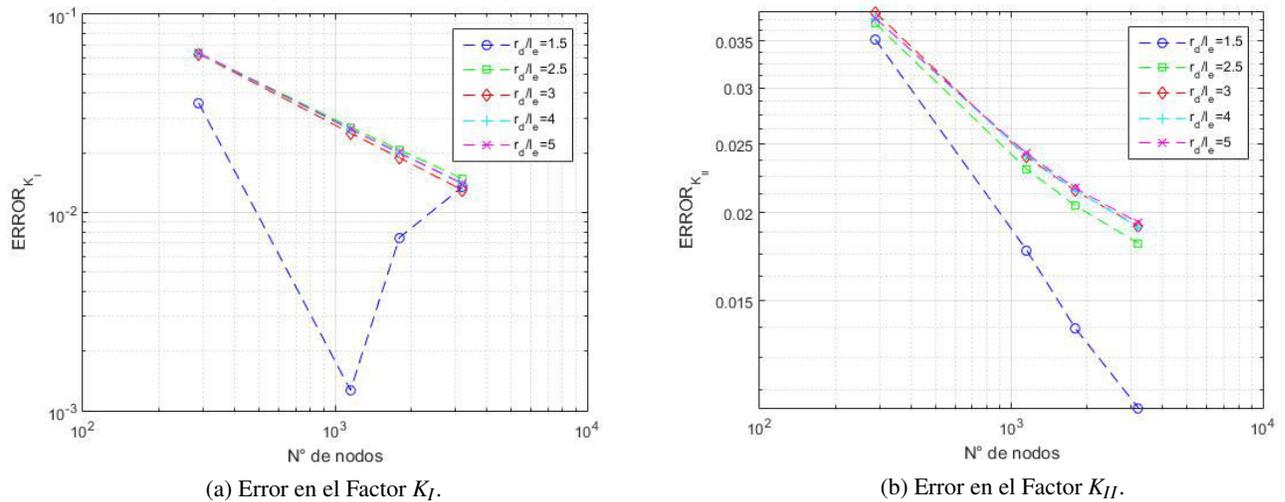
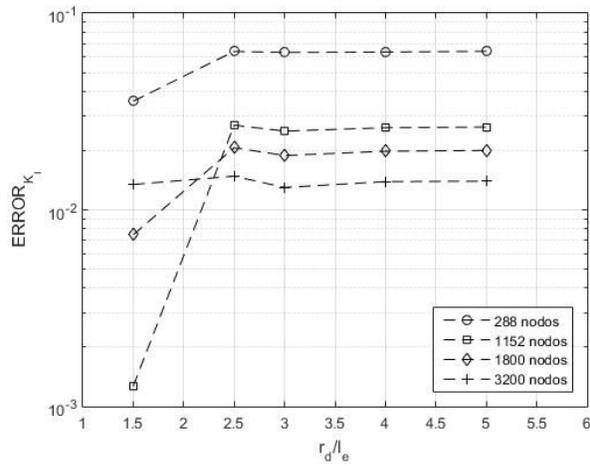
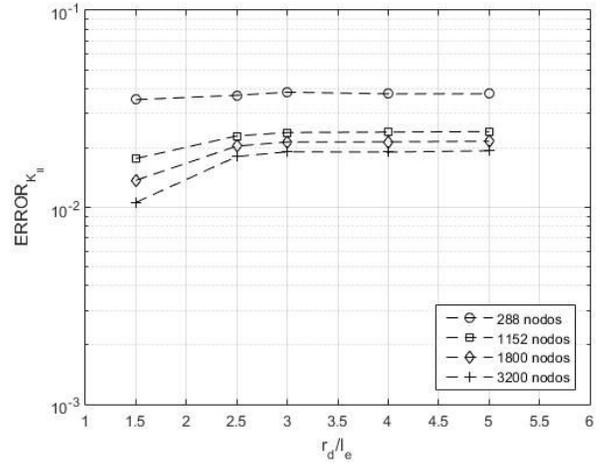


Figura 7.10: Error de los Factores  $K_I$  y  $K_{II}$  obtenidos en este trabajo en función del número de nodos, para diferentes dominios de la integral  $J$ .

De manera similar a lo realizado en el caso anterior, se utilizan los mismos datos de error obtenidos para verificar que los Factores de Intensidad de Tensiones son independientes del dominio, y se agregan estos mismos resultados para el trabajo de Ahmed antes citado, como comparación. En las Figuras 7.11a y 7.11b se muestran los valores de error para el factor  $K_I$ , obtenidos por este trabajo y por Ahmed [26] respectivamente, mientras que en las Figuras 7.12a y 7.12b, se muestran los resultados para el factor  $K_{II}$ . Nuevamente, se verifica que el valor de  $K_I$  y  $K_{II}$  se vuelve independiente del dominio de integración para valores de  $r_d/l_e$  mayores a 2.5, y que, como se espera, a mayor refinamiento, el error es menor. Por otra parte, cuantitativamente, se encuentra que los valores obtenidos de error son similares a los valores obtenidos por Ahmed.

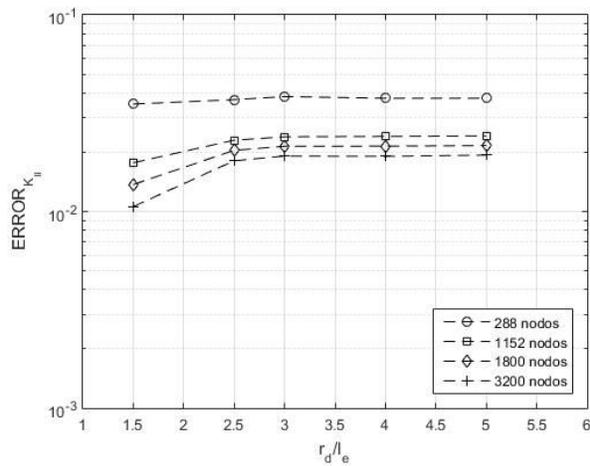


(a) Valores actuales.

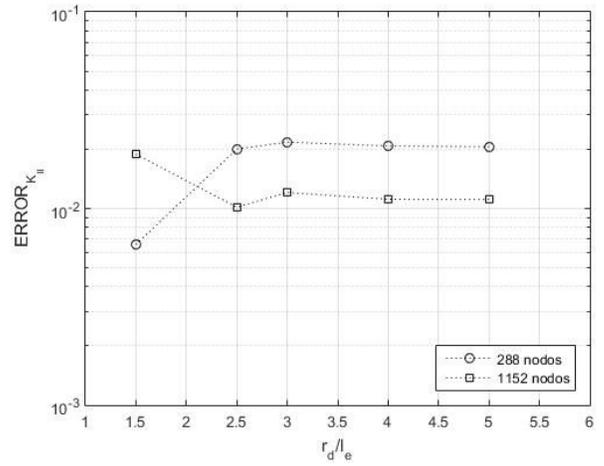


(b) Valores obtenidos por Ahmed.

Figura 7.11: Error del Factor  $K_I$  en función del tamaño de dominio de la integral  $J$ , para diferentes refinamientos.



(a) Valores actuales.



(b) Valores obtenidos por Ahmed.

Figura 7.12: Error del Factor  $K_{II}$  en función del tamaño de dominio de la integral  $J$ , para diferentes refinamientos.

## 7.1.4 Placa cuadrada sometida a tensión normal y de corte con propagación de fractura

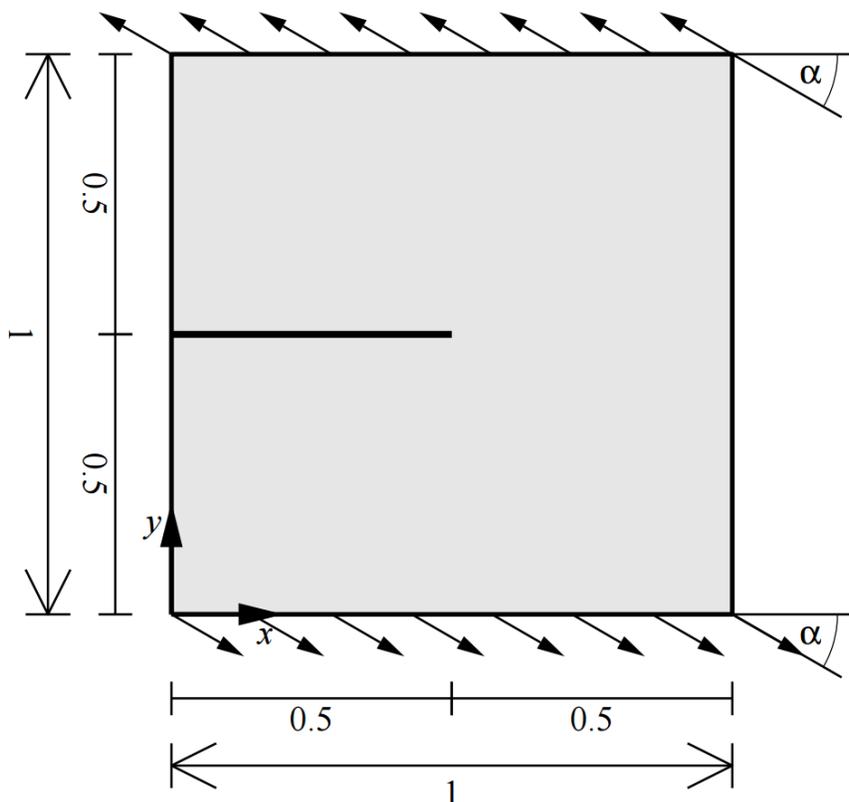


Figura 7.13: Placa cuadrada sometida a diferentes estados de tensión.

El siguiente caso que se modela es el que se muestra en la Figura 7.13, estudiado por Fries y Baydoun [22]. En el mismo, se tiene una placa cuadrada de lado unitario, con una grieta que va desde el centro de la placa hasta el borde izquierdo de la misma. Dicha placa es sometida a desplazamientos impuestos en sus bordes superior e inferior de módulo  $0,5 \cdot 10^{-3}$ , de acuerdo al ángulo  $\alpha$ , como se muestra en la Figura 7.13. El caso se modela como *plain-strain*, y como propiedades mecánicas se toman  $E = 3 \cdot 10^7$  y  $\nu = 0,3$ . Dado que se quiere analizar la dirección de propagación de la fractura, se impone como parámetro energético del material  $\mathcal{G}_c = 0$ , ya que, de esta manera, la fractura crecerá siempre.

En primer lugar, se investiga como influyen los aspectos numéricos del problema en la dirección de propagación. En particular, se analiza la influencia del refinamiento, caracterizado por el número de elementos de la malla, el aumento de longitud de fractura en cada paso  $da$ , y, como en casos anteriores, el radio de integración utilizado para el cálculo de la integral  $J$ . En base a esto, se procede a resolver este caso, con  $\alpha = 30^\circ$ , modificando uno de los parámetros antes nombrados y dejando los demás constantes, de manera similar al enfoque presentado por Fries y Baydoun. En particular, para analizar la variación de  $r_d$ , se utilizó un mallado de  $41 \times 41$  elementos y un aumento de longitud de fractura de 0,025 en cada paso, para el análisis de la variación de la longitud de fractura, se utilizó nuevamente un mallado de  $41 \times 41$  elementos con un radio de integración fijo dado por  $r_d/l_e = 3$ , mientras que para el análisis de propagación al refinar la malla, se utilizó el mismo radio de integración ( $r_d/l_e = 3$ ), con un aumento de longitud de fractura de 0,00625.

En las Figuras 7.14, 7.15 y 7.16, se muestra la propagación de las fracturas obtenidas para los diferentes casos, variando los parámetros. Además, en las mismas figuras, se agregan, como comparación, la propagación de fracturas obtenidas por Fries y Baydoun.

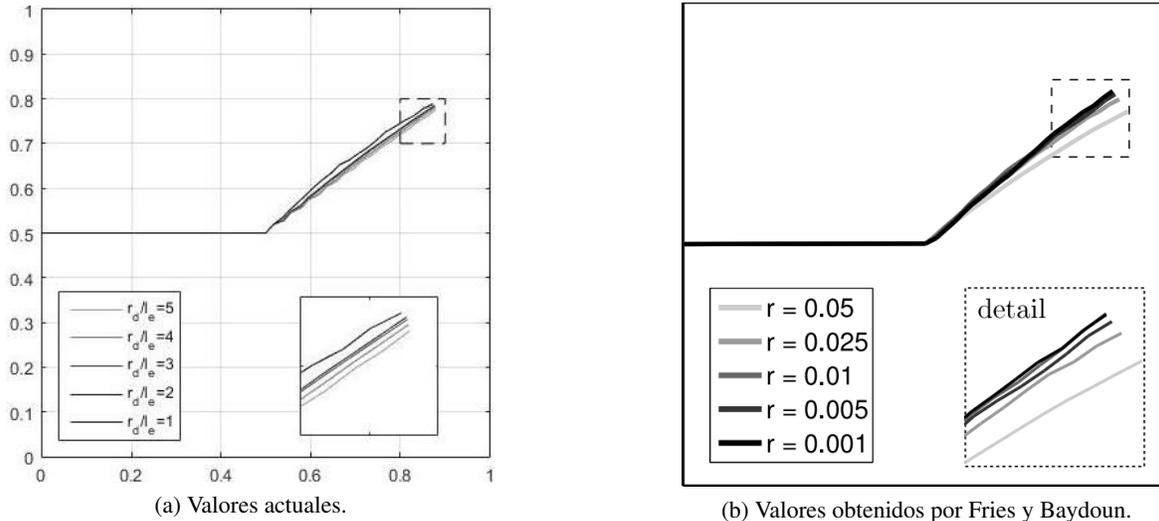


Figura 7.14: Propagación de la fractura para diferentes valores del radio de integración.

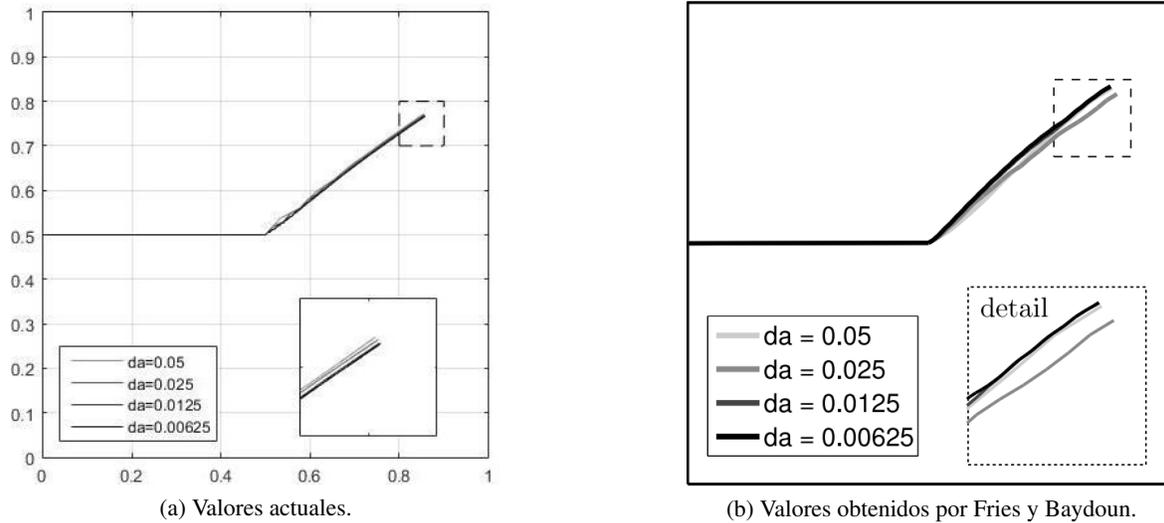


Figura 7.15: Propagación de la fractura para diferentes valores de  $da$ .

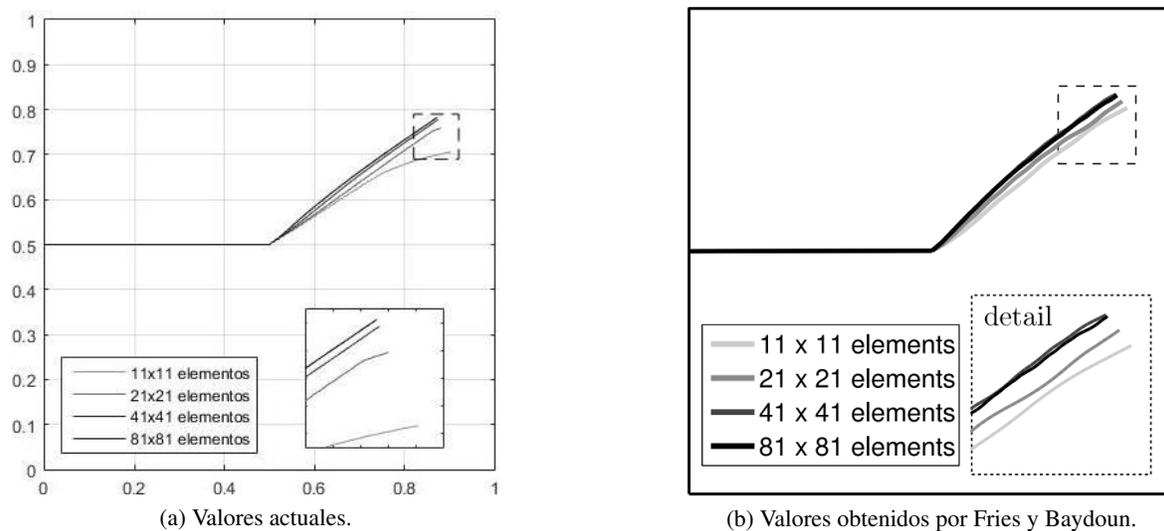


Figura 7.16: Propagación de la fractura para diferentes refinamientos.

Cualitativamente, puede observarse que las fracturas obtenidas son similares para prácticamente todos los casos, y que la grieta propagará en línea recta en una dirección aproximadamente a  $40^\circ$  respecto del eje horizontal. Este ángulo de propagación es similar al obtenido por Fries y Baydoun, e implica, como es de esperarse debido al valor del ángulo  $\alpha$ , que el caso se corresponde a un modo de fractura mixto.

Es importante remarcar que, tal como se muestra en el trabajo de Fries y Baydoun, en este trabajo también se encuentra que, a mayor radio de integración, el ángulo de propagación es menor, mientras que, al aumentar el refinamiento, el ángulo de propagación aumenta, tendiendo cada vez más a los  $40^\circ$  nombrados anteriormente. En relación a la variación del aumento de longitud de fractura en cada paso, se encuentra

que, si bien para los valores de  $da$  más grandes se encuentran pequeñas oscilaciones en el comienzo de la propagación, los resultados son en general muy similares y prácticamente no difieren entre sí.

Luego, se estudia la variación de la propagación de la fractura al modificar el ángulo  $\alpha$ , que determina la dirección de los desplazamientos. Para este análisis, se toman valores de  $\alpha$  entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ , utilizando una malla de  $81 \times 81$  elementos con  $r_d/l_e = 2$  y  $da = 0,025$ , valores similares a los utilizados en el trabajo de Fries y Baydoun. En la Figura 7.17, se muestran las fracturas obtenidas para los distintos valores de  $\alpha$  para este trabajo y para el trabajo de Fries y Baydoun. Se encuentra que las fracturas propagadas son similares en ambos casos y que cumplen con lo esperado teóricamente, como en el caso de  $\alpha = 90^\circ$ , correspondiente a un modo de fractura  $K_I$  puro, donde la fractura crece en dirección horizontal.

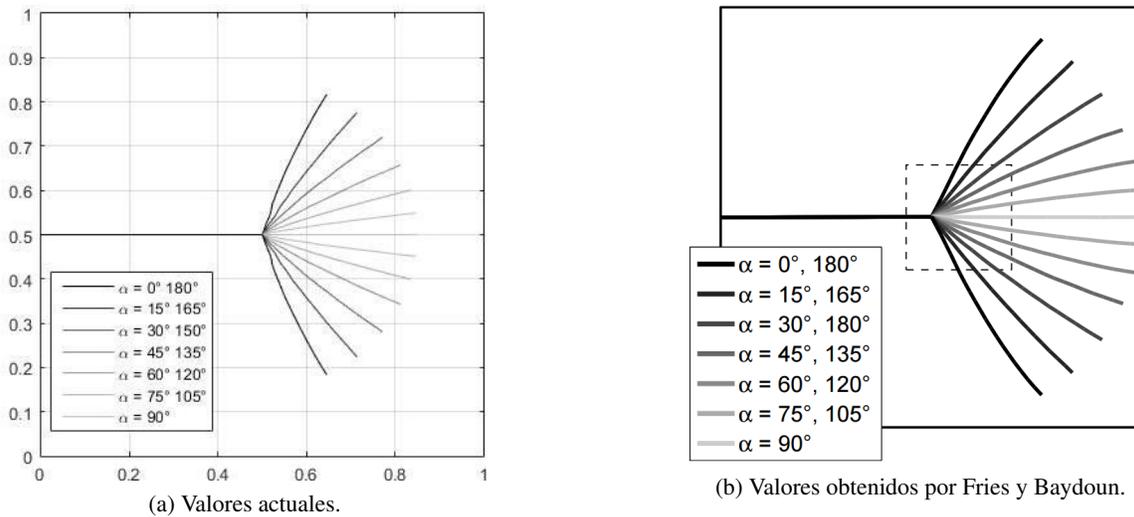


Figura 7.17: Propagación de la fractura para diferentes valores del ángulo de desplazamientos  $\alpha$ .

Para observar mejor cuantitativamente la variación del ángulo de propagación con la dirección de los desplazamientos, se muestra en la Figura 7.18, los ángulos de propagación  $\theta_c$  obtenidos para cada grieta como función de  $\alpha$ . En el mismo, puede observarse lo dicho para el modo  $K_I$  correspondiente a  $\alpha = 0^\circ$ , y puede observarse que para valores de  $\alpha = 0^\circ$  y  $\alpha = 180^\circ$ , valores dominados por el modo  $K_{II}$ , el ángulo de propagación se encuentra alrededor de  $\pm 65^\circ$ , valores muy similares a los resultados de Fries y Baydoun ( $\pm 64^\circ$ ).

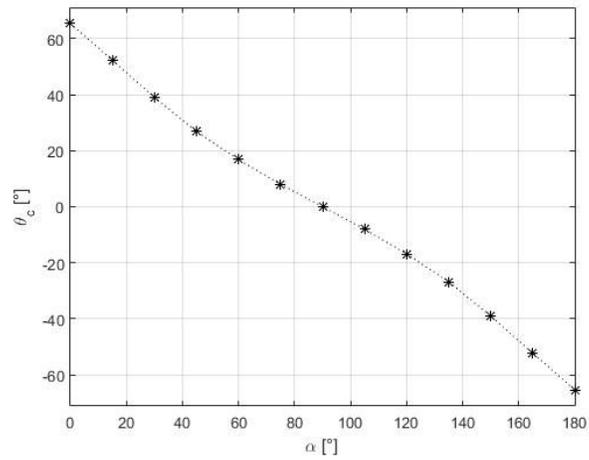


Figura 7.18: Valores del ángulo de propagación  $\theta_c$  para distintos valores de  $\alpha$ .

## 7.2 Modelo de la Ecuación de Lubricación

Para la validación del modelo de la Ecuación de Lubricación (ecuación 5.1), se resuelven casos donde es posible obtener una solución exacta. Para lograr esto, se impone una geometría de fractura  $w(s)$  y se resuelve el campo de presiones para dicha geometría.

### 7.2.1 Flujo entre placas planas paralelas sin *leak-off*

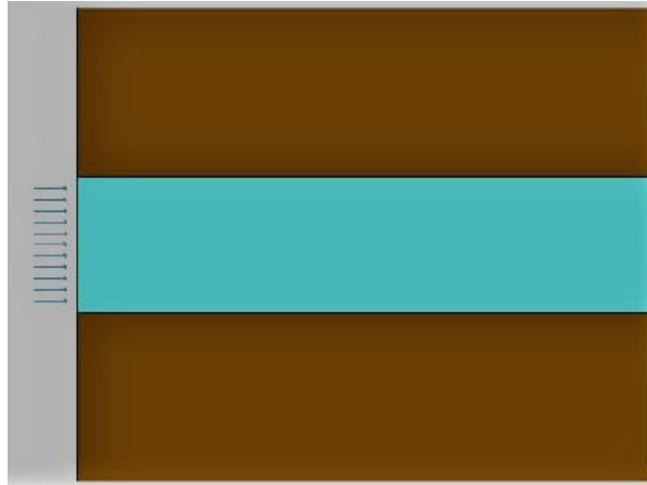


Figura 7.19: Flujo entre placas planas paralelas.

En primer lugar, se resuelve la ecuación para el caso estacionario de un fluido entre 2 placas planas paralelas (Figura 7.19). Para este caso, el ancho  $w(s)$  será constante e igual a un valor  $w_0$  a lo largo de todo el dominio. Como condiciones de borde, se impone el caudal  $Q'_0$  inyectado en la entrada ( $s = 0$ ) y la presión  $p_0$  en el final del dominio ( $s = a$ ), para las cuales la solución exacta de la ecuación es:

$$p_{exacta}(s) = p_0 + \frac{12\mu Q'_0}{w_0^3}(L - s) \quad (7.2)$$

Los valores de los parámetros utilizados son:  $Q'_0 = 0,01 \text{ m}^2/\text{seg}$ ,  $w_0 = 0,001 \text{ mm}$ ,  $\mu = 0,001 \text{ Pa} \cdot \text{seg}$ ,  $a = 1 \text{ m}$  y  $p_0 = 0 \text{ Pa}$ .

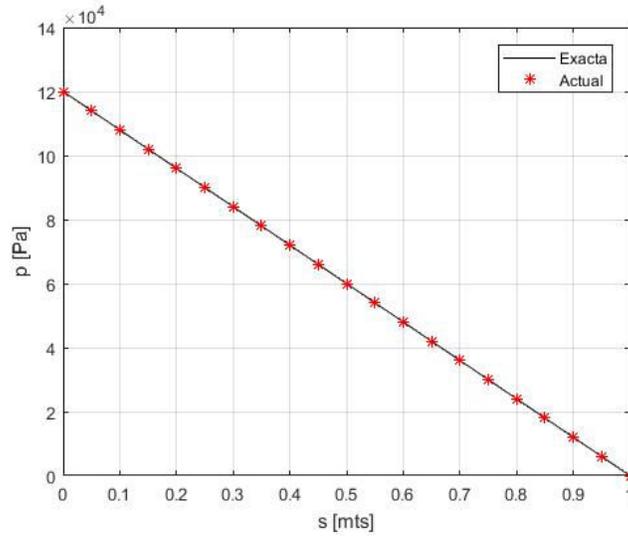
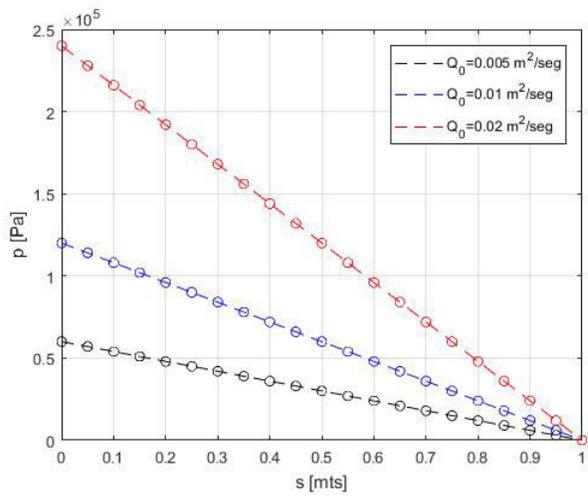


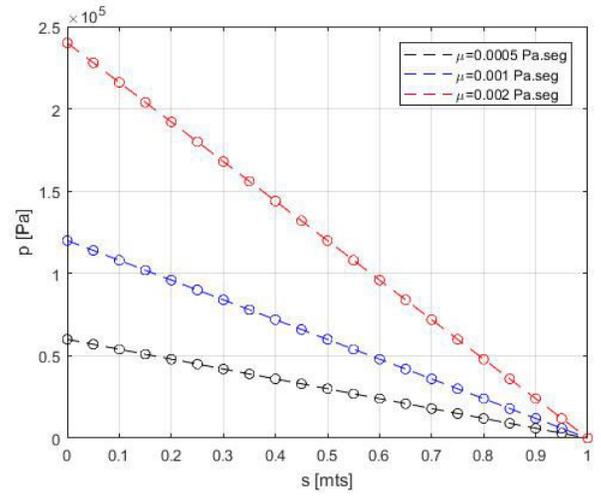
Figura 7.20: Campo de presiones calculado para el caso entre placas planas sin *leak-off*.

En la Figura 7.20, se muestra el campo de presiones obtenido numéricamente con 20 elementos superpuesto a la solución exacta. Se observa que la solución numérica coincide exactamente con la solución exacta, dado que la misma es lineal y se utilizan funciones de forma de tipo lineal para el cálculo por Elementos Finitos.

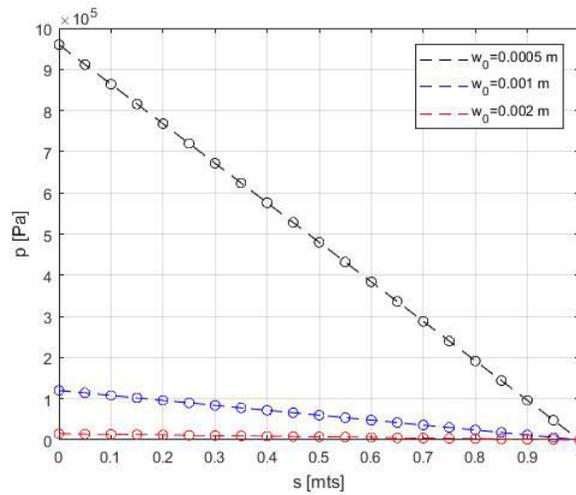
En las Figuras 7.21a, 7.21b y 7.21c, se observan los resultados obtenidos al variar el caudal inyectado  $Q'_0$ , la viscosidad  $\mu$  y el ancho  $w_0$  respectivamente, y se comparan los mismos con la solución exacta. Se observa que, como es de esperar, las soluciones obtenidas coinciden con la solución exacta y que, como indica la solución exacta, al aumentar el caudal inyectado  $Q'_0$  o la viscosidad  $\mu$ , la presión aumenta, mientras que, al aumentar el ancho  $w_0$ , la presión disminuye.



(a) Presión calculada para distintos valores de  $Q_0^1$ .



(b) Presión calculada para distintos valores de  $\mu$ .



(c) Presión calculada para distintos valores de  $w_0$ .

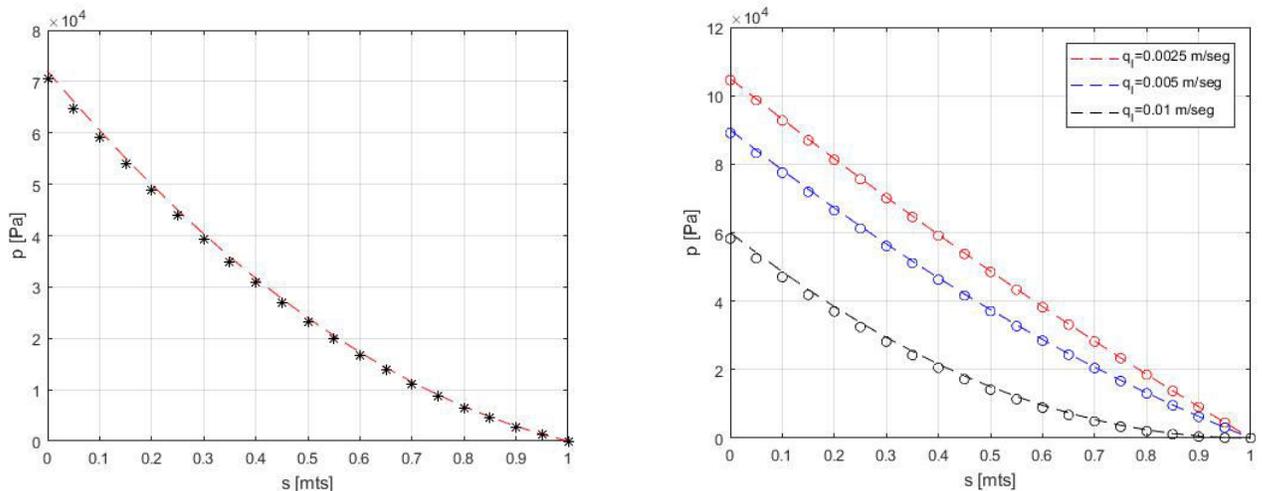
Figura 7.21: Resultados obtenidos para un flujo entre placas planas paralelas sin *leak-off* para distintos valores de  $Q_0^1$ ,  $\mu$  y  $w_0$ .

### 7.2.2 Flujo entre placas planas paralelas con *leak-off* constante

Para esta situación, se agrega al caso anterior un término de *leak-off* constante  $q_l''$ , que indica la pérdida de caudal por unidad de longitud. Resolviendo la ecuación 5.1 para este caso, se obtiene la solución exacta, la cual agrega un término cuadrático a la solución del caso anterior:

$$p_{exacta}(s) = p_0 + \frac{12\mu Q'_0}{w_0^3}(a-s) + \frac{12\mu q_l''}{w_0^3}(a^2 - s^2) \quad (7.3)$$

Se utilizan los mismos valores de parámetros que en el caso anterior, y se agrega el término de *leak-off* con un valor de  $q_l'' = 0,008 \frac{m^2}{seg}$ .



(a) Campo de presiones calculado para el caso entre placas planas con *leak-off* constante. (b) Campo de presiones calculado para distintos valores de  $q_l''$ .

Figura 7.22: Resultados obtenidos para un flujo entre placas planas paralelas con *leak-off* constante.

En la Figura 7.22a, se muestra el campo de presiones obtenido comparado con la solución teórica de la ecuación 7.3. Se observa que, nuevamente, los resultados obtenidos con el modelo numérico son similares a la solución teórica. En la Figura 7.22b, se muestra el campo de presiones obtenido al variar el término de *leak-off*. Se observa que, cuanto mayor es el término, menor es la caída de presión y, por lo tanto, menor es la presión en la entrada (debido a que la presión en la salida se encuentra fija). Se observa que existe un valor  $q_l''$  límite por encima del cual existen valores de presión negativos en ciertas partes del dominio. Esto se debe a que el caudal inyectado no alcanza para superar el efecto de *leak-off*, por lo que existe parte del dominio donde no llega fluido. Por el contrario, cuanto menor es el término de *leak-off*, mayor es la caída de presión, siendo mayor la presión en la entrada. El caso límite ocurre cuando no existe *leak-off*, llegando a la solución de la ecuación 7.2.

Para estudiar la convergencia del modelo numérico, se resuelve el problema con diferentes números de elementos y se calcula un error respecto de la solución teórica como:

$$\varepsilon_p = \frac{|p_{exacta}(0) - p_{num}(0)|}{p_{exacta}(0)}$$

donde  $p_{num}$  es el valor obtenido por el modelo numérico.

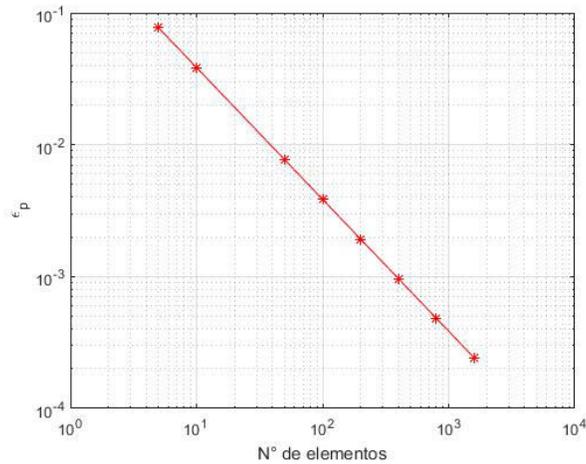


Figura 7.23: Error del modelo numérico respecto de la solución teórica.

En la Figura 7.23, se muestran los valores de este error  $\epsilon_p$  para diferentes números de elementos. Se observa que al refinar el mallado, el error disminuye, lo que muestra que el modelo converge a la solución teórica.

### 7.2.3 Flujo dentro de una fractura tipo KGD

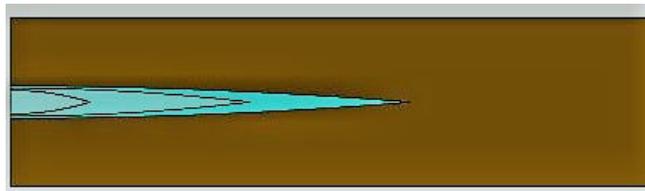


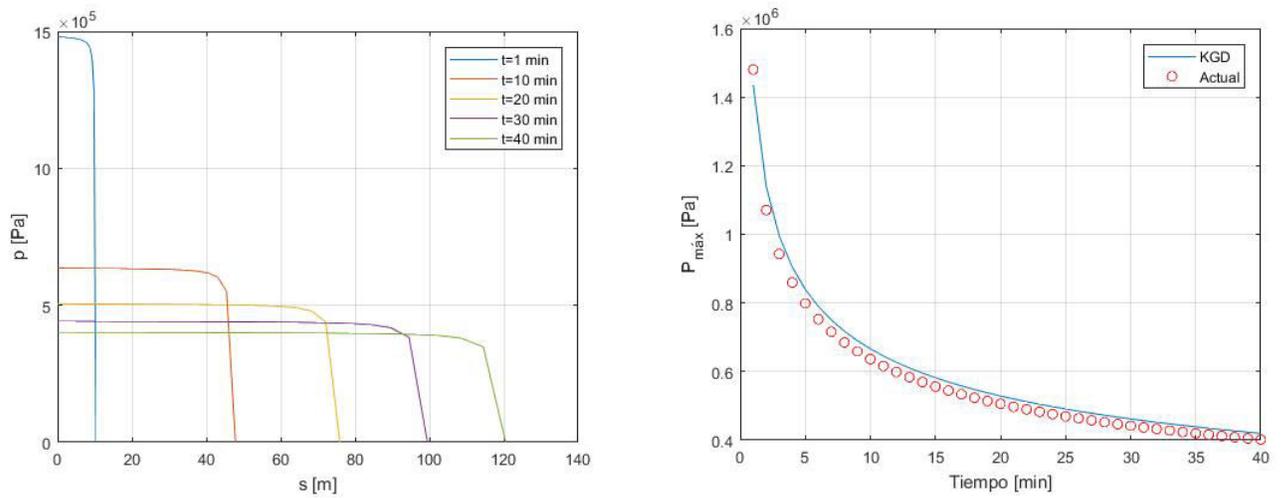
Figura 7.24: Fractura en modelo KGD.

Como último caso, se impone una fractura cuyo ancho sigue una función cuadrática de acuerdo a la ecuación:

$$w(s) = w_0 \left[ 1 - \left( \frac{s}{a} \right)^2 \right]$$

donde  $w_0$  toma el valor del ancho máximo calculado por el modelo KGD y el largo  $L$  también toma su valor del largo de la fractura de acuerdo al modelo KGD (Figura 7.24).

Con estos parámetros de entrada y las mismas condiciones de borde que en los casos anteriores, se resuelve la ecuación 5.1 para diferentes pasos de tiempo obteniendo la distribución de presiones en cada uno de ellos. Para todos los tiempos, el número de elementos permanece constante (20 elementos) pero, al variar el largo de la fractura, varía el largo de cada elemento.



(a) Presión calculada en una fractura tipo KGD en distintos tiempos. (b) Presión en la entrada de la fractura obtenida por el modelo KGD y por el modelo numérico.

Figura 7.25: Resultados del modelo numérico comparados con el modelo KGD

En la Figura 7.25a se muestran las diferentes distribuciones de presiones obtenidas para diferentes tiempos. Se observa que el perfil es similar en cada tiempo, pero la caída de presión entre la entrada y la salida es menor a medida que avanza la fractura. En la Figura 7.25b, se muestran los valores de presión en la entrada de la fractura obtenidos mediante el modelo numérico y comparado con el modelo KGD. Se observa que las curvas son similares para ambos modelos.

## 7.3 Acople FSI

La validación del modelo acoplado se realiza comparando los resultados obtenidos de un caso de Fracturación Hidráulica con el modelo KGD. De acuerdo con este modelo, el largo de fractura y la presión y el ancho en la entrada de la fractura pueden calcularse como:

$$a(t) = \left( \frac{16}{21\pi^3} \frac{E' Q_0^3}{\mu} \right)^{\frac{1}{6}} \cdot t^{\frac{2}{3}}$$

$$w(0,t) = \left( \frac{5376}{\pi^3} \frac{\mu Q_0^3}{E'} \right)^{\frac{1}{6}} \cdot t^{\frac{1}{3}}$$

$$\Delta p(0,t) = \left( \frac{21}{16} \mu E'^2 \right)^{\frac{1}{3}} \cdot t^{-\frac{1}{3}}$$

Como el modelo KGD plantea una fractura de forma elíptica, sabiendo el largo  $a(t)$  y el ancho máximo  $w(t)$ , es posible calcular su volumen por unidad de espesor como:

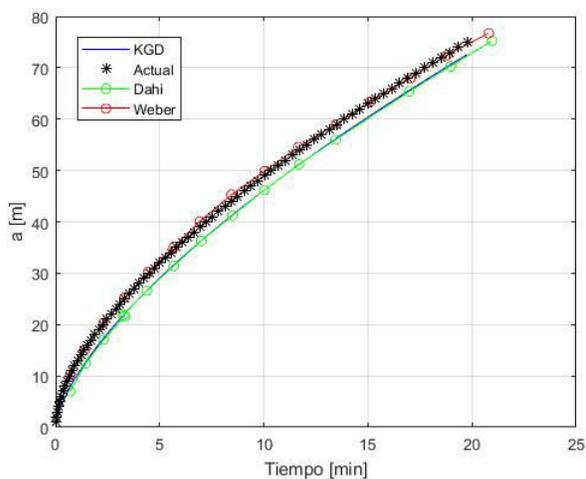
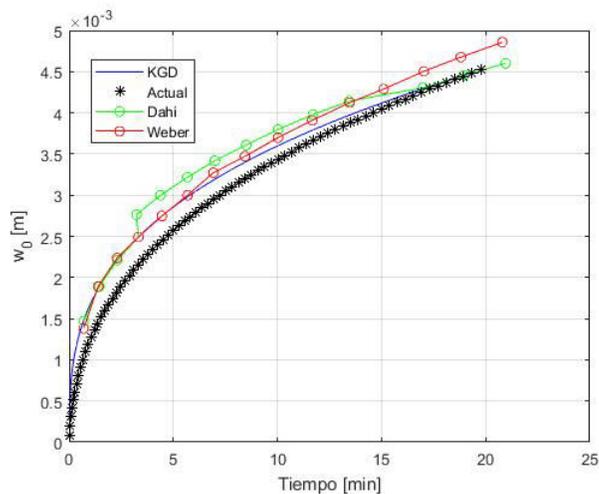
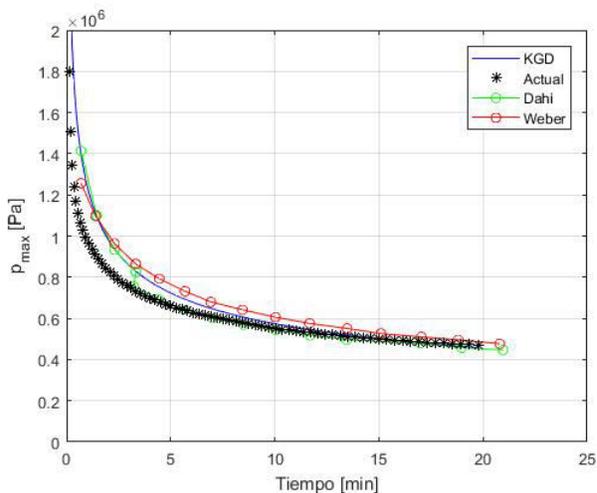
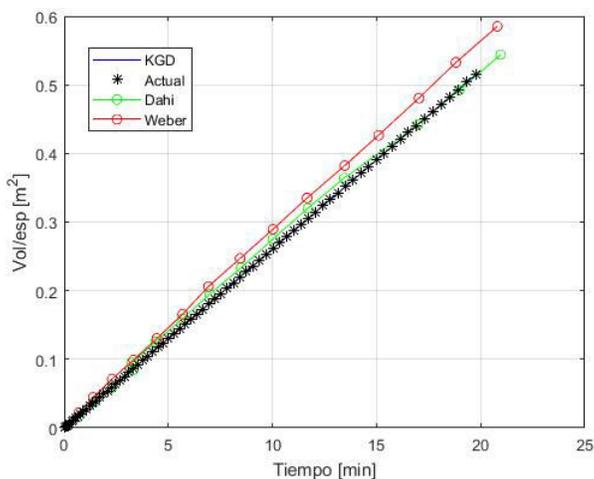
$$\frac{Vol}{esp} = \frac{\pi}{2} a(t) \cdot w(t)$$

Estas ecuaciones se utilizan para validar el modelo numérico acoplado.

### 7.3.1 Modelo KGD sin *leak-off*

Se estudia la validación de ambos modelos acoplados resolviendo un problema de Fracturación Hidráulica. Para esto se utiliza el caso resuelto por Dahi [25] y Weber [8], donde se fractura un bloque rectangular de espesor  $e = 100 \text{ ft}$  de material con  $E = 4 \cdot 10^6 \text{ psi}$ ,  $\nu = 0,25$  con un fluido cuya viscosidad es de  $\mu = 100 \text{ cP}$  inyectado a un caudal de  $5 \text{ bbl/min}$ . Se utiliza un dominio rectangular de  $81 \text{ m} \times 21 \text{ m}$  y se ubica una fractura inicial de  $1,5 \text{ m}$ .

El mallado del sólido se realiza con elementos cuadrados Q4 de largo  $\Delta l = 1 \text{ m}$  y el largo de propagación en cada caso es  $\Delta a = 1 \text{ m}$ . Como condiciones de borde se coloca simetría en  $x$  en el borde izquierdo y se restringen los movimientos en los otros bordes para todas las dimensiones. Respecto del fluido, como en los casos de validación anteriores, se impone el caudal en la entrada y la presión en la salida, la cual es de  $0 \text{ Pa}$ .

(a) Largo de fractura  $a$ .(b) Ancho de fractura en la entrada  $w_{max}$ .(c) Presión en la entrada  $p_{max}$ .

(d) Volumen de la fractura por unidad de espesor.

Figura 7.26: Resultados obtenidos para un Problema de Fracturación Hidráulica y comparación con el modelo KGD.

En las Figuras 7.26a, 7.26b, 7.26c y 7.26d se observan los resultados obtenidos para el largo, el ancho máximo, la presión en la entrada y el volumen respectivamente, superpuestos a las ecuaciones del modelo KGD y a los resultados obtenidos por Dahi y Weber. Se observa que los valores obtenidos son similares a los del modelo KGD y a los de trabajos previos. Las pequeñas diferencias que pudiesen existir pueden deberse a imperfecciones por el mallado o la integración numérica, ya que Dahi y Weber no indican ni el mallado ni la forma en la que integran en sus trabajos.

### 7.3.2 Modelo KGD con *leak-off*

Una vez validado el modelo acoplado, se agrega el efecto de *leak-off* modelado mediante la ley de Darcy como se explicó anteriormente. Para reservorios no convencionales, la permeabilidad  $\kappa$  tiene valores muy bajos de entre  $10^{-3} mD$  a  $10^{-1} mD$ . Se resuelve el modelo con  $\kappa = 10^{-1} mD = 10^{-16} m^2$  y se compara los resultados con el modelo sin *leak-off*.

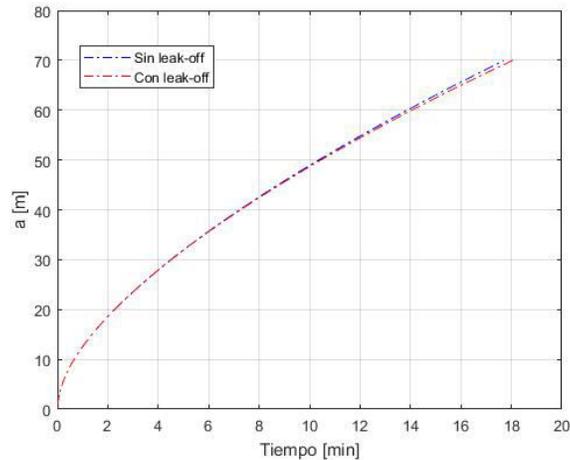


Figura 7.27: Largo de fractura para el modelo con y sin *leak-off*,

En la Figura 7.27, se muestra el largo de fractura para el modelo con *leak-off*, comparado con el resultado sin *leak-off*. Se observa que ambos modelos siguen curvas similares, pero que el modelo con *leak-off* necesita más tiempo para llegar al mismo largo. El hecho de que las curvas sean prácticamente similares se debe al bajo valor de  $\kappa$  utilizado. Resultados similares respecto del largo de fractura fueron encontrados por Norbeck [28].

Finalmente, se resuelve el modelo utilizando un *leak-off* constante para constatar los resultados mostrados en la validación del modelo de fluidos. En la Figura 7.28 puede observarse la presión máxima en la entrada obtenida con un término de *leak-off* constante comparado con la presión obtenida en la sección anterior (sin *leak-off*).

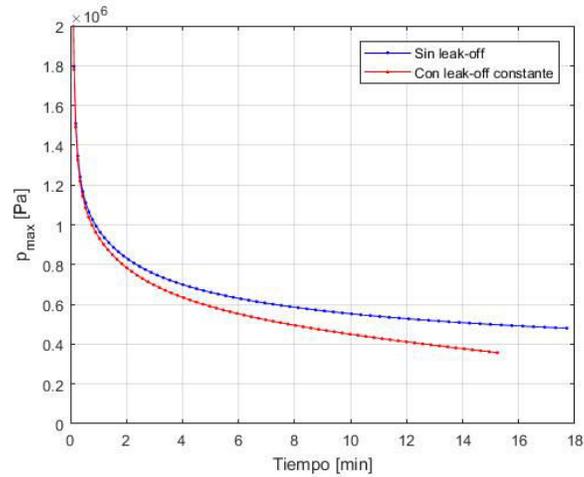


Figura 7.28: Presión máxima para el modelo con *leak-off* constante,

Se observa que, tal como ocurre en la Figura 7.22b, la presión en la entrada disminuye para el modelo con *leak-off*. Debido a que el caudal por *leak-off* aumenta con el largo de la fractura, se llegará a un largo de fractura límite para el cual se deberá aumentar el caudal inyectado para compensar las pérdidas por *leak-off*.

# Capítulo 8

## Conclusiones

En primer lugar la validación del modelo numérico XFEM con resultados muy satisfactorios indica que el mismo es apto para la resolución de problemas en dominios discontinuos y que la posibilidad de evitar el remallado lo hace ideal para la resolución de problemas de propagación de fracturas.

El uso de un modelo unidimensional de la ecuación de lubricación no mostró diferencias importantes en cuanto a los resultados de los modelos teóricos, por lo que se puede concluir que puede utilizarse para modelar este tipo de problemas y que su uso no solo es posible, sino que es recomendable debido a la reducción del número de grados de libertad que conlleva, reduciendo de esta manera el tiempo total de cálculo.

El modelo de propagación de fracturas cumplió el objetivo de predecir correctamente la dirección de propagación para los casos de validación y solamente mostró leves diferencias debido a errores numéricos. Estas diferencias se minimizan al utilizar un mallado más refinado.

El modelado de *leak-off* para reservorios no convencionales no influye en forma relevante en los resultados finales, debido a los bajos valores de permeabilidad de la roca.

Finalmente, de acuerdo a lo mostrado en este trabajo, se puede concluir que el objetivo principal se ha logrado. Si bien existen leves diferencias entre los resultados obtenidos entre el modelo KGD y el modelo numérico de este trabajo, los resultados son similares y el código desarrollado cumple su función.

Si bien, como se explicó anteriormente, los resultados de este trabajo fueron satisfactorios, el mismo refiere a una geometría bidimensional, por lo que uno de los trabajos futuros a realizar es la extensión de esta implementación a un modelo tridimensional que permita acercarse más a lo que ocurre en la realidad.

El transporte de material propante y el cálculo de la presión poral no se encuentran incluidos en este trabajo, debido a que el mismo es una primera aproximación. Por lo tanto, se debe estudiar la posibilidad de extender el problema incluyendo estas variables y la resolución del mismo utilizando un método XFEM como el de este trabajo.

El uso de un esquema de acople que permite tratar a los problemas individualmente resultó beneficioso y es recomendable para trabajos futuros, debido a que permite combinar distintas técnicas o métodos numéricos de acuerdo a las características de cada problema. Esto puede llevar a diversas combinaciones de métodos capaces de resolver ciertas partes de un problema general.

# Referencias

- [1] A. Peirce J. Desroches J. Adachi, E. Siebrits. Computer simulation of hydraulic fractures. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2007.
- [2] <http://www.shaleenargentina.com.ar/hidrocarburos-no-convencionales>.
- [3] Harris Cander. What are unconventional resources? a simple definition using viscosity and permeability. AAPG Annual Convention and Exhibition, Long Beach, California, April 22-25, 2012, 2012.
- [4] US Environmental Protection Agency.
- [5] Zuorong Chen. Implementation of the xfem for hydraulic fracture problems, 06 2013.
- [6] Amir R. Khoei. *Extended Finite Element Method*. John Wiley & Sons Inc, 2015.
- [7] M. Ortiz and A. Pandolfi. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(9):1267–1282, mar 1999.
- [8] N. Weber, P. Siebert, K. Willbrand, M. Feinendegen, C. Clauser, and T. P. The XFEM with an explicit-implicit crack description for hydraulic fracture problems. In *Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing*. InTech, may 2013.
- [9] R.P. Nordgren. Propagation of a vertical hydraulic fracture. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 12(04):306–314, aug 1972.
- [10] T.K. Perkins and L.R. Kern. Widths of hydraulic fractures. *Journal of Petroleum Technology*, 13(09):937–949, sep 1961.
- [11] J. Geertsma and F. De Klerk. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures. *Journal of Petroleum Technology*, 21(12):1571–1581, dec 1969.
- [12] J.M. Melenk and I. Babuška. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):289–314, dec 1996.
- [13] IVO BABUŠKA, UDAY BANERJEE, and JOHN E. OSBORN. GENERALIZED FINITE ELEMENT METHODS — MAIN IDEAS, RESULTS AND PERSPECTIVE. *International Journal of Computational Methods*, 01(01):67–103, jun 2004.
- [14] Nicolas Moes, John Dolbow, and Ted Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131–150, sep 1999.
- [15] Michael J. Hunsweck, Yongxing Shen, and Adrian J. Lew. A finite element approach to the simulation of hydraulic fractures with lag. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37(9):993–1015, feb 2012.

- [16] H. M. Westergaard. Stresses at a crack, size of the crack and the bending of reinforced concrete. *Proc. American Concrete Institute*, (30):93–102, 1934.
- [17] M. L. Williams. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *J. Appl. Mech.*, 74:526–528, 1952.
- [18] G. P. Cherepanow. The propagation of cracks in a continuous medium. *J. Appl. Math. Mech.*, 31(3):503–512, 1967.
- [19] J. R. Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2):379, 1968.
- [20] L. A. de Vedia. *Mecanica de fractura*. Proyecto multinacional de investigacion y desarrollo en materiales OEA-CNEA, 1986.
- [21] J. F. Yau, S. S. Wang, and H. T. Corten. A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 47(2):335, 1980.
- [22] Thomas-Peter Fries and Malak Baydoun. Crack propagation with the extended finite element method and a hybrid explicit-implicit crack description. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89(12):1527–1558, nov 2011.
- [23] F. Erdogan and G. C. Sih. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering*, 85(4):519, 1963.
- [24] Chongyu Hua. An inverse transformation for quadrilateral isoparametric elements: Analysis and application. *Finite Elements in Analysis and Design*, 7(2):159–166, nov 1990.
- [25] Arash Dahi Talegani. *Analysis of hydraulic fracture propagation in fractured reservoirs: an improved model for the interaction between induced and natural fractures*. PhD thesis, The University of Texas at Austin, 2009.
- [26] Awais Ahmed. extended finite element method(xfem)- modeling arbitrary discontinuities and failure analysis. Master's thesis, Istituto Universitario di Studi Superiori di Pavia, April 2009.
- [27] H. L. Ewalds and R. J. H. Wanhill. *Fracture Mechanics*. Hodder Arnold, 1984.
- [28] Jack Norbeck and Roland Horne. An embedded fracture modeling framework for fluid flow, geomechanics, and fracture propagation, 10 2014.