INSTITUTO TECNOLOGICO DE BUENOS AIRES
UNIVERSIDAD PRIVADA

TESIS DE GRADO
EN INGENIERÍA INDUSTRIAL

OPTIMIZACIÓN DEL RETORNO EN UN SISTEMA CON INCERTIDUMBRE: APLICACIÓN EN UN JUEGO DE CASINO

Autor: Ignacio Roccatagliata
Director de Tesis: Ing. Roberto Mariano García

Año 2007

A Fernando y Susana Roccatagliata

El objeto de este trabajo es poder demostrar la posibilidad de lograr que el retorno esperado en un jugador jugando a un juego de cartas llamado “Siete y Medio” resulte positivo. Para ello se utilizan técnicas como las cadenas de Markov, opciones reales, programación dinámica, y un método de manejo de dinero conocido como método Kelly. En el trabajo se muestra como ejemplo cómo una técnica muy aplicada conocida como la Martingala resulta equivocada en su hipótesis, justificando aún más el desarrollo de éste trabajo.

Con las herramientas mencionadas se calcularon las probabilidades y el retorno esperado para el jugador, optimizando su juego en función de las cartas restantes en el mazo y la carta que poseía la banca. Por último se calculó la probabilidad de que la mano que el jugador fuera a jugar tuviera un retorno esperado positivo y se calculó el retorno esperado para dichas manos, simulando 2000 manos consecutivas en dicha situación, mostrando que el capital se incrementa de manera exponencial al aplicar lo propuesto en este trabajo.

The purpose of this work is to demonstrate the possibility of turning the expected return of a player who is playing a game called “Siete y Medio” into a positive one. In order to achieve it, techniques like Markov chains, real options, dynamic programming and a money management system known as Kelly system were used. In this work a popular method of betting known as Martingale is shown as an example, proving it’s hypothesis are wrong and justifying the development of this work.

Using the techniques mentioned, the expected return for the player was calculated, optimizing his game according to the cards that were left in the deck, and the card that the croupier had on his hand. Finally, the probability for the player to face a hand in which the expected return were positive was calculated, and 2000 hands were simulated showing that the expected bankroll would increase exponentially provided this what is said in this work is applied.

I INTRODUCCIÓN

I.1 BREVE DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El problema de la optimización del retorno es de sumo interés en el análisis de cualquier proyecto. Las bases por las cuales se evalúan proyectos son sin duda económico/financieras, y por lo tanto, el resultado de dicha evaluación definirá la aceptación, o no, del mismo.

El factor de incertidumbre se encuentra presente ante cualquier decisión, y dependiendo de la aversión al riesgo de cada persona, se estará dispuesto a soportar cierta magnitud de riesgo es sus inversiones. No obstante, ningún inversor estaría dispuesto a soportar un riesgo mayor al necesario, y es por ello que la utilización de técnicas para la minimización del riesgo, y la maximización del retorno, son utilizadas.

En el caso presentado se estudia la optimización del retorno en un juego de casino (7 y medio, cuya modalidad es similar al blackjack), el cual es un sistema claramente dominado por las probabilidades. Existen claras analogías entre lo que sucede en un juego dominado por las probabilidades y lo que sucede en mercados financieros, sin ir mas lejos, una apuesta en cualquier juego de azar es idéntica a la inversión en un futuro financiero. En un caso se realiza una apuesta, mientras que en el otro se paga una prima, y al cabo de un intervalo de tiempo se produce un retorno. La diferencia radica en el lapso de tiempo esperado, lo cual para el análisis matemático es indiferente.

Es de saber popular que las probabilidades de ganar de un casino son mayores que las probabilidades de ganar de los jugadores (matemáticamente el retorno esperado para un jugador en cualquier de casino es negativo), de no ser así, los casinos incurrirían en pérdidas constantemente. Esto resulta cierto para la mayoría de los casos, dado que los apostadores en pocos casos utilizan estrategias, y en los casos en que sí lo hacen no logran que dicha probabilidad se torne a favor de ellos. Dichas estrategias no suelen tener en cuenta la información provista por el medio, y por ende, se basan en un método repetitivo de jugar en función del estado en que se encuentran (sus cartas y las de la banca), lo cual sería como invertir en una acción únicamente teniendo en cuenta la cotización actual, sin mirar si la misma se encuentra en una tendencia alcista o a la baja.

Aprovechando la información provista por el juego, el apostador puede ir modificando su estrategia de juego en función de las cartas que hubieran salido, optimizando el retorno esperado en cada acción. Para ello se busca encontrar un algoritmo que permita calcular en qué momentos las probabilidades se encuentran a favor del jugador, y de que forma éste debe apostar para que su capital se incremente eficientemente en el largo plazo.

El largo plazo es un concepto fundamental en éste análisis, ya que todos los cálculos que se realizan son válidos cuando la cantidad de repeticiones permita que los resultados experimentales concuerden con los teóricos de acuerdo a lo establecido por la "Ley de los grandes números", que es explicada en éste análisis.

I.2 IMPORTANCIA DEL PROBLEMA Y SU SOLUCIÓN

Como se menciona en el Capítulo 1, la minimización del riesgo en un proyecto, y a su vez la búsqueda del máximo retorno posible son factores fundamentales que se observan en una inversión. Un inversionista no va a estar dispuesto a correr riesgos innecesarios si existe la posibilidad de evitarlos, y al mismo tiempo, va a buscar el máximo retorno posible dado un cierto nivel de riesgo.

La elección de buscar optimizar el retorno en un juego de casino dista mucho del típico concepto de "ganarle al casino". Los análisis y enfoques utilizados pueden ser aplicados en otros sistemas con el fin de obtener conclusiones similares. Habiendo comentado esto, queda en claro que el motivo de este estudio es meramente académico y lo que se busca es un mayor conocimiento de los sistemas dominados por las probabilidades, y el uso de técnicas para comprenderlos y optimizarlos.

La importancia de buscar maneras de comprender los sistemas radica en que si se posee un desconocimiento del mismo, resulta imposible adoptar una estrategia acorde. Sin estrategia, uno se encuentra librado al azar o es manejado por las estrategias de los competidores, mientras que con un conocimiento del sistema, se pueden desarrollar estrategias y planes de acción ante los distintos escenarios, y ahí es donde radica la importancia de este estudio, en buscar dichas estrategias para cada escenario.

I.3 PASOS A SEGUIR Y CRITERIOS DE ÉXITO

I.3.1 Pasos a seguir

El estudio se abordará de la siguiente manera

- Análisis del sistema, reglas y opciones.
- Modelización del sistema.
- Validación del modelo.
- Planteo de estrategia.
- Evaluación de la estrategia.
- Simulación; análisis de resultados.

I.3.2 Criterios de éxito

Como se menciona, el estudio es meramente académico, y sus objetivos no son del tipo económico. Él éxito del mismo depende exclusivamente de hallar el algoritmo que permita maximizar el retorno manteniendo el riesgo al mínimo.

Se considerará exitoso si se encuentra un dominio posible en el cual el retorno esperado por el jugador resulte positivo. El llevar a la práctica el algoritmo dista del alcance de este proyecto y no será tenido en cuenta como un objetivo del mismo.

II

ESTADO ACTUAL DE LAS INVESTIGACIONES

II.1 ANTECEDENTES

En la actualidad existen diferentes aproximaciones para resolver el problema de la optimización del retorno en los juegos de azar, muchas de ellas basadas en simulaciones de Monte Carlo que simplifica los cálculos matemáticos al permitir a la computadora el realizar todas las combinaciones posibles por fuerza bruta. Otro enfoque muy utilizado por matemáticos es el de buscar una función que describa las probabilidades de ganar de un jugador, dadas las cartas que aún no se han repartido. La desventaja de este enfoque es que se requiere un conocimiento muy elevado de matemática y estadística, y el tiempo de desarrollo puede ser de varios años.

El mayor exponente en el ámbito del estudio de las probabilidades en los casinos es Edward Thorp, matemático nacido en 1932, quién en el año 1962 escribió el libro “Beat the Dealer”, el cual fue la primera prueba matemática de que un jugador podía tener la ventaja respecto al casino al utilizar la información provista en el juego. Gracias a la estrategia desarrollada por Thorp, el retorno esperado de un jugador en Blackjack pasó de ser -0,05 a 0,01 (por unidad apostada); un incremento del 6%. El resultado de -0,05 fue calculado a partir de evaluar una estrategia “óptima” que no utilizaba la información provista, frente a la estrategia de Thorp, analizando las cartas que iban siendo retiradas del mazo y calculando antes de jugar una mano si en la siguiente mano las probabilidades de ganar serían favorables.

El trabajo de Thorp fue llevado a la práctica por él mismo y un compañero, lo que los llevo a ganar miles de dólares en los casinos del mundo. Thorp luego se alejó de los casinos para utilizar los conocimientos adquiridos durante su análisis para aplicarlos en el mercado bursátil y conseguir retornos mucho mayores a los del mercado promedio.

Existen distintas publicaciones en la actualidad que analizan diversas estrategias en el ámbito de los casinos, y más específicamente en el Blackjack. Tal es el caso del “Journal of the American Statistical Association”, el cual recopila papers e informes sobre estadística, entre ellos los que se refieren a los juegos de azar.

II.2 HERRAMIENTAS Y TÉCNICAS UTILIZADAS

Existen diversos enfoques que permiten abordar el cálculo de la esperanza de un sistema gobernado por las probabilidades como es un casino. Un enfoque netamente matemático se centra en la búsqueda de una función que describa las probabilidades al introducirle determinadas variables. Un enfoque exploratorio buscaría simular todas las situaciones posibles y a partir de la información obtenida, encontrar el dominio en el cual el jugador resulta favorecido. Ambos métodos presentan sus ventajas y desventajas.

El método matemático requiere un conocimiento muy profundo del sistema y de las herramientas matemáticas que permitan modelarlo. Ciertamente éste enfoque, realizado correctamente, devuelve resultados mucho más precisos que el enfoque exploratorio, sin embargo el esfuerzo y el tiempo necesario para poder encontrar dicha función que represente el sistema es enorme. Este enfoque era utilizado en los años en que las capacidades de cómputo eran escasas y de difícil acceso para la mayoría.

El otro enfoque, el exploratorio, intenta generar una muestra de todos las situaciones posibles y a partir de ella extraer conclusiones respecto a las probabilidades. Las ventajas de éste método son que no es necesario un conocimiento tan profundo de las herramientas matemáticas, y el tiempo de trabajo se ve reducido ampliamente. Sin embargo, estos beneficios no resultan gratuitos, ya que se pierde precisión en el análisis. Otra desventaja del método es que al aumentar la cantidad de variables, la muestra a generar crece de manera exponencial, dada la combinatoria presente. Existen situaciones que de intentar simularlas por completo, no serían posibles para los computadores personales de hoy en día.

La solución propuesta es la utilización distintas herramientas y buscar una solución de compromiso entre la precisión de las técnicas matemáticas y la facilidad de las técnicas exploratorias.

Para ello se utilizarán las siguientes herramientas y se brinda una breve explicación de las mismas para que el lector se familiarice con ellas. Para un detalle más técnico es recomendable que el lector consulte bibliografía específica.

II.2.1 Cadenas de Markov

El uso de cadenas de Markov es utilizado para sistemas que evolucionan entre distintos estados dada cierta distribución de probabilidades. Dado que un juego de cartas en un casino posee una memoria de las cartas que hayan salido del mazo, la función que define las probabilidades de moverse entre estados se encuentra definida por las cartas que salieron anteriormente, pero nada tiene que ver con el orden de las mismas. Éste es un típico caso de proceso markoviano, sin embargo, ésta técnica no suele ser utilizada por los expertos, a pesar de haberse demostrado que se llega a resultados similares con menor cantidad de trabajo [Michael B. Wakin & Christopher J. Rozell, 1998].

Se denomina cadena finita de Markov a un proceso estocástico consistente en una sucesión de pruebas cuyos resultados X_1, X_2, ... X_n satisfacen las dos propiedades siguientes:

Cada resultado pertenece a un conjunto finito de estados $\{S_1, S_2, S_3,…., S_m\}$ llamado espacio de estados del sistema; si el resultado de la n-ésima prueba es S_1, se dice que el sistema está en el estado S_1 en el n-ésimo paso.

El resultado de una transición depende sólo del estado inmediatamente precedente y no de cualquier otro resultado previo, es decir que resulta indiferente la manera en que se llegó a dicho estado para calcular las probabilidades siguientes. Con cada par de estados (S_i,S_j) se establece la probabilidad P_{ij}, de que S_j suceda inmediatamente después de que suceda S_i. Los números P_{ij} llamados probabilidades de transición pueden obtenerse a partir de un diagrama de relaciones y luego agrupados en forma de matriz (Matriz de transición) (Figuras II.1 y II.2):

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}$$

Figura II.1 Matriz de transición

Figura II.2 Diagrama de transiciones.

El vector de probabilidad que representa la situación inicial se denomina vector de estado inicial P_0. Si se multiplica por la matriz P se obtiene el vector P_1 que representa la situación en el estado 1. Al multiplicar nuevamente por la matriz P se obtiene el vector P_2 que refleja la situación en el estado 2 y así sucesivamente. Como $p_1 = p_0 P,\ p_2 = p_1 P = p_0 P P = p_0 P^2,\ p_3 = p_2 P = p_0 P^2 P = p_0 P^3$ es $p_n = p_0 P^n$ de modo que se puede obtener el vector de estado en un momento o paso cualquiera n multiplicando el vector de estado inicial por la n-ésima potencia de la matriz P.

Si existe un vector estacionario, o vector de tendencia, es decir, que se mantenga en el tiempo, debe cumplir la condición: tP = t Este vector es independiente del vector de estado inicial P_0. La matriz estacionaria surge como $\lim_{n \to \infty} P^n$ siendo cada una de sus filas el vector estacionario t.

En el caso de existir estados absorbentes con $P_{(x,x)}$ = 1 (es decir que la probabilidad de moverse de dicho estado es nula) no existe un vector tendencia, pero es posible calcular la forma en que se distribuirá la matriz de transición. A diferencia de las matrices sin estados absorbentes, esta distribución sí depende del vector $P_{0.}$

En éste trabajo se utilizan cadenas de Markov cuyas probabilidades de transición varían en cada jugada, lo cual incrementa la cantidad de cálculos a realizar en comparación a un proceso markoviano clásico, en el cual la matriz de probabilidades se mantiene constante.

II.2.2 Programación Dinámica

La Programación Dinámica no sólo tiene sentido aplicarla por razones de eficiencia, sino porque además presenta un método capaz de resolver de manera eficiente problemas cuya solución ha sido abordada por otras técnicas y ha fracasado.

Donde tiene mayor aplicación la Programación Dinámica es en la resolución de problemas de optimización. En este tipo de problemas se pueden presentar distintas soluciones, cada una con un valor, y lo que se desea es encontrar la solución de valor óptimo.

La solución de problemas mediante esta técnica se basa en el llamado principio de óptimo enunciado por Bellman en 1957 que dice:

"*En una secuencia de decisiones óptima toda subsecuencia ha de ser también óptima*".

Aunque este principio parece evidente no siempre es aplicable y por tanto es necesario verificar que se cumple para el problema en cuestión.

Para que un problema pueda ser abordado por esta técnica ha de cumplir dos condiciones:

- La solución al problema ha de ser alcanzada a través de una secuencia de decisiones, una en cada etapa.

- Dicha secuencia de decisiones ha de cumplir el principio de óptimo.

En grandes líneas, el diseño de un algoritmo de Programación Dinámica consta de los siguientes pasos:

- Planteo de la solución como una sucesión de decisiones y verificación de que ésta cumple el principio de óptimo.

- Definición recursiva de la solución.

- Cálculo del valor de la solución óptima mediante una tabla en donde se almacenan soluciones a problemas parciales para reutilizar los cálculos.

- Construcción de la solución óptima haciendo uso de la información contenida en la tabla anterior.

II.2.3 Opciones Reales

Las opciones reales son otro pilar en el análisis, y permiten la evaluación de los retornos esperados previos a cada decisión. Un jugador que utiliza una estrategia que no varía en cada jugada no está utilizando toda la información que el juego le ofrece. Mediante el uso de las opciones reales se utiliza la información obtenida mediante los cálculos realizados con las cadenas de Markov para evaluar el retorno esperado en el caso de pedir otra carta, y contrastarlo con la opción de no pedir ninguna, para luego tomar la decisión que maximice su retorno esperado.

El análisis de las opciones reales fue acaso el tema que despertó mayor curiosidad intelectual y el principal tema objeto de investigación en el campo de las finanzas y la economía empresarial durante la década de 1990 y lo sigue siendo en lo que va de la década siguiente. Una opción es el derecho (el derecho pero no la obligación, de ahí que el término correcto a utilizar sea el de opción) a comprar (opción de compra) o a vender (opción de venta) un bien (activo real o financiero) a un precio (precio de ejercicio) en una fecha o dentro de un plazo señalados previamente en un contrato. Los contratos de opción sobre determinados activos reales o mercancías, así como el desarrollo de los correspondientes mercados secundarios, no son nada nuevo en el mundo de la economía y del comercio.

La *Teoría de la valoración de opciones* sobre activos financieros se desarrolló de manera del seminal publicado por Fisher Black y Myron Scholes en 1973, a los que hay que añadir los de Robert Merton y Cox − Rox − Rubinstein, entre otros muchos autores.

Por análisis de opciones reales se entiende el intento de aplicar la metodología de las opciones financieras a la gestión de activos reales, esto es.

Todo proyecto de inversión entraña algún grado de incertidumbre y cierto margen de flexibilidad. Las opciones reales se presentan en planes, proyectos, actuaciones o inversiones flexibles. Como, por ejemplo, abandonar o vender el proyecto de inversión antes de concluirlo, cambiar su uso o su tecnología o prolongar su vida; la opción de elegir una u otra capacidad de una inversión en planta; la flexibilidad de toda inversión en I + D y la elevada incertidumbre que generalizando afecta a este tipo de inversiones; las múltiples opciones de crecimiento que en determinados momentos se le presentan a una empresa, etcétera.

El método más universalmente aceptado para valorar y seleccionar inversiones es el del cash-flow descontado o valor actualizado neto (VAN). Después del desarrollo de la nueva metodología de las opciones reales el VAN ha de ser utilizado con mayor precaución. El VAN puede infravalorar un proyecto de inversión al omitir la valoración de ciertas opciones presentes en el mismo. Puede convenir incluso aceptar un proyecto de inversión con VAN negativo cuando esta cantidad es superada por el valor positivo de una opción real implícitamente contenida en él.

La esperanza matemática calculada haciendo uso de las probabilidades, los árboles de decisión en una o más de una etapas (generalmente binomial o dicotómicas) y las fórmulas de valoración de opciones son herramientas fundamentales de esta nueva metodología o filosofía, una nueva manera de abordar y resolver los problemas de decisión.

Las opciones reales crean valor, tanto mayor cuanto mayor sea la incertidumbre o grado de volatilidad de los flujos de caja esperados. Así mismo el valor de la opción es tanto mayor cuanto mayor sea su vida remanente.

En lo que se refiere a las opciones financieras, el poseedor de una opción, tanto si es de venta como de compra, tiene limitado el riesgo de pérdida al valor pagado por la opción y está protegido frente a las oscilaciones del precio por debajo del precio de ejercicio en el cado de una opción de venta y por encima de dicho precio en el caso de una opción de compra, mientras que sus ganancias pueden ser muy elevadas cuando las oscilaciones del precio son de sentido contrario. De ahí que el valor de una opción sea tanto más elevado cuanto mayor sea la volatilidad del precio del activo subyacente.

En lo que hace al caso de las opciones reales, el decisor no elegirá aquellas ramas que parten de un nudo del árbol de decisión con valor negativo, ni tampoco las incluirá en el cálculo de la esperanza (o las incluye formalmente sustituyendo su valor negativo por el valor cero). La opción se ejerce o la decisión se toma cuando la incertidumbre ha devenido en información. Nunca se ejercerá una opción que empeore la situación inicial o de partida; sólo la ejercerá cuando la mejore.

El ejemplo más simple de opción real es cuando decidimos aceptar un proyecto de inversión porque su VAN es positivo, o lo rechazamos cuando el VAN es negativo.

II.2.4 Simulación

Tradicionalmente, el modelado formal de sistemas ha sido a través de un modelo matemático, que intenta encontrar soluciones analíticas a problemas que permiten la predicción del comportamiento de un sistema de un conjunto de parámetros y condiciones iniciales. La simulación por computadora es frecuentemente usada como un accesorio para, o sustitución de, sistemas de modelado para los cuales las soluciones analíticas de forma cerrada simple no son posibles. Ahí se encuentran muchos tipos diferentes de simulación por computadora, la característica común que todas ellas comparten es el intento por generar una muestra de escenarios representativos para un modelo en que una enumeración completa de todos los estados posibles serían prohibitivos o imposibles.

- Definición del sistema

Para tener una definición exacta del sistema que se desea simular, es necesario hacer primeramente un análisis preliminar éste, con el fin de determinar la interacción con otros sistemas, las restricciones del sistema, las variables que interactúan dentro del sistema y sus interrelaciones, las medidas de efectividad que se van a utilizar para definir y estudiar el sistema y los resultados que se esperan obtener del estudio.

- Formulación del modelo

Una vez definidos con exactitud los resultados que se esperan obtener del estudio, se define y construye el modelo con el cual se obtendrán los resultados deseados. En la formulación del modelo es necesario definir todas las variables que forman parte de él, sus relaciones lógicas y los diagramas de flujo que describan en forma completa el modelo.

- Colección de datos

Es importante que se definan con claridad y exactitud los datos que el modelo va a requerir para producir los resultados deseados.

- Implementación del modelo en la computadora

Con el modelo definido, el siguiente paso es decidir si se utiliza algún lenguaje como el fortran, algol, lisp, etc., o se utiliza algún paquete como GPSS, simula, simscript, etc., para procesarlo en la computadora y obtener los resultados deseados. En este estudio en particular, se utilizará el software Arena para crear el modelo en PC.

- Validación

A través de esta etapa es posible detallar deficiencias en la formulación del modelo o en los datos alimentados al modelo. Las formas más comunes de validar un modelo son:

La opinión de expertos sobre los resultados de la simulación.

La exactitud con que se predicen datos históricos.

La exactitud en la predicción del futuro.

La comprobación de falla del modelo de simulación al utilizar datos que hacen fallar al sistema real.

La aceptación y confianza en el modelo de la persona que hará uso de los resultados que arroje el experimento de simulación.

- Experimentación

La experimentación con el modelo se realiza después que éste haya sido validado. La experimentación consiste en generar los datos deseados y en realizar un análisis de sensibilidad de los índices requeridos.

- Interpretación

En esta etapa del estudio, se interpretan los resultados que arroja la simulación y con base a esto se toma una decisión. Es obvio que los resultados que se obtienen de un estudio de simulación ayudan a soportar decisiones del tipo semi-estructurado.

Éste enfoque resulta efectivo para evaluar la efectividad de determinada estrategia, pero no resulta de gran ayuda para encontrar estrategias, ya que se deberían probar cada una de las combinaciones posibles, es por ello que su uso en éste trabajo intenta minimizarse.

II.2.5 Manejo de dinero – Criterio Kelly

El criterio Kelly de manejo de dinero fue desarrollado originalmente por el físico John Larry Kelly, basado en el trabajo de un colega de AT&T, Claude Shannon, quién hizo un estudio respecto al ruido en las comunicaciones de larga distancia. Kelly mostró cómo la teoría de Shannon podía ser aplicada al problema de un apostador que posee información respecto del juego, con el fin de apostar una proporción de su capital óptima. La información del apostador podía no ser perfecta (libre de ruido), y aún así el criterio de Kelly podía ser aplicado. Ésta fórmula fue aplicada por Edward Thorp en su estudio sobre Blackjack y luego en los mercados bursátiles.

El método de Kelly utiliza una fórmula que maximiza el crecimiento a largo plazo del capital de un apostador, en un juego cuyo valor esperado es positivo. Fue descripto por primera vez por J. Kelly en 1956, en una edición del Bell System Technical Journal. La fórmula especifica que porcentaje del capital debe ser apostado en cada instancia del juego. Además de maximizar la ganancia a largo plazo, la fórmula tiene el beneficio agregado que posee un riesgo nulo de ruina; la fórmula nunca permitirá a un apostador apostar el 100% de su capital en una sola apuesta. Su teoría supone que el capital y las apuestas son infinitamente divisibles, lo cual no afecta a la práctica si el capital es suficientemente grande.

En general, el criterio Kelly establece que el crecimiento a largo plazo es maximizado al encontrar la fracción f^* del capital, que maximice la esperanza logarítmica del resultado. Para apuestas en las que los resultados son el perder todo lo apostado, o el ganar la misma cantidad multiplicada por un factor, la fórmula II.1 puede ser obtenida a partir de la fórmula general de Kelly.

$$f^* = \frac{bp - q}{b} \qquad \text{(II.1)}$$

Donde

f* es la proporción del capital que debe ser apostada.

b es el factor de pago del juego.

p es la probabilidad de ganar.

q es la probabilidad de perder.

Como ejemplo, si un apostador tiene el 40% de probabilidades de ganar y un 60% de perder (p = 0.40, q = 0.60), pero el juego paga 2 a 1 al ganar (b = 2), entonces el jugador debe apostar el 10% de su capital (f* = 0.10), con el fin de maximizar su resultado a largo plazo.

En el caso en el que el jugador no posea ninguna ventaja (b<=0), el jugador no debe apostar.

Para los casos en que la apuesta paga 1 a 1, la fórmula puede simplificarse a la Fórmula 2.2:

$$f^* = p - q \quad \text{(II.2)}$$

II.3 LA FALACIA DE LA MARTINGALA

Existen distintos tipos de estrategias genéricas utilizadas para obtener una ventaja respecto del casino. En todos los casos, dichas estrategias muestran una lógica que en una primera impresión parece correcta, sin embargo al realizar un análisis matemático se demuestra que en largo plazo llevan a la ruina del jugador.

Una de las más conocidas estrategias es la Martingala, la cual se basa únicamente en la administración de las apuestas sin tener en cuenta el desarrollo del juego. Para comprender rápidamente la estrategia se realiza una explicación de la misma en un juego de ruleta, ya que las probabilidades no varían en el tiempo y resulta más fácil comprender el análisis. No obstante, la idea se aplica a cualquier juego.

La estrategia de la Martingala es la siguiente: El jugador comienza haciendo una apuesta, pongamos el caso de que realice la apuesta mínima permitida en el juego. En el caso de perder, el jugador apuesta la cantidad acumulada que perdió más uno. Es decir, en el primer turno el jugador apuesta 1, si pierde, en el siguiente turno apuesta 2, si pierde apuesta 4, y así 8, 16, etc. En el momento en que el jugador gane una apuesta, el resultado final pasa a ser de +1, y comienza la serie nuevamente y repite el proceso.

Supongamos el caso de un juego de ruleta en el cual el jugador apuesta a rojo o negro. Considerando que en la ruleta existen 18 casilleros de color rojo, 18 casilleros de color negro, y el cero, el cual no corresponde a ningún color, y asumiendo que la ruleta se encuentra en condiciones ideales (es decir, no presenta ningún tipo de desbalanceo), las probabilidades de que salga el color rojo son iguales a las que salga el color negro 18/37, es decir que la ganancia esperada por tiro de la ruleta es -1 + 2.(18/37) = -1/37. Esto se debe a que el jugador realiza una apuesta de 1, y de salir el color que escogió, recibe un pago de 2 veces su apuesta.

En éste análisis se demuestra que aún sin existir un límite para la apuesta máxima, la estrategia de la Martingala es matemáticamente incorrecta, a pesar de que es defendida por muchos jugadores. El descartar el límite máximo de apuesta se debe a que muchos consideran que esto es lo que impide que la martingala sea efectiva, no obstante, aquí se demuestra que aún de no existir dicho límite, la estrategia a largo plazo lleva a la ruina.

Nº Turno	Apuesta	Pérdida Acumulada	Ganancia en el turno	Ganancia neta en caso de ganar	Probabilidad de perder en este turno
1	1	0	1	1	51,35%
2	2	1	2	1	26,37%
3	4	3	4	1	13,54%
4	8	7	8	1	6,95%
5	16	15	16	1	3,57%
6	32	31	32	1	1,83%
7	64	63	64	1	0,94%
8	128	127	128	1	0,48%
9	256	255	256	1	0,25%
10	512	511	512	1	0,13%
11	1024	1023	1024	1	0,07%
12	2048	2047	2048	1	0,03%
13	4096	4095	4096	1	0,02%
:	:	:	:	:	:
N	2^(N-1)	[2^(N-1)] - 1	A	1	[(19/37)^(N)]

Figura II.1

Para cada turno se obtiene que E = $2^{(N-1)}$.(1-P) -$2^{(N-1)}$.P, siendo *E* el resultado esperado; *N* el número de turno; $2^{(N-1)}$ la apuesta en el turno *N,* y *P* la probabilidad de perder. A partir de ésta fórmula se demuestra la falacia de la Martingala.

Tenemos que la esperanza en cada turno es la siguiente:

$$E = 2^{(N-1)}(1-P) - 2^{(N-1)}(P) \qquad \text{(II.1)}$$

Por lo que realizando una sumatoria de n = 1 hasta N, podemos calcular la esperanza total hasta el turno N.

$$E_N = \sum_{n=1}^{N}\left[2^{(n-1)}(1-P) - 2^{(n-1)}(P)\right] \tag{II.2}$$

Para calcular el promedio perdido por mano se utiliza la Fórmula (III.4) y se la divide por el número de turnos jugados, o sea, N.

$$E_N^{'} = \sum_{n=1}^{N}\frac{\left[2^{(n-1)}(1-P) - 2^{(n-1)}(P)\right]}{N} \tag{II.3}$$

Pero si se quiere calcular el rendimiento del capital, es decir, cuánto se está ganando o perdiendo por cada unidad apostada, se debe dividir éste número por la apuesta en cada turno, es decir $2^{(N-1)}$. De esta forma obtenemos

$$E_N^{'} = \sum_{n=1}^{N}\frac{\left[2^{(n-1)}(1-P) - 2^{(n-1)}(P)\right]}{2^{(n-1)}N} \tag{II.4}$$

Y simplificando los términos y realizando la sumatoria se obtiene:

$$E_N^{''} = \sum_{n=1}^{N}\frac{\left[(1-P) - (P)\right]}{N} = \frac{N\left[(1-P) - (P)\right]}{N} = (1-P) - (P) \tag{II.5}$$

En dónde se demuestra que la cantidad perdida por unidad apostada es constante, y siempre negativa, aún si N tendiera a infinito. Lo que significa que aún con las bajas probabilidades de que suceda, en algún momento se perderá una seguidilla de veces que impedirá seguir jugando, independientemente de cuánto sea nuestro capital inicial.

III

EL PROBLEMA

III.1 EL JUEGO

III.1.1 Vocabulario Específico

Apuesta: Cantidad que se juega en cada mano del juego. El valor mínimo y máximo de las apuestas debe estar establecido de antemano. También debe establecerse si se puede apostar en las jugadas ajenas.

Punto: Terminología utilizada para referirse a los jugadores.

Banca: Representa al casino y es quien reparte las cartas y contra el que apuestan el resto de los jugadores (puntos). También paga y cobra las apuestas según el resultado de las jugadas. En caso de empate entre su jugada y la de uno o varios jugadores, la banca no paga ni retira la apuesta.

Mano: Conjunto de jugadas que tienen lugar entre dos series de apuestas consecutivas. Comienza cuando la banca reparte la primer carta, y termina una vez pagadas las apuestas y retiradas las cartas. También hace referencia a la suma de cartas que posee el punto o la banca (ejemplo: la mano del punto es 4)

Pasarse: Superar los siete puntos y medio en el valor total de las cartas de un jugador o la banca. Cuando un jugador se pasa, pierde automáticamente y entrega el dinero apostado a la banca. Si la banca se pasa, paga únicamente a los jugadores que no se hayan pasado.

Pedir (cartas): Solicitar una nueva carta de la banca. Pueden pedirse cartas hasta que sus valores sumen siete y medio, o se supere ese valor (con lo cual se ha perdido automáticamente).

Plantarse: Dejar de pedir carta.

Turno: Momento de la partida en que corresponde a cada jugador realizar su jugada (pedir cartas, plantarse). Un jugador termina su turno cuando se planta o se pasa.

III.1.2 Descripción

- Objetivo

Conseguir siete y medio, es decir, que el valor de todas las cartas del jugador sumen siete puntos y medio, o bien se acerque el máximo a este valor sin pasarse. La banca juega contra cada uno de los puntos individualmente y su jugada ha de superar o igualar la de cada uno de ellos. En caso de empate, el jugador mantiene su apuesta.

- Número de Jugadores

El número de jugadores se encuentra limitado por cada casino en función del tamaño de la mesa de juego. En general el máximo número de jugadores es seis. En el análisis realizado se desprecia al resto de los jugadores y se asume que el juego se realiza entre un jugador y la banca.

- Tipo de Baraja

En el juego del siete y medio se utiliza la baraja de poker. Dependiendo del casino en el que se encuentre, la cantidad de mazos que se utilizan puede variar, pero en general se utilizan entre 6 y 8 mazos con el fin de disminuir la frecuencia de barajado e interrumpir lo menos posible el juego. Dado que la baraja de poker cuenta con cartas cuyo valor es superior al 7, se retiran las mismas para éste juego.

- Valor de las cartas

El palo de las cartas no posee ningún valor. Cada una de las figuras vale medio punto. El resto de las cartas tiene el valor representado por su índice, es decir el valor indicado en la carta: el uno o as vale 1 punto; el dos, 2 puntos; el tres, 3 puntos; el cuatro, 4 puntos; el cinco, 5; el seis, 6 puntos, y el siete, 7.

III.1.3 Desarrollo del juego

El juego del punto:

Después de barajar y dar a cortar, la banca reparte una carta a cada uno de los jugadores, incluyéndose ella misma, en sentido horario (de izquierda a derecha).

Cada jugador recibe su carta boca arriba, pero no realiza jugada alguna hasta que llegue su turno. El primer turno corresponde al jugador situado a la izquierda de la banca. En su turno, el jugador tiene la posibilidad de pedir carta o plantarse. Si se planta, el turno pasa al jugador de su izquierda (o a la banca si éste fuese el último de la mesa).

A diferencia del Blackjack, en el siete y medio no existe la posibilidad de abrir el juego, o duplicar la apuesta. La misma no puede ser modificada una vez que la primera carta ha sido repartida.

Al recibir una carta adicional pueden suceder tres cosas:

1. El valor total de la mano supera siete puntos y medio. En este caso el jugador ha perdido, entrega al valor de su apuesta a la banca y las cartas van al montón de las usadas para ser barajadas en el respectivo momento.

2. El valor total de las cartas no alcanza siete puntos y medio. En este caso el jugador puede pedir una nueva carta o plantarse.

3. El valor total de las cartas suma siete puntos y medio. Obviamente, el jugador se planta.

Sólo en el segundo caso el jugador sigue manteniendo el turno, que no pasará al jugador de su derecha hasta que se plante o se pase. Tras terminar su turno, éste pasará al jugador de su derecha.

Después de terminar el turno de todos los jugadores llega el turno de la banca.

El juego de la banca:

La banca juega con todas sus cartas descubiertas (a diferencia del Blackjack en el cual la banca mantiene una carta boca abajo hasta que terminen de hacer juego los jugadores).

La banca no puede escoger de que manera hacer su juego, sino que debe jugar con una serie de reglas preestablecidas. La banca se encuentra obligada a pedir carta cuando la suma de su mano sea menor o igual a 4,5, y está obligada a plantarse si mano suma 5 o más, independientemente de si sólo se le repartió una sola carta. Ésta es parte de la información que puede utilizar el jugador para incrementar retorno y es explicada más adelante en este análisis.

En caso de pasarse, la banca ha perdido y debe pagar a los jugadores que se han plantado. En caso de plantarse, la banca gana a todos los que tienen una jugada de valor menor o igual que la suya y pierde con todos los que tienen una jugada de valor superior.

La banca paga una cantidad igual al valor de la apuesta a todos los jugadores que han ganado.

Después de que la banca paga las apuestas, retira las cartas jugadas y las separa hasta el momento en que se deba realizar un nuevo barajado, el cual se realiza cuando queda aproximadamente un mazo por repartirse. No se juega hasta que se terminen las cartas del mazo, porque al quedar menos cartas el jugador posee cada vez más información, y llegado el caso de quedar muy pocas cartas, el jugador posee demasiada certeza de las cartas restantes, lo cual no es deseado por el casino.

III.2 PROBLEMA Y OBJETIVOS

Muchos problemas de interés práctico son simplemente muy complicados para ser abordados analíticamente. En estos casos, los investigadores usualmente recurren a técnicas de simulación para evaluar los resultados posibles. Sin embargo, utilizando distintas aproximaciones, estos problemas pueden revelar una estructura que permite un análisis matemático mucho más simple, permitiendo analizar partes de ellos analíticamente.

Ésta es la situación presente en el juego del Siete y Medio, dadas sus reglas simples, su naturaleza aleatoria y la abundancia de información provista durante el transcurso del juego para un jugador que sabe como aprovecharla. La manera de analizar éste tipo de juegos se basan en 2 aspectos: un método de conteo de cartas para analizar la composición del mazo y las probabilidades de que salga una determinada carta y calcular la ventaja del jugador dada dicha composición, y una estrategia para apostar en función de la ventaja que se posea. Dada la complejidad y la cantidad de combinaciones posibles en el juego, los análisis suelen utilizar técnicas de simulación únicamente. A pesar de que dichas técnicas pueden llevar a resultados correctos, no resulta tan fácil analizar las propiedades del juego. Es por ello que en este estudio se utilizan únicamente con un fin exploratorio y para validar los resultados matemáticos sin necesidad de realizarlo empíricamente.

A pesar de la aparente complejidad, existe una estructura inherente en el juego que permite la aplicación de teorías como las cadenas de Markov entre otras, permitiendo evaluar y encontrar estrategias sin la necesidad de basarse únicamente en la simulación.

El objetivo de este trabajo es demostrar la posibilidad de volcar las probabilidades a favor de los jugadores mediante el uso de las técnicas mencionadas.

III.3 RESTRICCIONES, ALCANCE Y LÍMITES

III.3.1 Restricciones

Existen ciertas consideraciones que se tienen en cuenta en el análisis con el fin de simplificar los cálculos. No obstante, dichas consideraciones no invalidan los resultados obtenidos.

La primera consideración recae en la utilización del estado estacionario de las cadenas de Markov para calcular la distribución de cartas que tendrá la banca al finalizar su turno. En éste análisis se utiliza el estado estacionario de dicha cadena, el cual asume que la distribución de probabilidades no varía al realizarse un cambio de estado en el sistema. En la realidad, al retirarse una carta del mazo, la composición del mismo es modificada, y por ende, las probabilidades de transición entre estados, por lo que el utilizar el estado estacionario de la cadena no es 100% correcto. Sin embargo, el error introducido por esta consideración es despreciable, tal como se lo muestra en VI.1.2.

El mismo tipo de consideración es tenida en cuenta para el cálculo del retorno esperado del jugador. Dado que se utilizan opciones reales y un árbol de decisión a partir de la cadena de Markov propuesta para el jugador, se asumió que la extracción de una carta del mazo no modifica la composición del mazo, permitiendo el cálculo del retorno esperado. De no tomarse ésta consideración, la cantidad de ramas del árbol de decisión aumenta en función de una relación combinatoria, incrementando considerablemente la complejidad de los cálculos sin aumentar significativamente la precisión del análisis.

Ambos errores introducidos son contrastados en el proceso de simulación para corroborar los resultados.

III.3.2 Alcance y límites

La metodología consiste, en primer lugar, lograr plantear las cadenas de Markov que definan las transiciones tanto para el jugador como para el croupier. Posteriormente se pretende evaluar la variación del retorno esperado ante cada situación presentada (combinaciones de cartas del croupier y jugador), e identificar en qué casos dicho retorno aumenta al pedir una carta y en qué casos no. Para ello se utilizarán opciones reales combinadas con programación dinámica.

Identificados los casos en los que la esperanza de retorno es positiva, se utilizarán las técnicas de Kelly para determinar la proporción de capital que debe ser utilizado en cada caso.

Por último se realizarán corridas de simulación para evaluar en conjunto que concuerden con el resultado esperado.

Dado que el objetivo del trabajo es únicamente la demostración matemática de la posibilidad de favorecer al jugador en éste juego, no se realizará una comprobación empírica, dejando dicho trabajo para cualquier lector interesado en ello.

IV

SOLUCIÓN PROPUESTA

La estrategia para abordar el problema es la de combinar distintas técnicas y herramientas, logrando un equilibrio entre lo que puede ser una solución 100% analítica, y lo que se podría obtener a partir de la simulación.

Dado que el objetivo es lograr detectar en qué situaciones el resultado esperado en el juego resulta favorable para el jugador, lo primero que debe hacerse es lograr calcular a priori las probabilidades de ganar con las que se cuenta. Para ello se propone utilizar cadenas de Markov para analizar las transiciones entre estados posibles (los estados posibles en éste caso son la suma de cartas con la que cuentan el jugador, o la banca). Conociendo de qué forma se pasa de un estado a otro, y las probabilidades asociadas a ello en función de la composición del mazo, se pueden calcular las probabilidades de ganar y perder en cada caso, y comenzar a plantear una estrategia ante cada situación.

El planteo de la estrategia se realizará mediante la utilización de opciones reales. A partir del uso de ésta técnica se evalúan dos opciones: seguir jugando o plantarse. En el caso de plantarse, la probabilidad de ganar del jugador estará dada en función de su carta y la carta de la banca (considerando la composición del mazo en todo momento). En el caso de continuar jugando, se debe evaluar todos los resultados posibles en el primer cambio de estado, y de nuevo, volver a evaluar la opción de continuar o plantarse. Éste proceso es recurrente hasta el momento en el que la opción de plantarse provee un mayor beneficio que la opción de continuar.

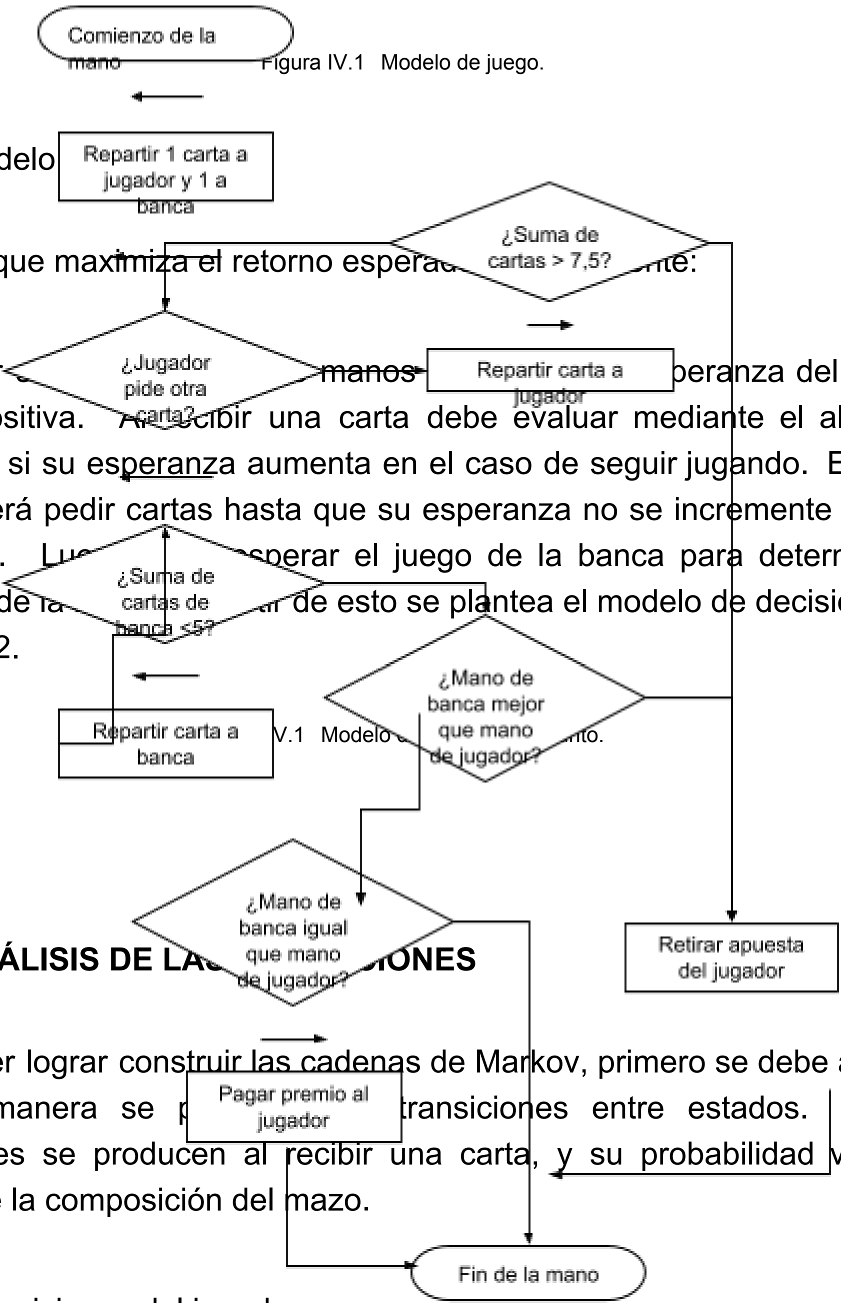
Como se menciona con el uso de las opciones reales, se debe evaluar cada una de las transiciones posibles para un estado dado, y una vez hecho esto, volver a hacerlo para todos los estados siguientes. Éste concepto se observa más claramente en la Figura IV.5, y es por ello que se utiliza la programación dinámica para reducir el árbol de decisión y minimizar la cantidad de cálculos necesarios como se observa en la Figura IV.6.

Combinando estas tres herramientas, es posible calcular en función de la composición del mazo antes de comenzar la mano cual es el retorno esperado para el jugador en la siguiente mano, y mediante el criterio Kelly para manejo de dinero, decidir cuánto de su capital apostar. Durante el transcurso de la mano, y utilizando el algoritmo de decisión propuesto, el jugador podrá tomar las decisiones que optimicen su resultado esperado.

IV.1 EL MODELO

IV.1.1 Modelo de juego

A partir de lo expresado en III.1 se plantea el siguiente modelo lógico del desarrollo de una mano en el juego en la Figura IV.1.



[illegible]igura IV.1 Modelo de juego.

IV.1.2 Modelo [illegible]

La lógica que maximiza el retorno espera[illegible]nte:

El jugador [illegible] manos [illegible]peranza del retorno resulte positiva. A[illegible] recibir una carta debe evaluar mediante el algoritmo propuesto si su esperanza aumenta en el caso de seguir jugando. En dicho caso deberá pedir cartas hasta que su esperanza no se incremente al pedir otra carta. Lu[illegible] esperar el juego de la banca para determinar el resultado de la [illegible] de esto se plantea el modelo de decisión de la Figura IV.2.

[illegible]V.1 Modelo [illegible]nto.

IV.2 ANÁLISIS DE LA[illegible]IONES

Para poder lograr construir las cadenas de Markov, primero se debe analizar de qué manera se p[illegible] transiciones entre estados. Dichas transiciones se producen al recibir una carta, y su probabilidad varía en función de la composición del mazo.

IV.2.1 Transiciones del jugador

Las transiciones posibles para el jugador se encuentran definidas por la suma de cartas que tienen en su poder, y la composición del mazo. De ésta forma el jugador va a poder pasar de un estado X a un estado Y con una probabilidad $P_{(X,Y)}$ definida por:

$$\text{(IV.1)} \quad P_{(X,Y)} = \#C_{(X,Y)}/N$$

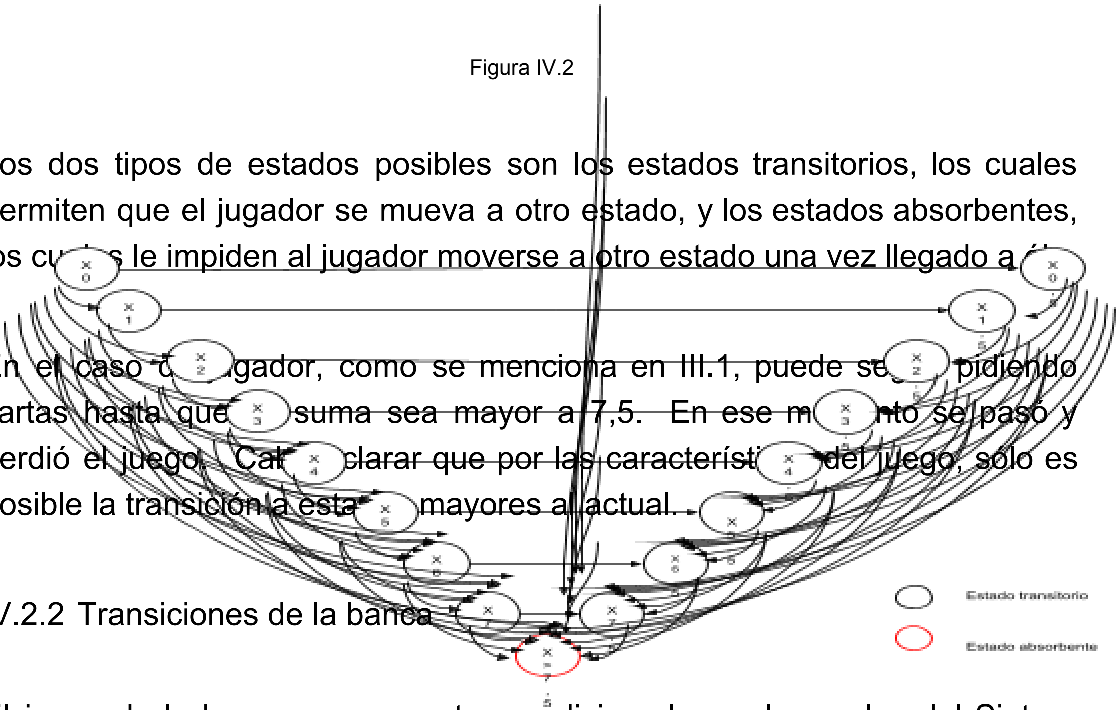
Siendo “X” el estado actual, “Y” cualquier estado posible al que X puede pasar, $\#C_{(X,Y)}$ la cantidad de cartas presentes en el mazo que permiten pasar del estado X al estado Y, y “N” la cantidad total de cartas restantes.

De esta forma se obtiene el diagrama de la Figura IV.1, el cual muestra las transiciones posibles para cada estado de X e Y.

Figura IV.2

Los dos tipos de estados posibles son los estados transitorios, los cuales permiten que el jugador se mueva a otro estado, y los estados absorbentes, los cuales le impiden al jugador moverse a otro estado una vez llegado a él.

En el caso del jugador, como se menciona en III.1, puede seguir pidiendo cartas hasta que su suma sea mayor a 7,5. En ese momento se pasó y perdió el juego. Cabe aclarar que por las características del juego, sólo es posible la transición a estados mayores al actual.



IV.2.2 Transiciones de la banca

El juego de la banca se encuentra condicionado por las reglas del Siete y Medio descriptas en III.1. La banca se encuentra obligada a pedir carta si su suma de cartas resulta menor a 5, y debe plantarse en el caso de que su suma sea mayor o igual a 5. La probabilidad de transición entre estados se encuentra definida por la misma fórmula que para el jugador (IV.1). De esta forma se obtiene el esquema de transiciones de la Figura IV.2.

Figura IV.1

Se observa que la banca posee más estados absorbentes que el jugador, debido a las reglas del juego, se planta en cualquier mano mayor o igual a 5.

IV.2.3 Cadenas de Markov propuestas

A partir de los diagramas de transición propuestos, se pueden armar las matrices de Markov que definan las transiciones posibles y las probabilidades asociadas. Dado que estas cadenas se ven modificadas en función de la composición del mazo, los números presentados corresponderán a la matriz que se obtiene cuando el juego recién comienza.

La composición del mazo define las transiciones posibles entre estados como lo muestra la Fórmula IV.1.

Matriz de la banca	**0,0**	**0,5**	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**	**3,5**	**4,0**	**4,5**	**5,0**	**5,5**	**6,0**	**6,5**	**7,0**	**7,5**	**>7,5**
0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,0
0,5	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0
1	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1
1,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,1
2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,2
2,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,2
3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,3
3,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,3
4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,4
4,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,4
5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0
6,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0
7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0
7,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0
>7,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0

Tabla IV.1 Matriz de transición para la banca.

La matriz estable para la banca (Tabla IV.2) indica la forma en que se va a distribuir la mano de la banca en función de la carta que posee. La información que brinda esta matriz es muy valiosa y merece un análisis detallado en capítulos siguientes.

La forma de leer la matriz es la siguiente:

La columna de la izquierda nos indica la mano de la banca, y las columnas sucesivas nos indican los estados finales posibles. Ésta es la información que debe tener en cuenta el jugador para calcular su ventaja, ya que la mano que posee la banca y la mano con la que va a finalizar determinan sus probabilidades de ganar. El análisis puntual de los resultados de la matriz se realiza más adelante en el informe.

Matriz Estable	**0,0**	**0,5**	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**	**3,5**	**4,0**	**4,5**	**5,0**	**5,5**	**6,0**	**6,5**	**7,0**	**7,5**	**>7,5**
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,20	0,07	0,17	0,07	0,17	0,07	0,26
0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,11	0,17	0,06	0,17	0,06	0,17	0,28
1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,18	0,06	0,15	0,06	0,15	0,06	0,35
1,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,09	0,15	0,05	0,15	0,05	0,15	0,36
2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,16	0,05	0,13	0,05	0,13	0,05	0,43
2,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,08	0,13	0,04	0,13	0,04	0,13	0,44
3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,15	0,04	0,12	0,04	0,12	0,04	0,50
3,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,09	0,12	0,03	0,12	0,03	0,12	0,50
4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,19	0,03	0,10	0,03	0,10	0,03	0,52
4,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,30	0,10	0,00	0,10	0,00	0,10	0,40
5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0
6,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0
7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0
7,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0
>7,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0

Tabla IV.2 Matriz B: matriz estable para la banca.

La matriz de transición para el punto (Tabla IV.3) es muy similar a la de la banca, tal como lo muestra el diagrama de transiciones. Dado que el jugador puede elegir cuando plantarse y cuando pedir carta, el único estado absorbente se produce cuando la mano supera los 7,5.

Matriz del jugador	**0,0**	**0,5**	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**	**3,5**	**4,0**	**4,5**	**5,0**	**5,5**	**6,0**	**6,5**	**7,0**	**7,5**	**>7,5**
0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,0
0,5	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0
1	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1
1,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,1
2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,2
2,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,2
3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,3
3,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,3
4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,4
4,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,4
5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,5
5,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,1	0,5
6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,0	0,6
6,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,1	0,6
7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,7
7,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0
>7,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0

Tabla IV.3 Matriz P: Matriz de transición para el punto.

IV.3 CÁLCULO DE LAS PROBABILIDADES

IV.3.1 La "Ley de los grandes números"

Se dice que una sucesión de variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad común obedece la ley de los grandes números cuando la media de las muestras de variables tiende a la media de las esperanzas de las variables aleatorias de la sucesión, según el número total de variables aumenta.

En un contexto estadístico, las leyes de los grandes números implican que el promedio de una muestra al azar de una población de gran tamaño tenderá a estar cerca de la media de la población completa.

En el contexto de teoría de probabilidad, varias leyes de grandes números dicen que el promedio de una secuencia de variables elegidas al azar con una distribución de probabilidad común, converge (en los sentidos explicados abajo) a su valor esperado común, en el límite mientras el tamaño de la secuencia se aproxima al infinito. Varias formulaciones de la ley de los grandes números (y sus condiciones asociadas) especifican la convergencia de formas distintas.

La de los grandes números establece que si X_1, X_2, X_3, ... es una secuencia infinita de variables aleatorias que son independientes e idénticamente distribuidas con $E(|X_i|) < \infty$ (y donde el valor esperado es μ), entonces

$$\mathrm{P}\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu\right) = 1,$$

Es decir, el promedio de una muestra converge seguramente a μ.

Esta ley justifica la interpretación intuitiva de que el valor esperado de una variable aleatoria como el "promedio a largo plazo al hacer un muestreo repetitivo".

Se utiliza esta ley para validar el cálculo de las probabilidades, así también como el retorno esperado en cada mano. Dado que lo que interesa en este estudio es el resultado esperado a largo plazo, es decir, cuando la cantidad de repeticiones tiende a ser muy grande, es posible independizarse de la varianza y concentrarse únicamente en el promedio esperado, ya que para el cálculo de las probabilidades se asume que cada jugada será repetida un número muy grande de veces, y siendo cada jugada independiente de la otra, por la ley presentada, con certeza absoluta la media muestral coincidirá con la media poblacional.

IV.3.2 Probabilidades para la banca

El juego del punto va verse modificado por distintos factores: la carta que él posea, la carta que la banca posea, y la composición del mazo. Aquí se analiza cómo va a desarrollarse el juego de la banca y de que forma se distribuirán las cartas al final de la jugada.

Dado que los números presentados son para un mazo que posee todas sus cartas, carece de sentido realizar un análisis profundo, pero para comprender la información que esta matriz provee, se realiza un breve análisis con el fin de que el lector entienda de qué forma se aborda el problema.

La columna de la izquierda de la Tabla IV.2 representa la carta que tiene la banca, puede ser la primera carta que se reparte como también puede representar la suma total de cartas. Para el jugador, solamente tiene significado el considerar la matriz estable para el caso en que la banca solo tenga una carta, dado que una vez que la banca se reparte la segunda carta, significa que el turno del jugador ha terminado, por lo que resulta indiferente a la variación de las probabilidades de la banca.

Como indican los vectores representados en columnas de la Tabla IV.1, la banca se plantará cuando la suma de sus cartas sea mayor o igual a cinco, y por lo tanto, al calcular la matriz estable no existirá probabilidad alguna de que la banca finalice su turno con un valor de cartas menor que 5.

La tabla IV.4 indica las probabilidades de que la banca termine su mano con el valor representado por el número de la fila superior, dado que comenzó la mano con la carta que figura en la columna de la izquierda. Los números representados en la columna de la izquierda son las cartas del mazo, pero incluyen al cero. El significado del cero es muy importante para el cálculo de las probabilidades de ganar del jugador. Esa fila representa de qué forma se distribuirán las manos de la banca, cuando aún no se ha repartido una carta.

El jugador decidirá en qué manos jugar y qué manos dejar pasar en función del resultado esperado de la primer fila de la matriz estable. Si con esa información (sumada a otros cálculos que se realizan en la siguiente sección) decide jugar la mano, utilizará las filas restantes de la matriz para evaluar la mejor estrategia.

	5,0	**5,5**	**6,0**	**6,5**	**7,0**	**7,5**
0	0,20	0,07	0,17	0,07	0,17	0,07
0,5	0,11	0,17	0,06	0,17	0,06	0,17
1	0,18	0,06	0,15	0,06	0,15	0,06
2	0,16	0,05	0,13	0,05	0,13	0,05
3	0,15	0,04	0,12	0,04	0,12	0,04
4	0,19	0,03	0,10	0,03	0,10	0,03
5	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00
7	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00

Tabla IV.1 Distribución esperada de manos de la banca.

La estrategia del jugador puede orientarse a obtener un juego mejor que el de la banca, o puede buscar que la banca se pase. Por lo tanto su juego va a depender también de la Tabla IV.5, la cual representa la probabilidad de pasarse de la banca en función de la carta que tiene en su poder.

	P(pasarse)
0	26,4%
0,5	27,6%
1	35,5%
2	43,4%
3	50,1%
4	52,0%
5	0,0%
6	0,0%
7	0,0%

Tabla IV.2 Probabilidad de pasarse en función de la primera carta.

Es importante mencionar que a diferencia del Blackjack, en el siete y medio la banca puede plantarse antes de que el jugador termine su turno, dado el caso en que se reparta una carta mayor o igual a 5. Esto le brinda al jugador mucha información, dado que conoce de antemano hasta que valor es necesario pedir para ganarle a la banca, y tiene la certeza absoluta del resultado de su juego al finalizar su turno, eliminando cualquier incertidumbre.

IV.3.3 Probabilidades para el punto

Conociendo de qué forma se distribuirán las cartas de la banca en función de la carta que posee, es posible calcular la probabilidad de ganar con la que cuenta el jugador. La forma que se propone para calcular dicha probabilidad es la siguiente:

Evaluar la probabilidad de ganar que tiene el punto si se planta:

Para evaluar dicha probabilidad se calcula la probabilidad del punto de tener una carta mayor que la esperada en la matriz estable de la banca y se le suma la probabilidad de que la banca se pase (ambas probabilidades se encuentran condicionadas a la carta que posea la banca en el momento de realizar el cálculo). Éste calculo se realiza mediante la Fórmula IV.2.

$$\text{(IV.1)} \quad J_{(cj,cb)} = P(\, cj > B_{(cb,y)}) + P(B_{(cb,\, y)} > 7{,}5) \quad \forall \; y$$

Calculando dicho valor para cada combinación posible de cartas entre el jugador *“cj”* y la banca “*cb”*, se confecciona la matriz de probabilidades presentada en la Tabla IV.6.

	0	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**	**3**	**3,5**	**4**	**4,5**	**5**	**5,5**	**6**	**6,5**	**7**	**7,5**
0,0	26,4	26,4	26,4	26,4	26,4	26,4	26,4	26,4	26,4	26,4	26,4	46,4	53,1	69,8	76,6	93,3
0,5	27,6	27,6	27,6	27,6	27,6	27,6	27,6	27,6	27,6	27,6	27,6	38,6	55,3	60,9	77,7	83,3
1,0	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	35,5	53,2	58,9	73,8	79,4	94,4
2,0	43,4	43,4	43,4	43,4	43,4	43,4	43,4	43,4	43,4	43,4	43,4	59,2	63,9	77,3	82,0	95,3
3,0	50,1	50,1	50,1	50,1	50,1	50,1	50,1	50,1	50,1	50,1	50,1	64,6	68,5	80,4	84,2	96,1
4,0	52,0	52,0	52,0	52,0	52,0	52,0	52,0	52,0	52,0	52,0	52,0	71,0	74,0	84,0	87,0	97,0
5,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
6,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0	100,0	100,0
7,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0

Tabla IV.2 Matriz J: probabilidad de ganar al plantarse.

Siendo la primera fila la carta del jugador *“cb”* y la primera columna la carta de la banca *“cb”*. No resulta extraño que cuando el jugador decide plantarse con una carta menor a 5, y la banca tiene una carta menor a 5, la única probabilidad de ganar que tiene el jugador es que se pase la banca. Hay que notar que cuando el jugador tiene una carta mayor que la de la banca, y ésta ya se plantó por que su primer carta fue igual o mayor a 5, el jugador tiene la certeza absoluta de que ha ganado, la misma certeza que tiene si decide plantarse con una mano menor a 5, en el caso de que la banca tuviera una carta mayor.

Es importante notar cómo las probabilidades del jugador aumentan al recibir la banca una carta más cercana a 4, debido a que las probabilidades de que se pase se incrementan mientras mayor es su carta como se ve en la Tabla IV.5.

Para calcular cómo se modifican las probabilidades del jugador al pedir una carta se realiza el siguiente cálculo:

$$(IV.1)\quad J' = J \times P^{T}$$

Siendo “P” la matriz de transición del jugador (Tabla IV.3), y “J” la matriz de probabilidad de ganar al plantarse (Tabla IV.6).

De ésta forma se calcula la matriz de la Tabla IV.7.

	0	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**	**3**	**3,5**	**4**	**4,5**	**5**	**5,5**	**6**	**6,5**	**7**	**7,5**
0,0	34,1	39,4	31,4	36,8	28,8	34,1	26,2	31,5	23,5	28,9	26,9	32,2	28,6	32,3	28,0	0,0
0,5	35,4	37,6	32,6	34,9	29,9	32,1	27,1	29,3	24,4	26,6	24,9	31,0	26,0	31,6	25,0	0,0
1,0	42,2	47,0	38,7	43,4	35,1	39,9	31,6	36,3	28,0	32,8	29,8	34,5	30,1	33,3	28,3	0,0
2,0	49,3	53,6	45,0	49,2	40,6	44,9	36,3	40,5	31,9	36,2	32,4	36,4	31,4	34,1	28,6	0,0
3,0	55,3	59,2	50,3	54,2	45,3	49,1	40,3	44,1	35,3	39,1	34,6	38,2	32,5	34,9	28,8	0,0
4,0	57,7	61,6	52,5	56,4	47,3	51,2	42,1	46,0	36,9	40,8	37,4	40,3	33,9	35,8	29,1	0,0
5,0	20,0	30,0	20,0	30,0	20,0	30,0	20,0	30,0	20,0	30,0	50,0	50,0	40,0	40,0	30,0	0,0
6,0	10,0	20,0	10,0	20,0	10,0	20,0	10,0	20,0	10,0	20,0	10,0	20,0	40,0	40,0	30,0	0,0
7,0	0,0	10,0	0,0	10,0	0,0	10,0	0,0	10,0	0,0	10,0	0,0	10,0	0,0	10,0	30,0	0,0

Tabla IV.3 Matriz J’: probabilidad de ganar pidiendo una carta y plantándose.

Al hacer la diferencia entre J y J’, se puede calcular cual es la variación probabilidad de ganar para un jugador que decidiera pedir otra carta y plantarse. Se observa en la Tabla IV.8 que en algunos casos resulta beneficioso mientras que en otros perjudica al jugador.

	0	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**	**3**	**3,5**	**4**	**4,5**	**5**	**5,5**	**6**	**6,5**	**7**	**7,5**
0,0	7,7	13,0	5,1	10,4	2,4	7,8	-0,2	5,1	-2,9	2,5	0,5	-14,1	-24,5	-37,5	-48,6	-93,3
0,5	7,8	10,0	5,0	7,2	2,2	4,5	-0,5	1,7	-3,3	-1,1	-2,8	-7,6	-29,3	-29,3	-52,7	-83,3
1,0	6,7	11,5	3,2	8,0	-0,4	4,4	-3,9	0,9	-7,4	-2,7	-5,7	-18,8	-28,8	-40,5	-51,1	-94,4
2,0	5,9	10,2	1,6	5,8	-2,8	1,5	-7,1	-2,9	-11,5	-7,2	-11,0	-22,8	-32,5	-43,1	-53,4	-95,3
3,0	5,3	9,1	0,2	4,1	-4,8	-0,9	-9,8	-5,9	-14,8	-10,9	-15,4	-26,4	-35,9	-45,5	-55,4	-96,1
4,0	5,7	9,6	0,5	4,4	-4,7	-0,8	-9,9	-6,0	-15,1	-11,2	-14,6	-30,7	-40,1	-48,2	-57,9	-97,0
5,0	20,0	30,0	20,0	30,0	20,0	30,0	20,0	30,0	20,0	30,0	50,0	-50,0	-60,0	-60,0	-70,0	-100,0
6,0	10,0	20,0	10,0	20,0	10,0	20,0	10,0	20,0	10,0	20,0	10,0	20,0	40,0	-60,0	-70,0	-100,0
7,0	0,0	10,0	0,0	10,0	0,0	10,0	0,0	10,0	0,0	10,0	0,0	10,0	0,0	10,0	30,0	-100,0

Tabla IV.4 Δ $J_{.}$ probabilidad de ganar pidiendo una carta vs. plantándose sin pedir.

Viendo que en algunos casos las probabilidades aumentan al pedir una carta, una jugador puede puede analizar lo que sucedería en el caso de pedir 2 cartas, independientemente de cuál fue la primera carta que salió. El resultado se observa en la Tabla IV.9.

	0	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**	**3**	**3,5**	**4**	**4,5**	**5**	**5,5**	**6**	**6,5**	**7**	**7,5**
0,0	31,2	29,0	27,2	24,5	23,6	20,3	20,1	16,4	17,0	14,5	15,3	11,8	12,5	8,4	0,0	0,0
0,5	30,3	28,3	26,2	24,0	22,4	20,0	18,8	16,2	15,6	13,7	14,4	11,0	12,0	7,5	0,0	0,0
1,0	36,2	33,6	31,3	28,2	26,7	23,2	22,5	18,5	18,7	15,7	16,2	12,4	12,8	8,5	0,0	0,0
2,0	40,7	37,6	34,9	31,4	29,5	25,6	24,6	20,3	20,1	16,8	16,9	12,8	13,1	8,6	0,0	0,0
3,0	44,5	41,1	37,9	34,1	31,9	27,7	26,4	21,8	21,3	17,7	17,6	13,2	13,3	8,7	0,0	0,0
4,0	46,4	42,8	39,6	35,6	33,3	28,9	27,5	22,8	22,3	18,8	18,4	13,8	13,7	8,7	0,0	0,0
5,0	29,0	27,0	27,0	24,0	25,0	21,0	23,0	18,0	21,0	24,0	22,0	16,0	15,0	9,0	0,0	0,0
6,0	18,0	17,0	17,0	15,0	16,0	13,0	15,0	11,0	14,0	9,0	13,0	16,0	15,0	9,0	0,0	0,0
7,0	6,0	6,0	6,0	5,0	6,0	4,0	6,0	3,0	6,0	2,0	6,0	1,0	6,0	9,0	0,0	0,0

Tabla IV.5 *J'':* *probabilidad de ganar* pidiendo dos cartas.

Resulta evidente que no es aconsejable el pedir 2 cartas de antemano, a pesar de que en algunos casos las probabilidades aumentan, el jugador no está utilizando la información con la que dispone. Éste caso es muy similar a lo que sucede cuando se evalúa un proyecto de manera tradicional, sin tener en cuenta las opciones existentes en cada etapa. Para poder maximizar el resultado esperado, se requiere que el jugador tome una decisión ante cada situación, evaluando si su resultado se verá beneficiado o no si decide pedir otra carta.

Con las probabilidades de ganar obtenidas, es posible calcular el resultado esperado para cada situación. Éste se obtiene a partir de la diferencia entre la probabilidad de ganar y la probabilidad de perder. En éste caso, la probabilidad de perder no resulta igual a 1 – P(ganar), dado que existe la probabilidad de empatar, en cuyo caso, no se gana ni se pierde la apuesta.

Teniendo en cuenta lo mencionado, se calculan las matrices de las Tablas IV.10, IV.11 e IV.12, las cuales son análogas a las IV.7, IV.8 e IV.9, pero en vez de representar probabilidades de ganar, representan el resultado esperado.

	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
0,0	-47,2	-47,2	-47,2	-47,2	-47,2	-47,2	-47,2	-47,2	-47,2	-47,2	-27,2	-0,5	22,9	46,4	69,8	93,3
0,5	-44,7	-44,7	-44,7	-44,7	-44,7	-44,7	-44,7	-44,7	-44,7	-44,7	-33,8	-6,1	16,3	38,6	60,9	83,3
1,0	-29,1	-29,1	-29,1	-29,1	-29,1	-29,1	-29,1	-29,1	-29,1	-29,1	-11,3	12,1	32,7	53,2	73,8	94,4
2,0	-13,2	-13,2	-13,2	-13,2	-13,2	-13,2	-13,2	-13,2	-13,2	-13,2	2,6	23,1	41,2	59,2	77,3	95,3
3,0	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	14,7	33,1	48,8	64,6	80,4	96,1
4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	23,0	45,0	58,0	71,0	84,0	97,0
5,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	0,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
6,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	0,0	100,0	100,0	100,0
7,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	0,0	100,0

Tabla IV.6 $R_{(cj,cb)}$ al plantarse.

Llamando a los valores de la matriz de la Tabla IV.10 $R_{(cj,cb)}$, representando el resultado esperado para una combinación de cartas del jugador “cj” y la banca con la carta “cb” cuando el jugador decide plantarse.

	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
0,0	-26,5	-19,1	-31,8	-24,4	-37,1	-29,7	-42,3	-35,0	-47,6	-34,3	-40,9	-29,2	-39,1	-29,7	-42,0	-100,0
0,5	-27,0	-19,7	-32,5	-25,3	-38,0	-30,8	-43,5	-36,3	-49,1	-38,5	-44,1	-32,9	-42,3	-33,4	-45,0	-100,0
1,0	-10,8	-4,4	-17,9	-11,5	-25,0	-18,6	-32,1	-25,7	-39,2	-27,4	-35,7	-25,4	-36,7	-28,4	-41,7	-100,0
2,0	2,9	8,5	-5,8	-0,1	-14,5	-8,8	-23,2	-17,5	-31,9	-21,4	-31,2	-22,2	-34,5	-27,3	-41,4	-100,0
3,0	14,5	19,5	4,5	9,5	-5,5	-0,5	-15,6	-10,6	-25,6	-16,2	-27,2	-19,3	-32,6	-26,3	-41,2	-100,0
4,0	19,3	24,1	8,9	13,7	-1,5	3,3	-11,9	-7,1	-22,3	-11,8	-22,3	-15,8	-30,3	-25,1	-40,9	-100,0
5,0	-50,0	-40,0	-50,0	-40,0	-50,0	-40,0	-50,0	-40,0	-50,0	-10,0	0,0	0,0	-20,0	-20,0	-40,0	-100,0
6,0	-70,0	-60,0	-70,0	-60,0	-70,0	-60,0	-70,0	-60,0	-70,0	-60,0	-70,0	-30,0	-20,0	-20,0	-40,0	-100,0
7,0	-90,0	-80,0	-90,0	-80,0	-90,0	-80,0	-90,0	-80,0	-90,0	-80,0	-90,0	-80,0	-90,0	-50,0	-40,0	-100,0

Tabla IV.7 $R_{(cj,cb)}$ Pidiendo una carta y plantándose.

	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
0,0	20,7	28,1	15,4	22,8	10,2	17,5	4,9	12,3	-0,4	13,0	-13,6	-28,7	-62,0	-76,1	-111,8	-193,3
0,5	17,8	25,0	12,2	19,5	6,7	13,9	1,2	8,4	-4,3	6,2	-10,3	-26,8	-58,6	-72,0	-106,0	-183,3
1,0	18,2	24,7	11,1	17,6	4,1	10,5	-3,0	3,4	-10,1	1,7	-24,4	-37,5	-69,3	-81,7	-115,5	-194,4
2,0	16,1	21,7	7,4	13,0	-1,3	4,4	-10,0	-4,3	-18,7	-8,3	-33,8	-45,3	-75,7	-86,5	-118,7	-195,3
3,0	14,3	19,3	4,3	9,3	-5,7	-0,7	-15,7	-10,7	-25,7	-16,4	-41,8	-52,3	-81,4	-90,9	-121,5	-196,1
4,0	15,3	20,1	4,9	9,7	-5,5	-0,7	-15,9	-11,1	-26,3	-15,8	-45,3	-60,8	-88,3	-96,1	-124,9	-197,0
5,0	50,0	60,0	50,0	60,0	50,0	60,0	50,0	60,0	50,0	90,0	0,0	-100,0	-120,0	-120,0	-140,0	-200,0
6,0	30,0	40,0	30,0	40,0	30,0	40,0	30,0	40,0	30,0	40,0	30,0	70,0	-20,0	-120,0	-140,0	-200,0
7,0	10,0	20,0	10,0	20,0	10,0	20,0	10,0	20,0	10,0	20,0	10,0	20,0	10,0	50,0	-40,0	-200,0

Tabla IV.8 Δ $R_{(cj,cb)}$ pidiendo una carta vs. plantándose sin pedir.

IV.3.4 Optimización del resultado esperado

Como se observa en la sección IV.3.3, la forma tradicional de evaluar todos los resultados posibles no resulta efectiva, ya que el jugador no debe decidir de antemano cuantas cartas ha de pedir. Es por ello que se opta por el enfoque de opciones reales, permitiéndole al jugador elegir en cada situación entre 2 opciones; pedir otra carta o plantarse.

En el caso de pedir una carta y no pasarse, el jugador tiene otra vez la opción de pedir o plantarse, tal como lo muestra la Figura IV.2. A partir de ello puede confeccionarse el árbol de decisión de la Figura IV.5, el cual es un esquema simplificado ya que resulta imposible incluir el árbol completo en el espacio de una hoja por la cantidad de ramificaciones y la longitud del mismo. El árbol representa en cada círculo uno de los estados posibles, yendo desde 0 hasta 14,5. Cada cuadrado representa una opción, ya sea pedir una carta o detenerse. En el caso de pedir una carta, se evoluciona de un estado X a un estado Y (siendo X siempre menor que Y por las características del juego). De intentar calcular todas las probabilidades del árbol se deberían realizar mas de 65.000 cálculos de probabilidad, y evaluar la misma cantidad de opciones. Esa cantidad de cálculos debe hacerse en cada situación, para las combinaciones de cartas entre banca y jugador, y dependiendo de la composición del mazo. No resulta eficiente intentar abordar el problema de esta forma, por lo que se busca plantearlo utilizando programación dinámica para reducir los cálculos.

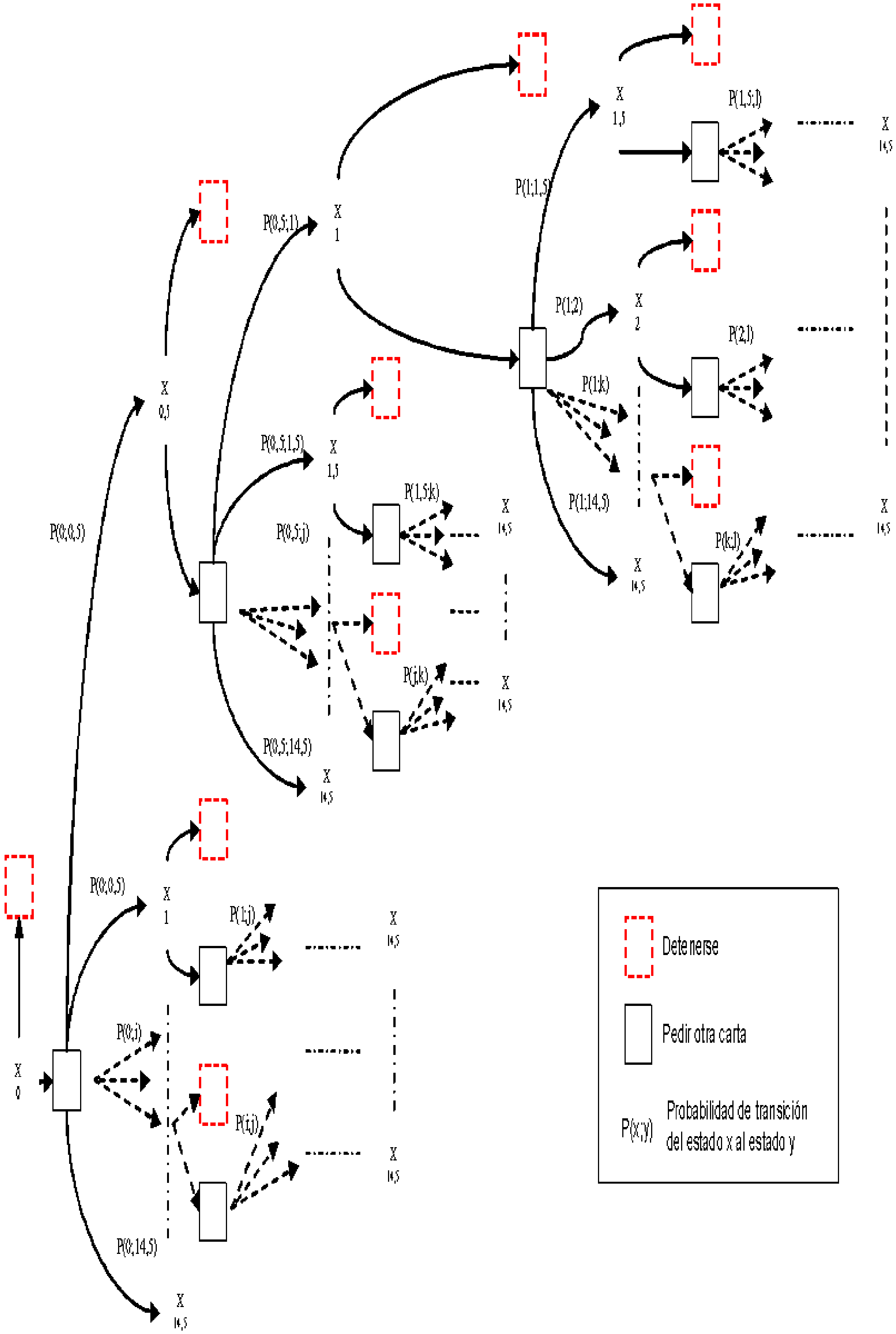

X 0
P(0;0,5)
X 0,5
P(0,5;1)
X 1
P(1;1,5)
X 1,5
P(1,5;l)
X 14,5
P(1;2)
X 2
P(2;l)
P(1;k)
P(1;14,5)
P(k;l)
P(0,5;1,5)
P(1,5;k)
P(0,5;j)
P(j;k)
P(0,5;14,5)
P(0;1)
P(1;j)
P(0;i)
P(i;j)
P(0;14,5)
Detenerse
Pedir otra carta
P(x;y)
Probabilidad de transición del estado x al estado y

Figura IV.1 Esquema de Opciones Reales.

Se recuerda que para abordar un problema mediante el uso de programación dinámica deben cumplirse las siguientes condiciones:

- La solución al problema ha de ser alcanzada a través de una secuencia de decisiones, una en cada etapa.

- Dicha secuencia de decisiones ha de cumplir el principio de óptimo.

Si se recorre el árbol de derecha a izquierda se observa que para todos los estados mayores a 7,5, con certeza absoluta se pierde la apuesta. A partir de esa idea, se recorre el árbol hacia atrás y se llega al estado 7,5, el cual es el estado con mayor probabilidad de ganar en el juego. En este momento se plantea la opción de continuar jugando, o plantarse. La respuesta resulta obvia, ya que de seguir jugando, con seguridad absoluta el punto pasa a un estado en el que pierde la apuesta, por lo que la decisión óptima es la de plantarse. Aquí se ha encontrado el primer óptimo cumpliendo ambas condiciones de la programación dinámica; se ha tomado una decisión y dicha decisión lleva a un resultado óptimo. Se designa al retorno esperado en dicha situación con la letra griega Ψ.

Al continuar recorriendo el árbol hacia atrás, se evalúan los estados precedentes, buscando la decisión óptima en cada uno de ellos. Para el estado anterior al 7,5, o sea el 7, al ejercer la opción de pedir una carta pueden darse dos resultados, terminar en el estado 7,5, o pasarse y perder el juego. De terminar en el estado 7,5, el retorno esperado en dicha situación es $\Psi_{(7,5)}$, al ser la opción óptima, y su probabilidad de llegar a ese estado es $P_{(7;7,5)}$. De ésta forma se debe plantear si la opción de continuar, con un resultado esperado de $P_{(7;7,5)}.\Psi_{(7,5)}$, o plantarse, con un resultado esperado de $R_{(6,cb)}$. A partir de este método, realizando el mismo procedimiento para los estados anteriores se logra confeccionar un árbol de decisión más reducido (Figura IV.6).

En dicho árbol (que también se encuentra simplificado por cuestiones de espacio) se puede ver cómo la cantidad de nodos y decisiones se reduce mediante la utilización de la recursividad, y el planteo de cada decisión como una sub-secuencia de decisiones óptimas.

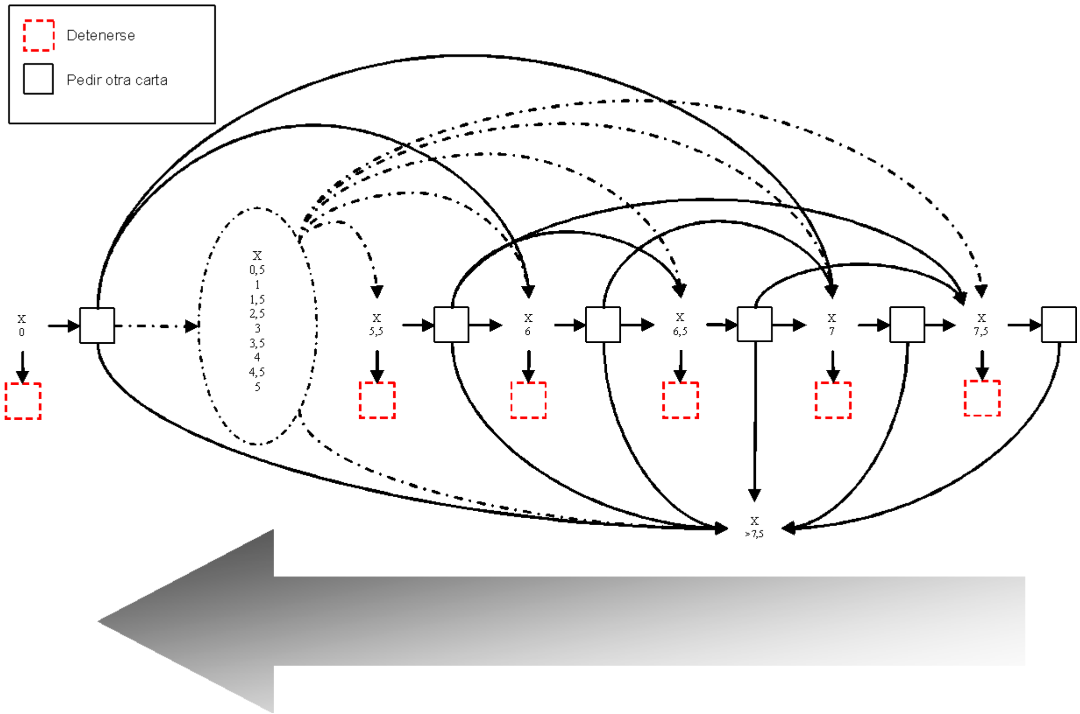


Figura IV.2 Esquema de Opciones Reales + Programación Dinámica

Utilizando el esquema de la figura IV.6 se puede deducir el siguiente algoritmo de cálculo.

$$\text{(IV.1)} \quad \Psi_{(cj,cb)} = \text{Max} \left[R_{(cj,cb)} , \Sigma P_{(cj,y)} . \Psi_{(y,cb)} \right] \ \forall \ y > cj$$

Siendo $\Psi_{(cj,cb)}$ el resultado máximo esperado para una combinación de cartas (cj,cb) y $\Sigma P_{(cj,y)}.\Psi_{(y,cb)}$ representa a todos los posibles flujos entre estados y sus resultados máximos esperado asociados.

Con este algoritmo es posible maximizar el retorno para cada combinación de cartas. Mediante el cálculo de cada una de las combinaciones, se obtiene la matriz de la Tabla IV.13.

	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
0,5	-7,5	-23,2	-19,0	-32,6	-28,1	-40,8	-35,7	-44,7	-38,5	-33,8	-6,1	16,3	38,6	60,9	83,3
1,0	4,8	-10,9	-8,0	-21,7	-18,0	-29,1	-25,5	-29,1	-27,4	-11,3	12,1	32,7	53,2	73,8	94,4
2,0	13,7	-1,8	0,3	-13,2	-8,8	-13,2	-13,2	-13,2	-13,2	2,6	23,1	41,2	59,2	77,3	95,3
3,0	22,6	7,3	9,5	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	14,7	33,1	48,8	64,6	80,4	96,1
4,0	27,4	11,8	13,7	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	23,0	45,0	58,0	71,0	84,0	97,0
5,0	33,6	11,1	17,1	-2,6	3,8	-14,7	-7,9	-23,0	-10,0	0,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
6,0	0,9	-19,9	-11,7	-29,8	-21,4	-38,7	-30,6	-46,2	-37,7	-49,0	-30,0	0,0	100,0	100,0	100,0
7,0	-43,5	-61,8	-50,9	-66,5	-55,6	-71,0	-60,7	-74,8	-65,1	-77,8	-67,5	-75,0	-50,0	0,0	100,0

Tabla IV.2 Matriz de resultado esperado óptimo.

Un valor fundamental que se calcula a partir del algoritmo de maximización es $\Psi_{(0,0)}$ el cual representa el resultado esperado óptimo antes de comenzar la mano. Dado que todos estos valores se modifican al cambiar la composición del mazo, el jugador únicamente debe jugar las manos con $\Psi_{(cj,cb)} > 0$.

A partir de las matrices presentadas, es posible armar una matriz cuyos vectores columna toman los valores 0 y 1. En el caso en que el retorno esperado se incremente al pedir una carta toman el valor 1, y en el caso que no resulte conveniente pedir una carta ya que el retorno esperado baja, toman el valor 0 (Tabla IV.14). Dicha matriz es un input del programa de simulación, y le permite optimizar el juego del punto.

		JUGADOR														
		0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
BANCA	0,5	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
	1,0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
	2,0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3,0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	4,0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	5,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
	6,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
	7,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0

Tabla IV.3 Matriz de decisión.

V

VERIFICACIÓN Y RESULTADOS

V.1 VERIFICACIÓN DEL MODELO

V.1.1 El modelo de simulación

Para poder verificar la validez del modelo es necesario realizar pruebas que contrasten lo obtenido mediante el cálculo realizado con lo esperado en una situación real. Dada la dificultad de verificar empíricamente los resultados (ya que requiere de una cantidad de tiempo y capital no disponible) se opta por generar un modelo del juego en un software de simulación. Se optó por utilizar el software Arena en su versión 7.0, y programarlo para que funcione con una planilla Excel actualizándola en tiempo real.

La lógica del modelo respeta lo planteado en las figuras IV.1 e IV.2, llevando esos diagramas al lenguaje del software. En el mismo se incluyen todas las reglas de ambos diagramas permitiendo que el programa juegue de la misma forma que debería jugar un jugador de encontrarse en un casino real.

Para lograr representar el juego de la mejor forma posible se planteó el modelo de la siguiente forma:

Se parte de una baraja compuesta por 8 mazos (320 cartas) distribuidas uniformemente de acuerdo a las proporciones de cada una de las cartas. El modelo reparte una carta al punto y una a la banca y resta las cartas que salieron del mazo, ya que su composición varía al quitarle dichas cartas, y por ende, cambian las probabilidades. Hecho esto, se calcula el algoritmo de maximización (Fórmula IV.4), la matriz de resultado óptimo (Tabla IV.13), y la matriz de decisión (Tabla IV.14). A partir de estos datos, el modelo decide si lo recomendable es pedir otra carta o plantarse. De pedir otra carta, se le reparte al punto y de no haberse pasado, se vuelven a realizar los cálculos y se decide si continuar o plantarse. Este proceso se repite hasta que el jugador decide plantarse, momento en el cual la banca realiza su juego en función de las reglas del juego. El modelo continúa restando cartas del mazo hasta que es momento de un nuevo barajado, lo cual se realiza cuando quedan 40 cartas en la baraja.

V.1.2 Verificación

Resulta imposible realizar una verificación del modelo para todos los casos posibles, ya que el número de simulaciones necesarias excede la capacidad del software utilizado, y además resulta poco práctico.

Para poder verificar que el modelo y las hipótesis se ajustan con la realidad, se elije repetir la misma mano un gran número de veces. La mano que se simulará será la primera mano que se juega, es decir, cuando todas las cartas se encuentran en el mazo. Esta decisión es arbitraria y podría haberse simulado cualquier otra mano y los resultados tendrían el mismo valor.

La variable que se medirá en la simulación es la media del resultado esperado, y el objetivo es verificar que dicha media coincida con el valor esperado calculado mediante el algoritmo de maximización. De acuerdo a lo planteado en este trabajo, de seguir la estrategia de juego planteada con el algoritmo, el resultado esperado debería tender a ser igual a $\Psi_{(0,0)}$, de no ser así, el modelo planteado no sería válido.

Para el caso en que el mazo se encuentra completo, el algoritmo arroja una probabilidad de ganar de 41,5%. El resultado de la simulación se observa en la Figura V.1.

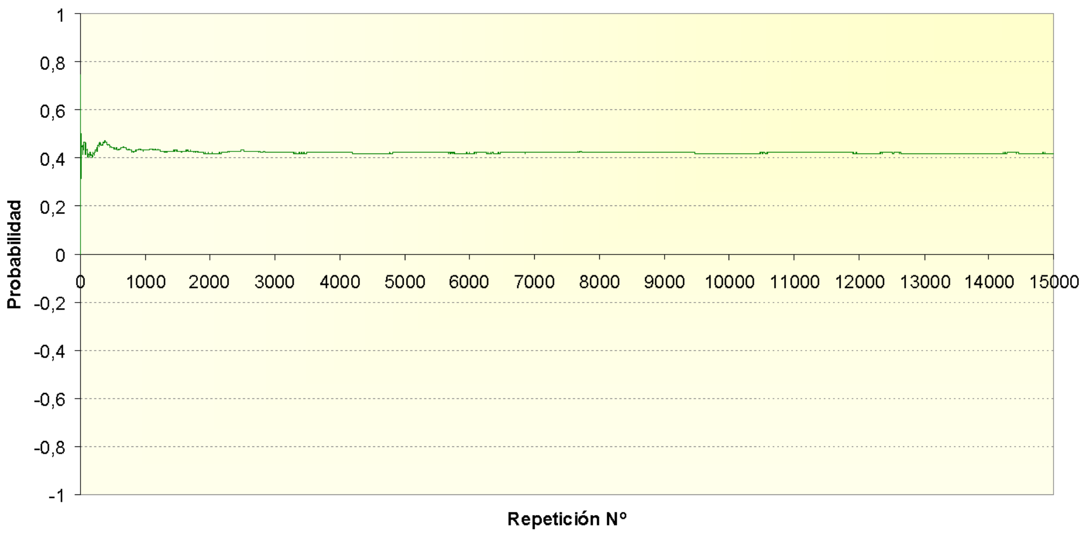


Figura V.1 Simulación del resultado esperado para una mano.

Se observa que el resultado medio esperado en el comienzo de la simulación oscila, disminuyendo su amplitud con el correr de las manos. El valor hacia el cual tiende a estabilizarse es 41,76%, una diferencia de 0,26% respecto al valor esperado de acuerdo al algoritmo. Se considera más que aceptable dicha diferencia, la cual se atribuye principalmente a las suposiciones hechas en III.3.1.

V.2 SIMULACIONES Y RESULTADOS

Habiendo validado el modelo, el siguiente paso es calcular cómo evolucionará el capital de un jugador que juegue utilizando el algoritmo propuesto. Antes que nada es necesario calcular bajo que circunstancias el resultado esperado resulta positivo. Para ello se estudió de qué forma evoluciona la composición del mazo a medida que se van jugando las manos, y el resultado esperado calculado mediante el algoritmo para cada una de las manos que se habrían jugado. A partir de ello se generó una muestra artificial que permite calcular la probabilidad de que en una mano el jugador tenga un resultado esperado positivo. Mediante dicha muestra se confeccionó el gráfico de la Figura V.2.

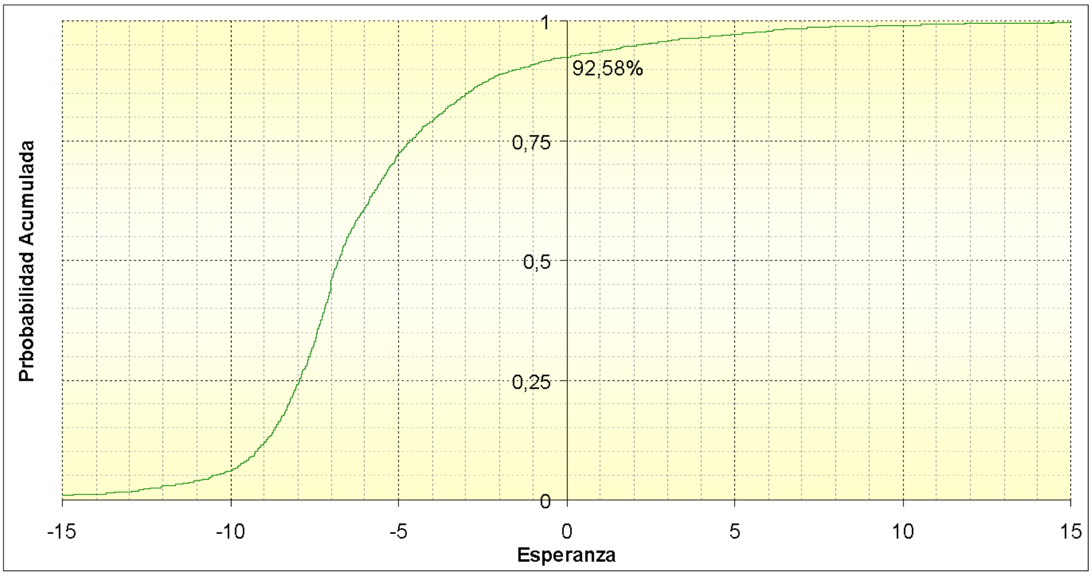


Figura V.1 Probabilidad acumulada izquierda para *R.*

Se observa que el 92,58% de las manos en las que el jugador podría apostar, el resultado esperado es negativo, con el valor esperado más repetido alrededor del -7%, valor que coincide con la primera mano que se juega cuando se comienza el juego.

Por otro lado, en el 7,42% de las manos, el resultado es favorable para el punto, y son éstas las manos en las que debe realizar una apuesta, la cual estará dada por la fórmula de Kelly.

Permitiendo que el modelo apueste únicamente en las manos en las que el resultado esperado es favorable, y que dicha apuesta cumpla con la fórmula de Kelly, se simularon 2000 manos con el fin de analizar como evoluciona el capital del jugador (Figura V.3).

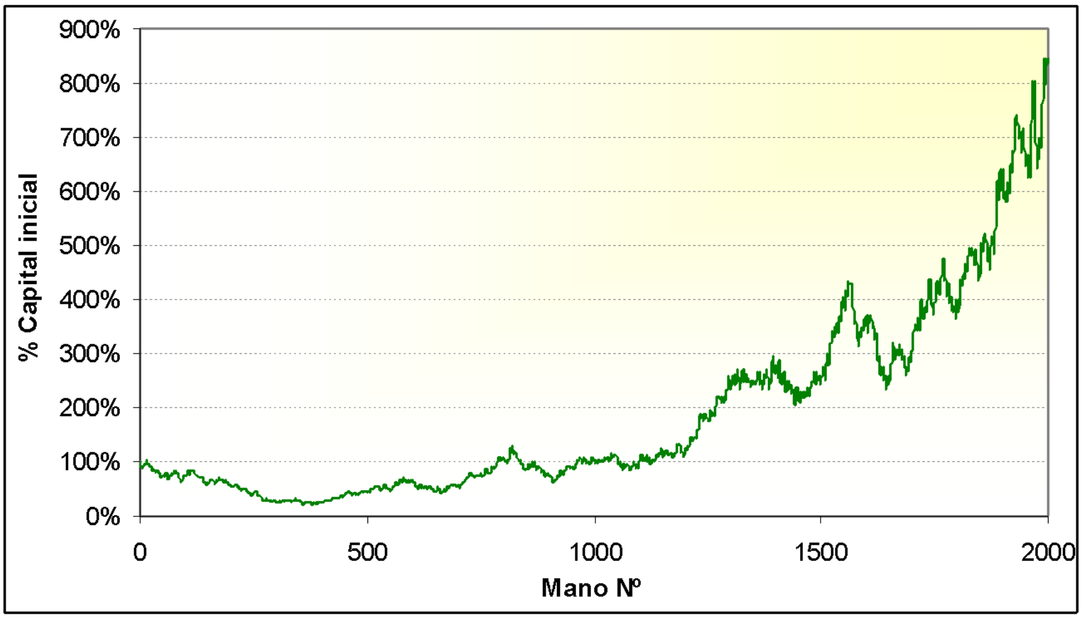


Figura V.2 Evolución del capital a lo largo de 2000 manos.

Como era de esperarse, de acuerdo a lo propuesto por Kelly, el capital evoluciona de manera exponencial, y debido a que la fórmula apuesta una proporción del capital en todos los casos, no es posible que el jugador quede en ruina. A pesar de tener esperanza positiva, el resultado de cada mano puede no corresponder a lo esperado, por ello se presenta cierto ruido en la evolución del capital, sin embargo, a largo plazo se observa como el capital se incrementa y se minimiza el riesgo de ruina con la aplicación de ésta fórmula.

VI

CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

VI.1 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Todos los cálculos teóricos se encuentran realizados en éste trabajo, por lo que no resulta necesario indagar más en dicho cambio, sin embargo, un lector puede querer plantear modelos que presenten mayor precisión en los cálculos para reducir el error del 0,3%, aunque se considera que el trabajo necesario para lograrlo no justifica la mejora en la precisión.

Lo que no se incluye en este trabajo es una manera simple de aplicar el modelo durante un juego sin la necesidad de contar con una computadora que realice los cálculos. Dado que el trabajo presentado no tenía como objetivo aplicar el modelo en un juego real, no se abordó el tema en ninguno de sus capítulos. Cualquier lector interesado en aplicar el modelo en la realidad debería analizar la forma en que se modifican las probabilidades en función de las cartas que van saliendo del mazo, y luego plantear un método simple de conteo de cartas. Un buen ejemplo de ello es el modelo propuesto por Edward Thorp en su libro “Beat the Dealer”, quién realizó un trabajo similar al presentado aquí para el Blackjack.

VI.2 CONCLUSIONES

El éxito de este proyecto se centraba en buscar un dominio en el cual el retorno esperado para un jugador en el juego de Siete y Medio resulte positivo. Dicho dominio fue encontrado mediante la utilización del algoritmo de maximización propuesto, y se da en poco más del 7% de las manos en las que el jugador puede apostar.

Se simuló el juego y se verificó la validez de los supuestos realizados, mostrando que el error introducido por los mismos es del orden del 0,3%, un valor más que aceptable que no modifica los resultados obtenidos. Las simulaciones realizadas apostando con el algoritmo en conjunto con la fórmula de Kelly mostraron que la elección de ese método de apuesta fue acertada, dado que impide que el jugador pierda todo su capital, al mismo tiempo que maximiza el retorno esperado, haciendo que crezca exponencialmente.

VII

BIBLIOGRAFÍA

Winston, Wayne L. 2005. Investigación de Operaciones: Aplicaciones y algoritmos; Cuarta Edición. 1418 páginas . Editorial Thomson.

García, Roberto M. 2004. Inferencia Estadística y Diseño de Experimentos. 734 páginas. Editorial Eudeba.

Thorp, Edward O, 1984. The Mathematics of Gambling. http://www.bjmath.com/bjmath/thorp/tog.htm

Chin William; Ingenoso Marc. 2002. Risk Formulas for Proportional Betting. http://www.bjmath.com/bjmath/proport/riskpaper1.pdf

Kelly, J. L. Jr., 1956. A New Interpretation of Information Rate. http://www.bjmath.com/bjmath/kelly/kelly.pdf

Thorp, Edward O. 1997. The Kelly Criterion in Blackjack, Sports, Betting, and the Stock Market. Paper presented at: The 10th International Conference on Gambling and Risk Taking

Betting Strategies. www.bjmath.com

VIII

ANEXO

A Markov Chain Analysis of Blackjack Strategy

Michael B. Wakin and Christopher J. Rozell*
Department of Electrical and Computer Engineering,
Rice University, Houston, Texas 77251

1 Introduction

Many statistical problems of practical interest are simply too complicated to explore analytically. In these cases, researchers often turn to simulation techniques in order to evaluate the expected outcomes. When approached creatively, however, these problems sometimes reveal a structure that is consistent with a much simpler mathematical framework, possibly permitting an analytical exploration of the problem. It is this situation that we have encountered with the game of blackjack.

Blackjack receives considerable attention from mathematicians and entrepreneurs alike, due to its simple rules, its inherent random nature, and the abundance of "prior" information available to an observant player. Indeed, many attempts have been made to propose card-counting systems that exploit such information to the player's advantage. Most card-counting systems include two aspects: a method for monitoring the cards played to watch for favorable situations, and a strategy for playing and betting depending on the current state of the game. Because blackjack is a complicated game, attempts to actually calculate the expected gain from a particular system often rely on simulation techniques [3, 5]. While such techniques may yield correct results, they may also fail to explore the interesting mathematical properties of the game.

Despite the apparent complexity, there is a great deal of structure inherent in both the blackjack rules and the card-counting systems. Exploiting this structure and elementary results from the theory of Markov chains, we present a novel framework for analyzing the expected advantage of a card-counting system entirely without simulation. The method presented here requires only a few, mild simplifying assumptions, can account for many rule variations, and is applicable to a large class of counting systems. As a specific example, we verify the reported advantage provided by one of the earliest systems, the Complete Point-Count System, introduced by Harvey Dubner in 1963 and discussed in Edward Thorp's famous book, *Beat the Dealer* [5, pp. 93-101]. While verifying this analysis is satisfying, in our opinion the primary value of this work lies in the exposition of an interesting mathematical framework for analyzing a complicated "real-world" problem.

2 Markov chains and blackjack

In this work we use tools from the theory of discrete Markov Chains [4]. Markov chains are an important class of random walks in that they have finite memory: knowing the current state provides as much information about the future as knowing the entire past history. Defining a particular Markov chain requires a *state space* (the collection of possible states) and a *transition* *matrix*. The entry in row i and column j of the transition matrix is the probability of moving from state i to state j in one step. States that only allow transitions back to themselves (with probability 1) are called *absorbing states*. If we raise the transition matrix to the n^{th} power, entry (i, j) is the probability of moving from state i to state j in exactly n steps. Certain classes of Markov chains will converge to an equilibrium distribution as n gets large. This equilibrium represents the long-term proportion of time that the chain spends in each state (independent of the starting state). Markov chains which do converge to equilibrium are those that are *irreducible* and *aperiodic*. A chain is irreducible if there exists a path of non-zero probability from every state to every other state. If a chain is irreducible, it is also aperiodic if when considering all possible paths from any state i back to itself, the greatest common denominator of the path lengths is one.

In this paper we employ two distinct approaches for Markov chain analysis of blackjack. First, we develop a collection of Markov chains to model the play of a single hand, and we use absorbing states to compute the player's expected advantage on one hand. Second, we use a Markov chain to model the progression of the unseen cards, and we analyze its equilibrium to calculate the long-term proportion of time the player will have an advantage over the dealer. After further exploiting the structure in the game to make the calculations tractable, we combine the results from our two analyses to calculate the overall expected gain of a particular card-counting system.

For the remainder of this paper, we assume a standard set of blackjack rules and terminology.[1] For instance, we refer to a hand with an 11-valued Ace as *soft* and a hand with a 1-valued Ace (or with no Aces) as *hard*. A box called the *shoe* holds the cards to be dealt. When a certain number of cards have been played (roughly 3/4 of a shoe), the entire shoe is reshuffled after the next hand is completed. The number Δ of 52-card decks in the shoe is specified when relevant ($\Delta = 6$ being typical in many casinos).

The player places a bet B at the beginning of each hand. The player wins a profit of $\frac{3}{2}B$ if dealt a *blackjack* (a total of 21 on the initial 2 cards), as long as the dealer is not also dealt a blackjack. If the dealer shows an Ace, the player may optionally place a side *insurance* bet of $\frac{B}{2}$ that the dealer holds a blackjack (returned with a profit of B on success). If neither the player nor dealer hold blackjack, a profit of B is won when the player's final total is higher than the dealer's (without exceeding 21). The player can elect to hit or stand at will, but the dealer must hit on any total of 16 or less and stand otherwise. When holding the first two cards, a player may also elect to *double down*, doubling the initial bet and drawing only one additional card. If the player's first two cards have the same value, the player can also *split*, dividing the cards into two separate hands and placing an additional bet B.

3 Analyzing a single hand

A hand of blackjack can approximately be thought of as having a Markovian structure: given the total of a player's hand, the probability distribution of the new total after one card is drawn does not depend on the composition of the previous total. For example, if a player holds a total of 14, the probably of having 17 after one draw is essentially independent of how the 14 was formed (i.e., whether it was a pair of 7's, or an 8,4,2 combination, etc.). There is of course some small effect that is being ignored here, because the cards that have been seen affect the probability of what can be drawn from the shoe. We take this to be a negligible effect in the play of one hand, considering that the player typically draws only one or two cards out of possibly 6 decks.

[1] Many variations on these rules exist [6]; in most cases these variations can easily be considered in a similar analysis.

It is not surprising, given this observation, that Markov chains may be used to analyze the play of a single hand. Roughly speaking, a state space could contain all possible totals for the player's hand, and transition probabilities could be assigned according to the distribution of cards in the shoe. In this section, we develop this idea more fully, obtaining a framework for analyzing the play of a single hand and ultimately computing the player's advantage.

3.1 Problem formulation

We wish to compute the player's *advantage* a, which is defined as the expected profit on a hand that begins with a unit bet. This figure is commonly stated as a percentage; for example, $a = -0.04$ corresponds to a 4% house advantage, an expected loss of 4 cents on a hand beginning with $B = \$1$.

We assume throughout the hand that the cards in the shoe obey a fixed probability distribution

$$\mathcal{D} = \{d(i) : i = \{A, 2, \ldots, 10\}\},$$

where $d(i)$ denotes the probability that the next card drawn will be i. We also assume that the player plays according to some prescribed *strategy* $\mathcal{S}$ throughout the hand. A strategy is a collection of deterministic decisions the player will make during the hand regarding hitting, standing, doubling, and splitting, where each decision depends only on the player's total and the dealer's up-card.[2] While the strategy $\mathcal{S}$ may be chosen according to the player's knowledge of the distribution $\mathcal{D}$ at the beginning of the hand, we assume the strategy remains fixed throughout the play of one hand.

3.2 The dealer's hand

The dealer plays according to a fixed strategy, hitting on all hands 16 or below, and standing on all hands 17 or above. To model the play of the dealer's hand, we construct a Markov chain consisting of a state space Ψ_D and a transition matrix D. The state space Ψ_D contains the following elements:

- $\{first_i : i \in \{2, \ldots, 11\}\}$: the dealer holds a single card, valued i. All other states assume the dealer holds more than one card.
- $\{hard_i : i \in \{4, \ldots, 16\}\}$: the dealer holds a hard total of i.
- $\{soft_i : i \in \{12, \ldots, 16\}\}$: the dealer holds a soft total of i.
- $\{stand_i : i \in \{17, \ldots, 21\}\}$: the dealer stands with a total of i.
- bj: the dealer holds a blackjack (natural).
- $bust$: the dealer's total exceeds 21.

In total, we obtain a state space with $|\Psi_D| = 35$. The dealer's play corresponds to a random walk on this state space, with initial state corresponding to the dealer's first card, and with each transition corresponding to the draw of a new card. Transition probabilities are assigned according to the shoe distribution $\mathcal{D}$. We emphasize that while the transition matrix depends on the distribution $\mathcal{D}$, the state space does not.

For the situations where the dealer must stand, we specify that each state transitions to itself with probability 1. The states $stand_{17}$, $\ldots$, $stand_{21}$, bj, and $bust$ then become absorbing states. Because the dealer's total increases with each transition (except possibly once when a soft hand transitions to hard), any random walk must reach an absorbing state within 17 transitions.

[2]The well-known Basic Strategy is one such example [1,5,6].

To compute a probability distribution among the dealer's possible outcomes, we need only to find the distribution among the absorbing states. This is accomplished by constructing the transition matrix D and computing D^{17}. Given that the dealer shows initial card γ, for example, we obtain the distribution on the possible outcomes by examining row $first_\gamma$ of the matrix D^{17}. Note that because D depends on $\mathcal{D}$, the distribution on the absorbing states is conditioned at this point on a particular deck distribution.

3.3 The player's hand

In a similar way, we use Markov chains to compute the distribution of the player's outcomes. Because the player's strategy depends on the dealer's up-card, we must use a different Markov chain for each card $\gamma \in \{2, \ldots, 11\}$ that the dealer may show. Each Markov chain consists of a state space Ψ_P and a transition matrix P_γ. The state space Ψ_P is fixed, containing the elements:

- $\{first_i : i \in \{2, \ldots, 11\}\}$: the player holds a single card, valued i, and will automatically be dealt another.
- $\{twoHard_i : i \in \{4, \ldots, 19\}\}$: the player holds two different cards for a hard total of i and may hit, stand, or double.
- $\{twoSoft_i : i \in \{12, \ldots, 20\}\}$: the player holds two different cards for a soft total of i and may hit, stand, or double.
- $\{pair_i : i \in \{2, \ldots, 11\}\}$: the player holds two cards, each of value i, and may hit, stand, double, or split.
- $\{hard_i : i \in \{5, \ldots, 20\}\}$: the player holds more than two cards for a hard total of i and may hit or stand.
- $\{soft_i : i \in \{13, \ldots, 20\}\}$: the player holds more than two cards for a soft total of i and may hit or stand.
- $\{stand_i : i \in \{4, \ldots, 21\}\}$: the player stands with the original bet and a total of i.
- $\{doubStand_i : i \in \{6, \ldots, 21\}\}$: the player stands with a doubled bet and a total of i.
- $\{split_i : i \in \{2, \ldots, 11\}\}$: the player splits a pair, each card valued i (modeled as an absorbing state).
- bj: the player holds a blackjack (natural).
- $bust$: the player busts with his original bet.
- $doubBust$: the player busts with a doubled bet.

Note that different states with the same total often indicate that different options are available to the player. In total, we obtain a state space with $|\Psi_P| = 116$.

Analysis of this Markov chain is similar to the dealer's chain described above. The player's strategy dictates a particular move by the player (hit, stand, double, or split) for each of the states; in terms of this Markov chain, the strategy dictates the allowable transitions. Subsequently, transition probabilities are assigned according to the distribution $\mathcal{D}$ of cards in the shoe. In this way, the transition matrix *encodes* both the player's strategy and the shoe distribution.

Because the player's total increases with each transition (except possibly once when a soft hand transitions to hard), it follows that within 21 transitions, any random walk will necessarily reach one of the absorbing states. Once again, it follows that row $first_i$ of P_γ^{21} will yield the distribution on these states, assuming the player begins with card i. Averaging over all possible initial cards i (and weighting by the probability $d(i)$ that the starting card is i), we may compute the overall distribution on the player's absorbing states.

While the player's analysis is similar to the dealer's analysis (Section 3.2) in most respects, the primary difference comes from the possibility of a split hand. We include a series of absorbing states $\{split_i\}$ for the event where the player elects to split a pair of cards i. Intuitively, we imagine that the player then begins two new hands, each in the state $first_i$. To model the play of one of these hands, we create another Markov chain (similar to the player's chain described above), but we construct this chain using the particular rules that govern the play of a post-split hand [5, 6].[3]

3.4 Computing the per-hand advantage

Assume the dealer shows card γ face up. To compute the player's advantage for such a hand, we must determine the probability of each possible combination of dealer/player outcomes. As described in Section 3.2, we may use row $first_\gamma$ of the matrix D^{17} to determine the distribution $u_\gamma(i)$ on the dealer's absorbing states $U = \{i \in \Psi_D : (D)_{i,i} = 1\}$. Similarly, we may use P_γ^{21} to determine the distribution $v_\gamma(j)$ on the player's absorbing states $V_\gamma = \{j \in \Psi_P : (P_\gamma)_{j,j} = 1\}$. Note that these outcomes are independent given γ, so the probability for any pair of dealer/player outcomes can be computed from the product of the distributions.

For any combination of the dealer's absorbing state $i \in U$ and the player's absorbing state $j \in V$, we must also determine the expected profit $\alpha(i, j)$ for the player, assuming an initial unit bet (i.e., $\alpha(i, j) = 0$ denotes breaking even). When j is not a split-absorbing state, the profit is deterministic, as explained in Section 2. When j is a split-absorbing state, the expected profit is computed by using the two post-split Markov chains (described in Section 3.3) and examining the appropriate row of the iterated transition matrix.

We can compute precisely the player's advantage on a single hand simply by averaging the player's profit over all possible combinations of the player's and dealer's absorbing states (weighting each combination by its probability), and then averaging over all possible up-cards for the dealer:

$$a = \sum_{\gamma=2}^{11} d(\gamma) \sum_{i \in U} \sum_{j \in V_\gamma} u_\gamma(i) v_\gamma(j) \alpha(i, j).$$

We reiterate that this result implicitly depends on the distribution $\mathcal{D}$ and the strategy $\mathcal{S}$.

4 Analyzing a card-counting system

Throughout a round of blackjack, a player can expect variations in the distribution $\mathcal{D}$ of cards remaining in the shoe. Many people have made several key observations along these lines:

- The player may vary the betting and playing strategy, while the dealer must play a fixed strategy.

[3] For simplicity, we assume the player is limited to splitting only once, although the analysis is easily extended to multiple splits.