



TESIS DE GRADO
EN INGENIERÍA INDUSTRIAL

LA VARIACIÓN DE PRECIOS ESPECULATIVOS:
LA VISIÓN DEL MERCADO COMO UN SISTEMA
ADAPTATIVO COMPLEJO.

Autor: Tomás Aftalión.
Legajo 45355.

Directores de Tesis: Ing. Maximiliano Catalano Dupuy,
Ing. José Jalil, Ing. Juan Marcelo Lezama.

2010

La variación de precios especulativos.

A mis viejos, quienes siempre me apoyaron.

La variación de precios especulativos.

SUMMARY

The current Thesis comprises a research and analysis on the theory concerning the variation of speculative prices, specially those new approaches included in the field known as *Complexity Science*. The objective consists in using this framework in applications, thus suggesting a new approach and understanding in both academic and professional circles.

The method used throughout the study involves merging and combining different theories which will constitute a realistic alternative to the *Efficient Market Hypothesis*. It is time that current limitations found in the use of deductive-mathematical models with equilibrium to attack economic problems are accepted, mostly in the wake of new tools and practices which flourished in recent years. The study of Benoit Mandelbrot, critical-type phenomena and *agent-based modeling* in the study of *complex adaptive systems* are analyzed thoroughly throughout the work.

Given that Complexity Science is a recently established area of investigation, it is probable that the current work stands as one of the first in applying several of its ideas in a final project within Buenos Aires Institute of Technology (ITBA). The author hopes this study will serve as inspiration for future investigations, and will emphasize the urgent need in introducing various of Complexity Science's concepts and ideas into ITBA's curricula.

La variación de precios especulativos.

RESUMEN

La presente Tesis conforma una investigación y análisis de la teoría referente a la variación de precios especulativos, en especial a los nuevos desarrollos que ubican dicho estudio dentro de lo que se conoce como la “Ciencias de la Complejidad”. El objetivo consiste en proponer aplicaciones prácticas a partir de dicha investigación, y sugerir así un nuevo enfoque dentro del ámbito académico y profesional.

La metodología consiste en combinar distintos estudios y disciplinas para ofrecer una alternativa realista a “la hipótesis de la eficiencia en los mercados”, y poder librarse de cierta rigidez teórica que impide el adecuado entendimiento de un mercado. Es hora de que se reconozcan las limitaciones en la utilización de modelos matemático-deductivos en equilibrio, para analizar problemas económicos, sobre todo cuando empiezan a surgir nuevas herramientas en el campo académico. Se analiza el trabajo de Benoit Mandelbrot, la teoría que describe eventos críticos y la utilización de modelos basados en agentes para el estudio de “sistemas adaptativos complejos”.

Debido a que la “Ciencia de la Complejidad” se trata de un área científica conformada recientemente, es probable que el presente estudio sea uno de los primeros, dentro del Instituto Tecnológico de Buenos Aires (ITBA), que incorpore varios de sus conceptos en un proyecto final. Es el deseo del autor que el proyecto de investigación sirva como disparador de futuros trabajos, y pueda resaltar la urgencia de introducir varios de los conceptos inherentes a dicha disciplina dentro del plan de estudios del ITBA.

La variación de precios especulativos.

ÍNDICE

1. Introducción	1
1.1 Marcos teóricos	2
1.1.1 La hipótesis de la eficiencia en los mercados.	3
1.1.2 Una visión fractal de la turbulencia financiera.	3
1.1.3 Criticalidad Autoorganizada.	3
1.1.4 Sistemas Adaptativos Complejos.	3
1.2 Consideraciones generales.	4
2. Una mirada distinta	7
2.1 Algodón diques costas y algo más.	7
2.1.1 Benoit Mandelbrot.	8
2.1.2 Leyes de potencia.	9
2.1.3 Distribuciones de Lévy.	11
2.1.4 La variación de ciertos precios especulativos.	13
2.1.5 Cómo dimensionar un dique (y un mercado).	18
2.1.6 ¿Qué tienen en común una costa, un copo de nieve y un mercado?	20
2.1.7 Caricaturas de mercado.	23
3. Pensamiento crítico	25
3.1 Una comunidad de partículas.	25
3.2 De fluidos a imanes: algo más que una coincidencia.	27
3.3 Leyes de potencia y escala (una vez más).	30
3.4 Más estable de lo que uno creería.	31
3.4.1 Criticalidad organizada.	32
4. Agentes: los nuevos conejillos de las indias	37
4.1 Influencias.	38
4.1.1 Pléctica.	39
4.1.2 GOL.	39
4.1.3 Un mundo pequeño.	40
4.2 Rasgos principales.	42
4.3 Historia.	44
4.3.1 Modelos de segregación.	44
4.3.2 Una ecología de estrategias.	45
4.3.3 Sociedades artificiales.	47
4.4 Aplicaciones al estudio de mercados financieros.	50
4.4.1 El juego de las minorías.	50
4.4.2 Culpen al subastador.	53
4.4.3 Fundamentalista o especulador, he aquí la cuestión.	56

5. Incursiones prácticas.	61
5.1 Estimación del exponente de Hurst para el índice Merval.	61
5.1.1 Método.	61
5.1.2 Resultados.	63
5.1.3 Menos normal de lo que uno creería...	64
5.2 La variación de precios especulativos en el índice Merval.	67
5.2.1 Marco teórico.	67
5.2.2 Métodos y Resultados.	68
5.2.3 Conclusiones.	69
5.3 Análisis de un modelo con agentes.	71
5.3.1 Influencias y marco teórico.	71
5.3.2 Descripción del modelo.	72
5.3.3 Utilización y análisis del modelo.	74
5.3.4 Conclusiones generales acerca del modelo.	82
6. Coda.	85
6.1 Una visión aproximadamente correcta.	85
6.2 el camino por delante.	87
6.3 Ideas para nuevos estudios.	89
A. Historia de la especulación.	91
A.1 Historia de burbujas, manías y crisis especulativas.	91
A.1.1 La especulación en la Antigüedad, la Edad Media y comienzos de la era moderna.	91
A.1.2 La manía de los tulipanes.	93
A.1.3 La burbuja de South Sea.	94
A.1.4 El crash del '29.	96
A.1.5 Otros episodios y consideraciones.	97
A.2 El estudio de la variación de precios especulativos.	99
B. Un origen remoto.	101
B.1 Louis Bachelier.	101
B.2 Theorie la speculation.	102
B.2.1 Supuestos.	103
B.2.2 Futuros de Bachelier y el valor fundamental en los mercados.	104
B.2.3 Distribución de probabilidades.	105
B.2.4 Paseo aleatorio.	109
B.2.5 Primeras grietas.	110
C. El templo de Wall Street.	113
C.1 Cómo fabricar una cartera eficiente.	113
C.1.1 Harry Markowitz.	113
C.1.2 Selección de carteras.	114
C.2 ¿Y si todos hicieron los mismo?	118
C.2.1 William Sharpe.	118
C.2.2 Los precios de los activos de capital: una teoría del	

equilibrio de los mercados en condiciones de riesgo.	119
C.3 Los discípulos de Bachelier.	126
C.3.1 El nacimiento de una fórmula.	126
C.3.2 Los precios de opciones y pasivos corporativos (1973).	131
D. Buenas preguntas.	133
E. Otras teorías.	149
F. Mapa de las “Ciencias de la Complejidad”.	153
G. Exponente de Hurst.	155
Bibliografía.	157

La variación de precios especulativos.

CAPITULO 1

INTRODUCCIÓN

“Es preferible estar aproximadamente correcto, que exactamente equivocado.”

-John Maynard Keynes.

“Yo sólo sé que no sé nada”

-Sócrates.

La presente Tesis configurará una crítica al análisis y explicación del funcionamiento de los mercados, sobre todo en lo referente a la variación de los precios especulativos y a la visión del mercado como un sistema adaptativo complejo. El objetivo final es denunciar la necesaria introducción de nuevas herramientas, tanto prácticas como conceptuales, con las cuales observar y entender el funcionamiento de un mercado. Debido a que se trata de un campo teórico novedoso que no se encuentra muy difundido a nivel académico y profesional, la comprensión y exposición de dicho campo ocupará gran parte del estudio. Es el punto inicial de un estudio que me he propuesto continuar en un futuro.

A pesar de que las aplicaciones prácticas de corte profesional se encuentran en un estado de experimentación, esta dificultad se ve más que compensada por la flexibilidad, belleza y originalidad que estas nuevas ideas pueden aportar en un futuro no tan lejano. Más allá de los resultados específicos encontrados en las aplicaciones prácticas, lo que debe prevalecer es el enfoque y la aplicación de nuevos conceptos e ideas científicas.

Las aplicaciones prácticas son tres: la primera consiste en la utilización del exponente de Hurst en los mercados, la segunda en la aplicación del análisis comenzado por Mandelbrot en los años sesenta al estudio de un mercado y la tercera en la utilización de un modelo basado en agentes para proporcionar explicaciones endógenas al funcionamiento de un mercado.

El mensaje que debe prevalecer es: el mercado, tal como la economía, el clima, el tráfico, la evolución y muchos otros fenómenos que encontramos a nuestro alrededor son sistemas adaptativos complejos, y consecuentemente necesitan de un marco teórico que incluya este hecho. La matemática y la filosofía reduccionista prevaleciente desde el siglo XVII, útil en la física y muchas otras áreas del conocimiento, no son adecuadas a la hora de abordar sistemas altamente complejos.

Se debe tener la humildad de aceptar este hecho, e intentar proporcionar explicaciones realistas que estén dispuestas a sacrificar certeza por entendimiento.

1.1 Marcos teóricos

El recorrido del trabajo expondrá diversas ideas, teorías y aplicaciones prácticas, desde las más aceptadas a las más novedosas. El objetivo será presentar de forma didáctica los distintos estudios y marcos teóricos que existieron con respecto a la variación de precios especulativos para poder aplicar dicha teoría a ejemplos concretos. Siempre que sea posible se intentará indagar con la mayor profundidad posible, asumiendo que va dirigido a aquellos con cierta fluidez y entendimiento matemático. No obstante, la utilización de ecuaciones no debe ser vista como limitante a la hora de entender los conceptos. Es preferible que se continúe con la lectura para poder obtener una idea general de lo que se busca argumentar. A continuación se presenta una breve introducción a los principales marcos teóricos que son esenciales para la comprensión de esta nueva disciplina.

1.1.1 La hipótesis de la eficiencia en los mercados.

La hipótesis de la eficiencia en los mercados (EMH: *Efficient Market Hypothesis*) sostiene que los mercados financieros, en términos de información, son eficientes. Es decir, el precio actual del activo en cuestión refleja toda la información pública disponible y cualquier fluctuación proviene del arribo de nueva información. Asimismo dicha hipótesis requiere que sus agentes posean expectativas racionales: si bien pueden existir inversores que sobre-reaccionen u otros que sean relativamente insensibles a las noticias, en promedio, el mercado refleja toda la información disponible. Esencialmente, esta hipótesis asume que el mercado esta compuesto de suficientes personas como para estar equivocado y, sin información interna, no es posible ganarle consistentemente al mercado.

Las variaciones observadas durante el transcurso del día fueron ocasionadas por las noticias imprevistas de la jornada. Incluso, las noticias de ayer no tienen relevancia alguna, y la variación observada en el presente no esta correlacionada con las del pasado: es decir, la variación de precios especulativos es considerada como una de eventos independientes. De ser eventos independientes y aleatorios, el camino trazado por la variación de precios será esencialmente un paseo aleatorio: en el límite, la distribución de la variación de precios se aproximará a la de una curva normal. Esta suposición de normalidad provee la justificación para el uso de una gran cantidad de herramientas estadísticas y de soluciones óptimas. La hipótesis de la eficiencia en los mercados no requiere necesariamente de la suposición de normalidad, aunque dicha suposición requiere de la mencionada hipótesis.

De hecho, la hipótesis de la eficiencia en los mercados fue posterior al supuesto de normalidad y de un paseo aleatorio. Fue la cúspide de un proceso de racionalización que duró varios años y no proviene de la observación sino de una necesidad. Incluso, varios de los modelos construidos fueron realizados a medida que surgía evidencia empírica que contradecía los supuestos de normalidad y varianza finita.

En los Anexos B y C se recorre el camino que llevó a la construcción de un edificio teórico de gran sofisticación que continua en uso al día de hoy. Comenzando por Bachelier, y siguiendo por los estudios de Markowitz, Sharpe, Black, Merton y Scholes se repasará en detalle el desarrollo de varios de los *papers* más famosos en el mundo de lo que se denomina las finanzas modernas.

1.1.2 Una visión fractal de la turbulencia financiera.

Una de las primeras personas en cuestionar, y proponer alternativas al marco teórico edificado sobre la hipótesis de la eficiencia en los mercados fue Benôit Mandelbrot, sobre todo en lo referente a la agrupación y exceso de volatilidad. Su uso de familias de distribución, conocidas como L-estables o estables de Lévy, incluye a la normal como un caso extremo dentro de un marco teórico más amplio. Asimismo, la inclusión de conceptos teóricos distintos y apartados de la doctrina económica clásica, tales como el análisis de rango reescalado en la determinación del exponente de Hurst, provee de ideas nueva a la hora de comprender la influencia de la historia en los precios.

En el Capítulo 2 se presenta la obra de este peculiar matemático junto con conceptos tales como fractales y leyes de potencia. Hoy día, a partir de la reciente crisis, ha habido un nuevo interés en las ideas de este excéntrico personaje y autores populares tales como Nassim Taleb (*The Black Swan*) se han beneficiado con su popularización. El Capítulo 5 aplica varias de las técnicas desarrolladas por Mandelbrot en la década del sesenta.

1.1.3 Criticalidad Autoorganizada.

El estudio de la criticalidad autoorganizada puede ser ubicado dentro de las ciencias de la complejidad. Básicamente, su estudio argumenta que distintos sistemas físicos compuestos de un gran número de componentes, ya sea una pila de arena, una red de resortes, un ecosistema o un mercado, pueden exhibir un comportamiento característico. Los sistemas son complejos en el sentido de que no existe una dimensión predominante de tiempo o variación de las perturbaciones. A pesar de esto, las propiedades estadísticas de estos complejos modelos exhiben simples leyes de potencia. Incluso, los exponentes pueden ser idénticos para sistemas que aparentan ser distintos a un nivel microscópico. El Capítulo 3 presenta en detalle distintos conceptos referentes al tema y estudia el *paper* más conocido en esta nueva disciplina.

1.1.4 Sistemas Adaptativos Complejos.

El estudio de los Sistemas Adaptativos Complejos se ubica dentro de lo que se conoce como Ciencias de la Complejidad (*Complexity Science*). Su visión se opone al reduccionismo que prevaleció en el mundo científico desde la era de Descartes, y propone un estudio interdisciplinario basado en la búsqueda de similitudes entre distintos sistemas encontrados en la naturaleza. Desde el estudio de colonias de insectos al comportamiento del tráfico, los sistemas adaptativos complejos abarcan un

sinfín de ejemplos en donde “el conjunto es superior a la suma de sus partes”. Es una disciplina reciente y abarca campos teóricos diversos tales como la teoría del caos, evolución, genética, redes, inteligencia artificial, ciencia computacional e informática, entre otros. El mercado, consecuentemente, puede ser considerado un sistema adaptativo complejo. En el Capítulo 4 se presentará un panorama general y de qué manera se inserta el estudio de mercados en dicha disciplina. La simulación basada en agentes es una herramienta de gran utilidad para entender el comportamiento de muchos sistemas. En el Capítulo 5 se utilizará un modelo basado en agentes y se lo analizará en profundidad.

1.2 Consideraciones generales.

El objetivo principal de este trabajo no será presentar cada una de estas teorías de forma fragmentaria y separada, sino que se buscará generar una continuidad y entrecruzamiento entre los distintos conceptos exhibidos. Al igual que en las Ciencias de la Complejidad, se espera que el “conjunto sea superior a la suma de sus partes”. Debido a que el marco teórico sobre el cual se basa la Tesis es uno de poca difusión en el ámbito profesional y académico, es preciso presentarlo de forma detallada antes de profundizar en los desarrollos y aplicaciones prácticas. Dicho establecimiento de la teoría y profundización en distintos conceptos ocupará la mayor parte del estudio.

Más allá de las respuestas que se puedan proporcionar, serán aún más importantes las nuevas preguntas a formularse. La metodología y filosofía que se intentó seguir a lo largo del trabajo fue una de constante curiosidad y replanteo de los conocimientos. Muchas veces es más importante ser concientes de lo que no conocemos, que estar satisfechos con la teoría aceptada. La tesis es útil, por lo tanto, para alguien que recién empieza a indagar en el tema, como para alguien familiarizado con varias de las teorías reconocidas por el ámbito académico y profesional.

Algunas de las cuestiones generales que aparecerán a lo largo del trabajo, y que se procurará seguir a lo largo del mismo serán las siguientes:

- ¿Qué es un mercado?
- ¿Cómo puede describirse la dinámica de la variación de precios especulativos?
- ¿El mercado puede ser analizado como un sistema adaptativo complejo?
- ¿El mercado realiza un paseo aleatorio?
- ¿Por qué existen burbujas y *crashes*?
- ¿Qué alternativas existen a la hipótesis de la eficiencia en los mercados?
- ¿Qué herramientas alternativas existen?
- ¿Existen modelos que repliquen la dinámica real de la variación de precios?
- ¿Hacia donde puede tender el estudio de la variación de los precios especulativos en años próximos?

La estructura de la Tesis se encuentra dividida de la siguiente manera:

Capítulos

- 1 Introducción.
- 2 Una mirada distinta: Benoit Mandelbrot, crítica y alternativas.
- 3 Pensamiento crítico: puntos críticos, fases y criticalidad autoorganizada.
- 4 Agentes: los nuevos conejillos de las indias. Modelos basados en agentes y Ciencias de la Complejidad.
- 5 Incursiones prácticas: aplicaciones.
- 6 Conclusión.

Anexos

- A. Historia de la especulación.
- B. Un origen remoto: obra de Louis Bachelier y nacimiento de las finanzas modernas.
- C. El templo de Wall Street: estudios de Markowitz, Sharpe, Black y Scholes y desarrollo de las finanzas modernas.
- D. Buenas preguntas: Repaso de conceptos.
- E. Otras teorías.
- F. Ciencias de la complejidad: mapa conceptual.
- G. Exponente de Hurst: programa en visual Basic.

Sin más preámbulo, se dará inicio a un recorrido que, más allá si el lector pertenece o no al sector financiero, se espera que atrape su imaginación. Aquellos que prefieran comenzar por la historia de la especulación y la construcción de lo que se conoce hoy en día como las finanzas modernas encontrarán los Anexos A, B y C interesantes.

CAPITULO 2

UNA MIRADA DISTINTA

“Cuando una teoría le parezca a usted como la única posible, tome esto como un signo de que no ha entendido la teoría ni el problema que se tenía la intención de resolver.”

-Karl Popper

El marco teórico abordado por las finanzas modernas (Anexo A y Anexo B) está cimentado sobre suposiciones que asumen un paseo aleatorio geométrico, desvíos y medias estables, equilibrios microeconómicos y otros tantos supuestos que fueron impuestos con el propósito de modelizar el funcionamiento de un mercado. Tal enfoque no es nuevo, ni singular a las finanzas, ya que toda teoría ya sea física, biológica o económica debe poder abstraer los aspectos fundamentales del mundo real para plasmarlos en algún modelo. Un físico puede modelizar un péndulo despreciando el rozamiento, lo cual será aceptable si sus consecuencias permiten representar la realidad con cierto grado de precisión. De la misma manera en las finanzas, como comenta Sharpe, *“la prueba de una teoría no es el realismo de sus suposiciones sino la aceptabilidad de sus implicaciones”* [Sharpe, 1964]. No obstante dicha teoría predice un comportamiento parejo sin saltos abruptos, gobernado por la sumatoria de una infinidad de hechos pequeños y sin memoria, mientras que la vida real está claramente determinada por unos pocos eventos decisivos con la historia influyendo en el presente y futuro. Es por esto que es necesario permanecer curiosos frente al mundo que nos rodea y no aceptar teorías sin una visión crítica. De lo contrario nos vemos condenados a seguir cometiendo los mismos errores.

Este Capítulo presentará cómo varios de los supuestos que presenta las finanzas modernas no son meramente simplificaciones, sino que aproximan la realidad desde un punto de vista que impide contemplar el verdadero comportamiento de los mercados. Se analizará en gran medida las ideas propuestas por Benoit Mandelbrot en la década del sesenta, la aparición de leyes de potencia en la economía empezada por Vilfredo Pareto hacia principios del siglo XX, distribuciones de Lévy, memoria en los mercados, uso de fractales y algunos nuevos enfoques que han comenzado hace no tanto tiempo.

2.1 Algodón, diques, costas y algo más...

“El verdadero viaje del descubrimiento no consiste en buscar nuevos paisajes sino en tener nuevos ojos”

2.1.1 Benoît Mandelbrot

Como suele suceder con muchas ideas innovadoras en las ciencias, éstas no son gestadas en el centro intelectual del momento sino que vienen generalmente de individuos apartados y hasta de otras áreas de estudio con una perspectiva distinta y fresca. Al igual que Bachelier, Mandelbrot estudió matemáticas y aportó ideas revolucionarias al campo de las finanzas hacia principios de la década del sesenta. Sin embargo, debido a que muchas de las proposiciones avanzadas por este peculiar francés de ascendencia lituana atacaban las bases del edificio teórico financiero que se estaba comenzando a levantar alrededor de esa época, nunca se lo consideró un miembro del círculo académico financiero del momento y se ignoraron muchas de sus ideas.

Benoît B. Mandelbrot nació un 20 de Noviembre de 1924 en Varsovia, Polonia en una familia judía de Lituania. Debido a un miedo de su madre a las epidemias Benoît fue educado en privado por el marido de su tía, un hombre que desaprobaba los métodos tradicionales de educación. Gracias a él fue como Mandelbrot pasó los primeros años de su vida jugando al ajedrez, leyendo mapas y aprendiendo a mantener los ojos abiertos a cualquier cosa que sucediera a su alrededor. Por otra parte, fue criado en un ambiente de una fuerte tradición intelectual con un padre médico y tíos doctorados en matemática [Mandelbrot, 2002].

A los once años, previendo la amenaza Nazi que comenzaba a asomarse desde Alemania, huyó con su familia a Francia en 1936. Fue aquí donde comenzó a frecuentarse con el hermano menor de su padre, Szolem Manelbrojt, matemático que influyó profundamente en el joven Benoît.

En 1939 con el comienzo de la Segunda Guerra Mundial se vio forzado a dejar Paris e ir a vivir a Tulle, un pequeño pueblo rural en el centro de Francia. Más tarde con la intensificación del dominio Nazi sobre Francia, tuvo que permanecer lejos de las universidades para reducir el riesgo a ser detenido. Afortunadamente, gracias a unos amigos pudo arreglárselas para ingresar al *Lycée du Parc*, en Lyon, aunque tuvo que permanecer con un perfil bajo por un tiempo. Finalmente, con el desembarco de Normandía pudo realizar los exámenes necesarios para ingresar a *Les Grandes Écoles*, y al obtener excelentes notas en matemáticas pudo elegir la universidad que más se amoldaba a sus necesidades: *École Polytechnique*. Estudio de 1945 a 1947 bajo la tutela de notables personalidades tales como Paul Lévy y de 1947 a 1949 fue al *California Institute of Technology (CalTech)* a estudiar aeronáutica, lugar donde fue presentado a temas relacionados a la turbulencia, los puntos críticos y la estadística. Tras retornar a Francia, Mandelbrot obtuvo su doctorado en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Paris en 1952.

En 1953 retornó a los Estados Unidos para ser el último alumno post-doctoral del famoso John Von Neuman y al poco tiempo ingresó a IBM, corporación que en los años cincuenta había comenzado con un programa de investigación y desarrollo contratando a las mentes más brillantes del momento. Este lugar fue propicio para que Mandelbrot persiguiera sus curiosidades e intereses por varios años. Uno de ellos

se basó en la descripción de la variación de los precios del algodón, paper que será comentado en este Capítulo.

En 1975 bautiza y expande un área de las matemáticas conocida como fractales, la cual describe una geometría de lo áspero, a diferencia de las suaves superficies Euclidianas. En 1982 publica *The Fractal Geometry of Nature*, libro que terminaría por insertar dicha temática en el ámbito establecido de las ciencias y las matemáticas. Mandelbrot es y será una personalidad que no podrá ser encasillada bajo ninguna etiqueta, ya que siempre dejó que su instinto y curiosidad lo lleven por caminos jamás transitados que resultarían ser fértiles para nuevos descubrimientos.

2.1.2 Leyes de potencia

La historia de cómo Mandelbrot arriba a varias de sus conclusiones con respecto al comportamiento de los mercados comienza hacia principios del siglo XX con el estudio de la distribución del ingreso realizada por Vilfredo Pareto, ingeniero, sociólogo y economista italiano. Él fue la primera persona en desarrollar el famoso concepto de la regla del 80-20, según la cual el veinte por ciento de la población posee el ochenta por ciento de la riqueza.

Antes de Pareto la economía pertenecía a una rama de filosofía social, con *The Wealth of Nations* de Adam Smith como el máximo exponente. Dicho enfoque era más bien especulativo y abstracto, sin embargo el uso de datos y ecuaciones matemáticas comenzado por el economista italiano en 1909 se encuentra más próximo a técnicas modernas usadas hoy en día que al ensayo escrito por el filósofo escocés hace más de dos siglos.

Tras reunir los registros de impuestos de Augsburgo, Alemania, en los años 1471, 1498 y 1512, junto a registros contemporáneos de los ingresos por alquiler de París y la renta personal de Inglaterra, Prusia, Sajonia, Irlanda, Italia y Perú, Vilfredo sintetizó la información en un gráfico y descubrió algo sorprendente: en todos los casos la distribución de la riqueza parece seguir una ley de potencia, es decir, aparecerá una línea recta, si se traza dicha distribución sobre un gráfico logarítmico [Mandelbrot 2004]. Dicha distribución puede expresarse mediante la siguiente fórmula:

$$P(x) = C x^{-\alpha} \quad (2.1)$$

Lamentablemente, Pareto prosiguió a realizar conclusiones políticamente incorrectas, las cuales fueron recogidas por el fascismo años más tarde, acerca de la naturaleza humana. Afirmaba que la democracia es un fraude ya que la estructura de la sociedad permanece invariable, con unos pocos ricos en la cima y una mayoría de pobres en la base, razón por la cual Karl Popper lo llamo un teórico del totalitarismo. A continuación se presenta el gráfico de *Manuel d'Économie Politique* publicado por Pareto en 1909, figurando la cantidad de individuos en el eje de las abcisas y la riqueza en el eje de las ordenadas.

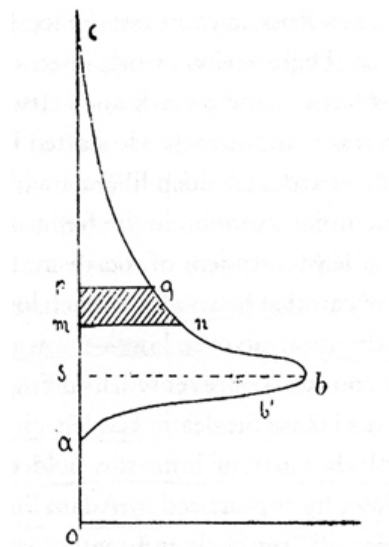


Figura 2.1: gráfico correspondiente a la distribución de riquezas [Pareto, 1909]

Otra personalidad que expandió el estudio de leyes de potencia dentro de fenómenos sociales fue George Kingsley Zipf, lingüista y filólogo americano de la Universidad de Harvard nacido en 1902. Él se dedicó al estudio de la frecuencia del uso de las palabras y arribó a una conclusión muy similar a la de Pareto: están distribuidas según una ley de potencia, es decir, palabras comunes tales como “la” y “el” aparecerán frecuentemente mientras que palabras infrecuentes, tales “filólogo”, lo harán esporádicamente.

En 1950 Mandelbrot estaba buscando un tema innovador para escribir su tesis para la Universidad de Paris, y fue su tío Szolem, el cual poseía una visión abstracta y pura de las matemáticas, en donde las aplicaciones a la vida real eran vistas como áreas de baja estima, quien lo introdujo a esta peculiar perspectiva de un lingüista estadounidense. *Selected Studies of the Principle of Relative Frequency in Language*, escrito en 1932, era justo lo que necesitaba el joven Benoît, ya que gracias a su educación matemática podría expandir varias de las proposiciones comenzadas por Zipf.

Para 1952 Mandelbrot tenía en sus manos una disertación doctoral un tanto peculiar: la primera parte comprendía matemáticas lingüísticas, y la segunda trataba estadística termodinámica. Varios de sus amigos le comentaron que dicha combinación no era para nada natural, ya que no sólo trataba de darle un marco matemático al trabajo lingüístico de Zipf, sino que compartía y trataba de explicar una visión excéntrica para la época en que las leyes de potencia son una constante en las leyes sociales. Incluso, la segunda parte, era un área poco activa de la física que recién en los años sesenta pasaría a ser revitalizada bajo el estudio de fenómenos críticos. Sin embargo, la disertación tenía que ser etiquetada para un área de estudio formal, y tras consultar a un amigo de sus padres, Alfred Kalster, su tesis fue incluida bajo el rótulo de

matemáticas aplicadas. Dicho trabajo marcó gran parte de lo que trabajaría en las próximas dos décadas [Mandelbrot, 2004].

Para la época, el enfoque de Mandelbrot era poco ortodoxo, por no decir más, no obstante las leyes de potencia pasarían a ser estudiadas años mas tarde en diversos fenómenos desde intensidades sísmicas a citas científicas, relaciones interpersonales y cantidades de muertes en guerras¹. Las leyes de potencia aparecen en una variedad de fenómenos sociales y físicos, razón por la cual Pareto se vio fascinado ante su existencia:

“Arriba, muy por encima de los prejuicios y las pasiones de los hombres existen leyes de la naturaleza. Eternas e inmutables, son la expresión del poder creativo que representan, lo que debe ser, lo que no podía ser de otra manera. El hombre puede llegar a comprender lo siguiente: que él es incapaz de cambiarlas.”

2.1.3 Distribuciones de Lévy.

En su paso por la *École Polytechnique*, Mandelbrot conoció a Paul Lévy, quien para ese entonces, comenzaba a ser reconocido en la teoría de la probabilidad. Dicha área empezaba a ser aceptada formalmente por el círculo académico del momento, y Lévy cercano a sus sesenta años, repentinamente obtuvo la fama que le fue negada años atrás.

Este profesor de análisis matemático, en 1925 descubrió una familia de distribuciones denominadas más tarde como distribuciones estables, L-estables, o estables de Lévy. Tal como sugiere su nombre, dichas distribuciones, las cuales están determinadas por cuatro parámetros, α , β , μ y c , permanecen invariables ante una combinación lineal de las mismas, o expresado con mayor precisión,

Sean X_1 y X_2 variables aleatorias distribuidas según una distribución estable $L(x; \alpha; \beta; \mu; c)$ y si $Y = AX_1 + BX_2 + C$ es una combinación lineal de las mismas, entonces existen valores de D y E tal que $DY + E$ se encuentra distribuida según $L(DY + E; \alpha; \beta; \mu; c)$ o equivalentemente Y se encuentra distribuida según $L(Y; \alpha; \beta; (\mu - E)/D; c/D)$.

El parámetro α mide cuán empinado es el pico de la distribución, el β es una medida de la asimetría, mientras que el μ y el c son simplemente una medida del desplazamiento y ancho. Lo especial de esta familia de distribuciones es que abarcan a otras dos funciones muy conocidas en sus extremos: la distribución de Gauss para el caso en que $\alpha = 2$, $\beta = 0$; $c = 1$ y $\mu = 0$ y la de Cauchy para el caso en que $\alpha = 1$, manteniendo los otros parámetros igual. Esto significa que variando α iremos

¹ Sean Gourley, TED talks, Febrero de 2009.

obteniendo distintos tipos de familias de distribuciones. Incluso, en sus extremos (para valores grandes de x) dichas distribuciones se comportarán según una ley de potencia, las cuales fueron expuestas en el punto anterior.

A diferencia de la distribución de Gauss o Cauchy, las distribuciones de Lévy no poseen una representación analítica sino que se expresan mediante la transformada de Fourier de su función característica. Recordamos que la función característica se define como,

$$\hat{p}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{izx} dx, \quad (2.2)$$

mientras que la transformada de Fourier se expresa según,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt. \quad (2.3)$$

De esta forma representamos la distribución de Lévy como,

$$L(x)_{\alpha;\beta;\mu;c} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{L}(t) e^{-ixt} dt \quad (2.4)$$

siendo $\hat{L}(t)$ la función característica, la cual es,

$$\hat{L}(t) = \exp \left(it\mu - |ct|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(t) \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right). \quad (2.5)$$

A primera vista dicha función puede resultar un poco intimidante, sin embargo, si asumimos que no hay asimetría ($\beta = 0$), su pico ocurre en $x = 0$ por ende $\mu = 0$, y bajamos c de los subíndices tendremos como función característica,

$$\hat{L}(t)_\alpha = \exp(-c |t|^\alpha). \quad (2.6)$$

Debemos recordar que esta ecuación no es la distribución de probabilidades, sino que debe ser obtenida mediante la transformada de Fourier, ya que no existe una expresión analítica para ella. No obstante, en el límite, la distribución se comporta según una ley de potencias [Voit, 2005]:

$$L(x)_\alpha \approx \frac{\alpha A^\alpha}{|x|^{1+\alpha}} \quad \text{con } |x| \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad A^\alpha \propto c. \quad (2.7)$$

Otra cualidad interesante de estas distribuciones es que para $0 < \alpha < 2$ la varianza tiende a infinito, mientras que la esperanza es finita. Esto significa que a diferencia de la distribución Gaussiana, no veremos el desvío tender hacia un valor fijo, sino que debemos esperar que varíe constantemente. A modo de analogía podríamos comparar un proceso con desvío finito, tal como la distribución de estaturas de una población, en donde un valor no puede afectar en mayor medida al promedio, con un proceso de desvío infinito, tal como los disparos de un arquero, en donde un tiro puede llegar a influir el promedio total. Mandelbrot las distingue como *aleatoridad leve* y *aleatoridad salvaje*, para acentuar la noción de que se trata de procesos esencialmente distintos, y sugiere que el comportamiento de los mercados se ubica dentro de la segunda categoría.

Teniendo el arsenal de herramientas matemáticas proporcionados por Lévy, sumado a las leyes de potencia proporcionadas por Pareto y Zipf, Mandelbrot se lanzó a unir estos puntos y generar una de las críticas más interesantes que se realizaran a la base de las finanzas modernas.

2.1.4 La variación de ciertos precios especulativos (1963)

La historia de cómo Mandelbrot presenta este revolucionario paper en 1963, comienza dos años antes en Harvard, dentro de la oficina de Hendrik S. Houthakker. En ese entonces, el matemático francés estaba trabajando para IBM en temas relacionados a la economía. Mediante las ya arcaicas tarjetas perforadas, Mandelbrot había realizado un estudio de la distribución del ingreso siguiendo los pasos de Pareto, aunque aplicando varias de las herramientas heredadas de Lévy. Su trabajo había empezado a intrigar a algunas economistas del ámbito académico del momento, razón por la cual Houthakker lo contactó para que realizara una exposición de sus estudios.

Parte de su charla consistía en proporcionar una explicación a la curva descubierta por el economista italiano hacia principios del siglo XIX (Figura 2.1). Curiosamente, al entrar a la oficina del profesor de economía de Harvard, Benoît observó la misma imagen dibujada sobre el pizarrón. Intrigado, Mandelbrot le preguntó cómo era que uno de los gráficos de su presentación estaba dibujado en el pizarrón. Resulta que Hendrik no tenía la menor idea de en qué iba a consistir la cátedra de Benoît, sino que la imagen que él estaba viendo correspondía a la variación de precios del algodón, tema sobre el cual estaba trabajando con un estudiante hacía unos pocos minutos.

¿Cómo podía ser que la distribución de los precios del algodón se asemejara a la distribución de riqueza de una población? Esta pregunta cautivó a Mandelbrot, y dado que Houthakker estaba luchando sin mucho éxito con dicha distribución (volatilidad variable y dificultad para ajustar los datos al modelo de Bachelier), acordaron que el hombre de IBM probaría su suerte con los datos en las tarjetas perforadas.

Fue así como tras coleccionar datos de diversas fuentes, tal como el Departamento Nacional de Investigaciones Económicas y el Departamento de Agricultura de Washington, Mandelbrot retornó a IBM y pidió que le asignaran un programador para tratar de darle sentido al mar de información. Cabe destacar que el hecho de que el mercado del algodón haya estado bajo escrutinio no se debió a una cualidad especial del mismo, sino que simplemente poseía mejor disponibilidad de información. El algodón era una de los pocos productos básicos de la economía, en esa época, que tenía datos diarios desde hace cien años, ya que todo el comercio del producto era realizado desde Nueva York. Sin Internet, Yahoo Finance y Excel, a principios de los años sesenta en las oficinas de IBM Mandelbrot se encontró frente al tesoro de cualquier economista [Mandelbrot, 2004].

Tras procesar los datos, encontró los mismos rasgos que le quitaban el sueño a Houthakker: una volatilidad variable, que no parecía asentarse en algún valor fijo, y una mayor probabilidad de ocurrencia de grandes movimientos de precios, es decir, colas más anchas de las que predecía el modelo de Bachelier. Sin embargo, sospechó que al igual que la distribución de la riqueza estudiada por Pareto, tales características sugerían la existencia de una ley de potencias. Tras trazar los gráficos correspondientes a las variaciones de precios para datos diarios, mensuales y sobre distintos períodos históricos, la característica firma de una ley de potencias apareció sobre el papel logarítmico. Las siguientes imágenes provienen de la publicación original de Octubre de 1963.

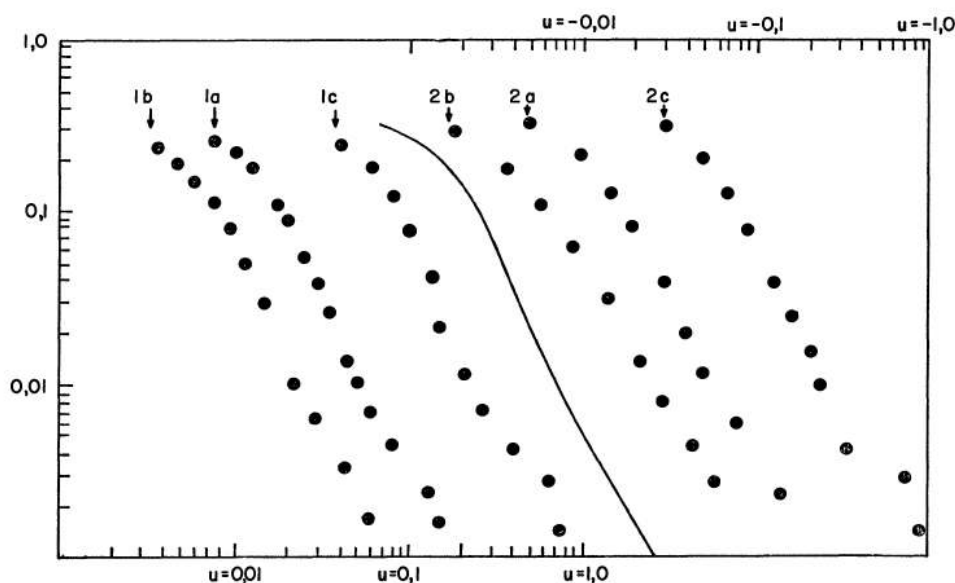


Figura 2.2. [Mandelbrot, 1997]

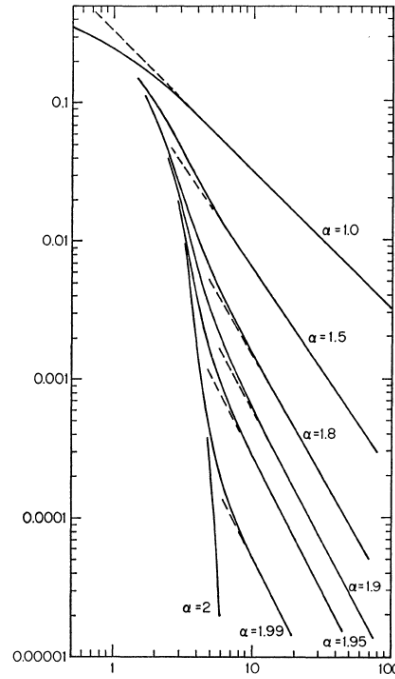


Figura 2.3. [Mandelbrot, 1997]

Como puede observarse en la *Figura 2.2* los distintos conjuntos de puntos forman rectas paralelas entre sí. Asimismo, si comparamos a primera vista la pendiente de dichas curvas con las de la *Figura 2.3*, veremos que el valor correspondiente a α es claramente distinto de 2, lo cual, según vimos referente a las familias de distribuciones de Lévy, indica que no estamos tratando con un proceso de Gauss. Precisamente Mandelbrot estimó este valor en $\alpha \approx 1.7$. Si se observa en el gráfico, la línea continua representa la función de distribución acumulada para una distribución de Lévy con dicho valor de α . Los conjuntos de puntos $1a$, $2a$, $1b$, $2b$, $1c$ y $2c$ representan distintas muestras para las variaciones positivas (1) y las negativas (2), siendo a la variación diaria en el período 1900-1945, b la variación diaria para el período 1945-1958 y c la variación mensual de 1988 a 1940. Esto significa que sin importar que período o frecuencia se elija se mantiene la misma relación, es decir, la distribución *escala*. Esto concuerda con la definición de estabilidad definida anteriormente, ya que mediante una transformación lineal todas estas líneas podrán ser ajustadas a una sola, hecho que puede verse intuitivamente en el gráfico [Mandelbrot, 1997].

Expresaremos este concepto matemáticamente [Voit, 2005]. Para hacer esto, volveremos a la ecuación de probabilidad compuesta para dos variables independientes utilizada por Bachelier (recordarán que se mencionó que la solución encontrada por el matemático francés no era la única),

$$p(x,2) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1)p_2(x-x_1)dx. \quad (2.8)$$

Dicha ecuación simplemente representa la distribución de probabilidad obtenida al combinar dos variables aleatorias e independientes ($x = x_1 + x_2$). Esto es usado por Bachelier de la misma manera (ver Anexo A). En la notación usada el 2 en $p(x,2)$ significa que x es la suma de dos variables aleatorias independientes. Afortunadamente la función característica de $p(x,2)$, $\hat{p}(t,2)$, es simplemente el producto de las funciones características de las dos variables, $\hat{p}(t, 2) = \hat{p}_1(t) \hat{p}_2(t)$ lo cual simplificará mucho el manejo a continuación.

Para el caso de N variables tendremos,

$$p(x, N) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1) p_2(x_2) \dots p_{N-1}(x_{N-1}) p_N(x - x_1 - x_2 \dots - x_{N-1}) dx, \quad (2.9)$$

y la función característica será simplemente la multiplicación de N funciones características,

$$\hat{p}(t, N) = \hat{p}_1(t) \hat{p}_2(t) \dots \hat{p}_N(t). \quad (2.10)$$

En el caso de ser N variables aleatorias idénticamente distribuidas obtendremos,

$$\hat{p}(t, N) = \left(\hat{p}(t) \right)^N. \quad (2.11)$$

Si tratamos con la función de Lévy simplificada utilizada en el punto anterior, la distribución para la suma de N distribuciones de Lévy, las cuales están idénticamente distribuidas, será análogamente,

$$\hat{L}_\alpha(t, N) = \left(\hat{L}_\alpha(t) \right)^N = \left(\exp(-c |t|^\alpha) \right)^N = \exp(-cN |t|^\alpha). \quad (2.12)$$

Ahora obtenemos la función de distribución la cual debe ser expresada mediante la transformada de Fourier,

$$L_{\alpha}(x, N) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-cN|t|^{\alpha}} \right] e^{-itx} dt, \quad (2.13)$$

y cambiamos la escala de las variables según,

$$t_e = N^{1/\alpha} t, \quad x_e = N^{-1/\alpha} x. \quad (2.14)$$

De esta forma tendremos,

$$L_{\alpha}(x, N) = N^{-1/\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c|t_e|^{\alpha}} e^{-ix_e t_e} dt = N^{-1/\alpha} L_{\alpha}(x_e). \quad (2.15)$$

Expresado informalmente, la suma de N distribuciones de Lévy, tendrá la misma “forma” que la de una ajustada a escala, o como señalamos anteriormente, la distribución *escala*. Esto es lógico, ya que la variación mensual de un mercado es la combinación de las variaciones diarias, y a su vez la variación anual está compuesta por las variaciones mensuales. En todos los casos dichos cambios tendrán la misma “forma”, es decir, la misma distribución de probabilidades.

Otra cualidad interesante que poseen las distribuciones de Lévy es que son el punto de atracción para la suma de variables con varianza infinita y con colas que sigan leyes de potencia (Gnedenko Kolmogorov), al igual que la distribución de Gauss es el punto de atracción para la suma de variables con varianza finita, mejor conocido como el teorema central del límite. De pronto, empieza a parecer lógico que la distribución de Gauss no sea la única explicación disponible a la hora de describir un mercado.

Para poder presentar este enfoque radical al mundo de la economía, Mandelbrot recurrió a un estudiante de él, el reconocido E. F. Fama. En su introducción presenta el tema de cómo desde Bachelier al presente, los trabajos que buscaban testear la hipótesis de Gauss con los mercados parecían subestimar el hecho de que (1) la varianza no tendía a un valor estable y (2) los eventos extremos ocurrían con mayor frecuencia de los que predecía el modelo, es decir, las colas de las distribuciones reales eran más gordas que las de Gauss. Incluso pasa a destacar, que debido a que la mayoría de las herramientas estadísticas usadas para analizar la variación de precios especulativos asumen una varianza finita, es probable que el valor de las mismas se ponga en duda si las hipótesis de Mandelbrot son sostenidas por los datos [Mandelbrot, 1997]. Estos comentarios eran el equivalente a poner una bomba en los cimientos del edificio de las finanzas modernas, y no fueron tomados con mucho entusiasmo.

Hacia el final de su escrito Fama hace una observación muy interesante. Debido a que las variaciones anuales, mensuales y semanales son simplemente la suma de los

cambios de transacción a transacción, entonces, la información de transacción a transacción deberá seguir una distribución de Lévy o algún tipo de *escala* (leyes de potencia) en su defecto (de acuerdo al teorema central para distribuciones de Lévy estudiado por Gnedenko y Kolmogorov). Esto sugiere que el estudio del flujo de información en el mercado debería producir este tipo de condiciones.

Para concluir, resumiremos los puntos más importantes destacados por Mandelbrot:

- La variación de precios especulativos no sigue una distribución de Gauss, sino que parece pertenecer a la familia de distribuciones estables de Lévy.
- Los eventos extremos se producen con más frecuencia que el previsto por el modelo Gausseano.
- La varianza no es finita, sino infinita. Para muestras finitas significa que variará sin asentarse en un valor fijo.
- La distribución escala, es decir, la forma de la misma permanece invariante a todos los niveles.

2.1.5 Cómo dimensionar un dique (y un mercado).

Hasta aquí se han discutido las cualidades de escala y mayor probabilidad de eventos extremos en los mercados. Sin embargo, como se mencionó en la introducción del Capítulo, la variación de los precios especulativos parecería tener *memoria*. No nos referimos a la correlación que ocurre en períodos de corta duración, sino a una memoria de largo plazo. Intuitivamente este hecho parecería ser lógico, ya que sabemos por experiencia que los hechos que ocurren en el pasado sí afectan la manera en que se desarrollan eventos del presente. El *crash* del veintinueve trajo consigo una generación de bancarios con un grado de precaución mayor del que habrían tenido naturalmente, ya que aquella traumática experiencia les dejó lecciones que no olvidarían en toda su vida. Hacia fines de este siglo esta generación se había jubilado y en muchos casos muerto, lo que significó que las lecciones de la depresión se habían ido con ellos. No resulta raro, entonces, que una de las mayores crisis financieras en ochenta años haya ocurrido una vez que todas estas personas no pudieran advertir de las lecciones aprendidas en su juventud. De la misma manera, las enseñanzas dadas por la crisis actual quedaran con nosotros por algún tiempo.

Paradójicamente, el concepto de memoria no fue introducido por un economista en Wall Street, sino hacia principios de siglo en El Cairo por un físico inglés. Su interés no se centraba en la variación de precios de algún *commodity*, sino precisamente en la variación de caudal del río Nilo con el propósito de dimensionar una serie de diques que permitirían aumentar el comercio del algodón con Gran Bretaña. Esto era posible en 1906, año en que arribó Harold Hurst a Egipto, gracias a un reciente triunfo militar en Sudan que permitiría una época de paz y prosperidad en la región.

Si bien se entendía en gran medida las variaciones estacionales en el caudal del Nilo, la variaciones anuales no parecían mostrar ningún tipo de periodicidad o patrón, lo

cual tornaba extremadamente difícil el dimensionamiento de un dique. La solución que se encontró, similarmente a la que se utiliza hoy en día las finanzas, era asumir que las variaciones de caudal año a año eran independientes entre sí y que la altura del dique sería proporcional a la raíz cuadrada del tiempo para el cual se quiere dimensionar el dique. Simple, pero incorrecto. A pesar de que la variación de caudal año a año se ajusta a la distribución normal, no es importante solamente el tamaño de dicha variación, sino su secuencia. De esta forma Hurst consiguió los datos para la variación de distintos ríos alrededor del mundo y tras comparar el rango desestacionado entre el valores extremos frente a la cantidad de años transcurridos encontró algo sorprendente: la relación no era igual a la raíz cuadrada (0,5), sino que se aproximaba a tres cuartos en todos los casos. Lo que resultaba todavía más extraño era que este fenómeno no ocurría solamente en ríos sino que se extendía a los anillos de árboles y hasta manchas solares. Su trabajo, publicado en 1951 y 1955, fue recogido con escepticismo y no generó mayor ruido en el ámbito académico a pesar de algunos entusiastas.

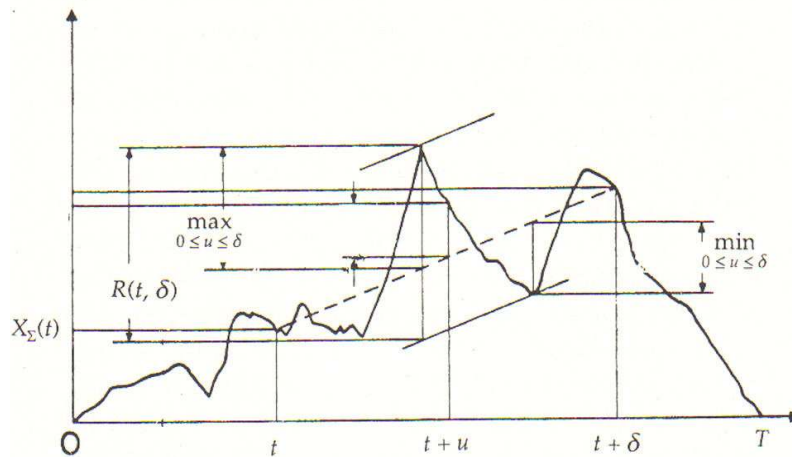


Figura 2.4: método gráfico del rango reescalado usado por Hurst. [Mandelbrot, 2004]

Este concepto podría haber quedado simplemente como una curiosidad en el ámbito de la hidrología, pero gracias a Mandelbrot quedó definitivamente implantado en el ámbito financiero y en lo que se conoce como fractales, teoría que desarrollaría años mas tarde. La idea surgió en 1963, año en que el matemático francés estaba enseñando economía en Harvard y la publicación de su estudio de los precios del algodón recién comenzaba a ser comentada en el ámbito académico. Tras una exposición que hizo referente a su estudio, uno de los oyentes se le acercó y le comentó que un hidrólogo inglés también trataba con un exponente que había encontrado para el Nilo, y que por más ridículo que sonara sería bueno que revisara el tema ya que podrían llegar a estar relacionados. En ese momento Mandelbrot supo que tenía que tratarse de lo mismo.

Si bien Mandelbrot se había percatado de que existían correlaciones en los precios del algodón, no pudo desarrollar este concepto y se enfocó principalmente en el análisis

de su variación. El estudio de Hurst revelaba que el orden de las variaciones era importante, ya que tomando los datos por sí solos, reproducían la distribución normal. Una medida de la influencia de la historia, sugirió Mandelbrot, puede ser representada a través del coeficiente H , en honor a Hurst. Un exponente de $H = 0,5$ corresponde a un proceso Browniano, es decir sin memoria, mientras que uno mayor, tal como el valor de 0,73 que encontró Hurst para el Nilo, corresponderá a un proceso con memoria en el que el movimiento en una dirección tenderá a mantenerse un poco más de que si el proceso fuera totalmente independiente. Por el contrario un valor de H menor a 0,5 significará que los eventos tendrán una mayor tendencia a contrarrestarse. El método para calcular dicho exponente es lo que se conoce como Rescaled Range Analysis (popularmente conocido como R/S Analysis), el cual fue desarrollado por Hurst (*Figura 2.4*), y será tratado con más detalle en próximos Capítulos. El análisis de datos financieros demuestra que muchos activos no siguen un proceso sin memoria, o de eventos independientes [Mandelbrot, 2004].

2.1.6 ¿Qué tienen en común una costa, un copo de nieve y una serie de precios?

Desde los tiempos de Euclides, con su obra Elementos, la geometría se concentró principalmente en el estudio de las figuras lisas, permitiendo así el desarrollo de la arquitectura, ingeniería y sentando las bases para el desarrollo del cálculo en el siglo XVII. La visión general era de un mundo ideal en donde las imperfecciones eran simples apartamientos de él. Sin embargo, como comenta Mandelbrot, el mundo que nos rodea es ajeno a esta geometría:

“Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y la corteza no es suave, ni un rayo viaja en línea recta. La naturaleza no sólo presenta un mayor grado, sino en conjunto un nivel diferente de complejidad”.

A partir de los años setenta, gracias a su desarrollo a partir de ciertas curiosidades matemáticas propuestas por Sierpinski y Koch entre otros, la humanidad tiene otra herramienta con la cual contemplar a la naturaleza y a sí misma: fractales, palabra derivada del latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado. Los fractales tienen la propiedad de ser auto-similares, lo cual significa que una estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. Esta cualidad de escala se relaciona a la ya vista con anterioridad en los temas referentes a leyes de potencia y distribuciones de Lévy. El empleo de fractales es extremadamente útil a la hora de analizar objetos ásperos, irregulares que serían imposibles analizar mediante métodos tradicionales.

Al igual que los objetos euclidianos, los fractales poseen una dimensión, aunque, como sugiere su nombre, dicho número no es entero. Uno sabe que una línea tiene dimensión de uno, un cuadrado dimensión de dos y un cubo dimensión de tres pero una dimensión de 2.4 resulta difícil de imaginar. No obstante, dicho concepto resulta

ser más intuitivo de lo que uno podría pensar. Para ejemplificarlo debemos imaginarnos cómo podríamos medir la longitud de una costa.

Asumiendo que no poseemos muchos recursos, una primera aproximación podría ser medir la distancia de península a península para cada bahía. Si bien es una medida rudimentaria obtendremos un resultado lógico. Ahora imaginemos que nos dieran los recursos para medir manualmente mediante varas de cinco metros el mismo trayecto. La nueva medición tendrá mayor exactitud y será mayor, ya que ahora se habrán tenido en cuenta todos los pequeños detalles y curvas de las playas. Si esto se pudiera hacer con reglas de escritorio, el valor será todavía mayor, y así, *ad infinitum*. Esto difiere de la medición de superficies lisas en donde una esperaría que la medición tienda a un número. Entonces ¿Cuál es la longitud? Resulta que esta respuesta tiene sentido sólo si se tiene en cuenta la escala, ya que a menor número de escala mayor la medición. Incluso dicha relación se mantiene a un ritmo constante, y esta propiedad es la que mide la dimensión fractal. Informalmente dicho, la dimensión fractal es una medida de cuán arrugada está una línea o superficie. De esta forma una costa con dimensión de 1.3 será más arrugada que una línea recta, aunque no será lo suficientemente para llenar el área de un cuadrado. Análogamente el pulmón, hecho a partir de una superficie inmensa de tejido “arrugado” tiene una dimensión muy cercana a tres. Resumiendo este concepto formalmente, se puede decir que los fractales poseen una dimensión menor al espacio topológico que llenan [Mandelbrot, 2004].

Este proceso puede ser representado mediante una fórmula. D representa la dimensión fractal, r el radio de los círculos y N el número de círculos. Siguiendo el ejemplo de la costa, si la longitud de las reglas o varas representan $2r$, el número de círculos (o mediciones con la regla) escalará según la siguiente relación:

$$N(2r)^D = 1 \quad (2.16)$$

A continuación se presentan dos de los fractales más antiguos y conocidos que existen, el triángulo de Sierpinski (1915- Figura 2.5) y el copo de nieve de Koch (1904 – Figura 2.6) tratados en su época como rarezas matemáticas. Una de las cualidades que aberraba a los matemáticos que perseguían idea de continuidad y orden era que la figura de Koch, si bien era continua, no poseía derivada en ningún punto.



Figura 2.5: triángulo de Sierpinski. “[Sierpinski triangle”, Wikipedia]

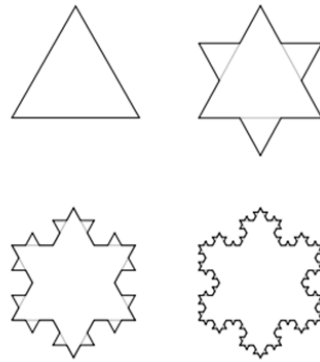


Figura 2.6: copo de nieve de Koch. [“Koch snowflake”, Wikipedia]

Se puede observar que estas dos figuras son determinísticas, ya que existe un algoritmo que definirá su forma sin incluir elementos de azar. Si uno empieza a relajar ciertas restricciones y permitir un elemento aleatorio en la reproducción de los fractales empezarán a surgir figuras que se asemejan a objetos de la vida real. La siguiente imagen (Figura 2.7) sigue el algoritmo de Koch, aunque se le agrega un elemento de azar. Es notable como a pesar de ser generada con unas pocas instrucciones, dicha imagen posee el grado de complejidad que podría tener una costa. Ejemplos de la vida real incluyen ríos, copos de nieve, costas, montañas, relámpagos, cristales, brócoli, coliflor, vasos sanguíneos, pulmones, y muchos otros fenómenos pertenecientes al mundo que nos rodea.

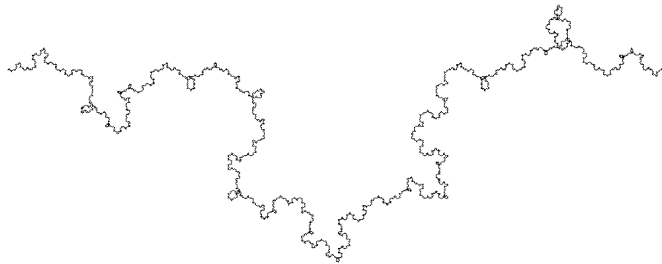


Figura 2.7. [“Random orientation Koch”, Wikipedia]

Por más que estos objetos matemáticos puedan ser muy interesantes, uno se podría estar preguntando ¿En qué se relacionan todos estos conceptos a las finanzas? Resulta que esta nueva herramienta es muy útil para describir el funcionamiento de los mercados gracias a su particularidad de describir objetos auto-similares y “ásperos”. Esto no significa que haya alguna extraña y mística teoría que vincule copos de nieve con finanzas, de la misma forma que no hay relación entre la resistencia de los materiales y las orbitas planetarias sólo por el hecho de utilizar herramientas comunes tales como el cálculo. Lo que viene proponiendo Mandelbrot desde hace aproximadamente treinta años es el hecho de que esta “caja de herramientas” se

adecua más al comportamiento de los mercados que los tradicionales métodos empleados por las finanzas modernas. En algunos sentidos es comprensible que se hayan utilizados dichas herramientas ya que los economistas no poseían una gran variedad de alternativas entre las cuales elegir en su momento, y se lanzaron a construir un edificio teórico práctico, aplicable y de gran utilidad. El problema estaba en que esta practicidad requería de ciertas suposiciones cuestionables, no obstante, hacia principios de los años setenta el mundo estaba ávido por nuevos productos financieros y estas teorías satisfacían esta necesidad.

2.1.7 Caricaturas de mercado

A continuación presentaremos algunas de las construcciones que Mandelbrot realizó, a las cuales humildemente apodó caricaturas. Esto se debe al hecho que resaltan los principales rasgos y características de un mercado mediante unos simples trazos. Análogamente a los fractales presentados con anterioridad, éstos se construyen a partir de elementos básicos, aunque el producto será complejo y terminará imitando varias de las propiedades que presentan los mercados.

Se debe aclarar que en los casos en que se analizan gráficos a diferencia de objetos geométricos se debe hablar de auto-afinidad (*self-affinity*) en vez de auto-similaridad (*self-similar*). Esto se debe a que no tiene sentido hablar de una distancia propiamente dicha, ya que las abscisas y ordenadas tendrán diferentes unidades tales como precio y tiempo. En la *Figura 2.8* se muestra como se genera una figura a partir de un generador. Cada paso requiere que se reemplacen los segmentos rectos por el mismo generador ajustado a escala.

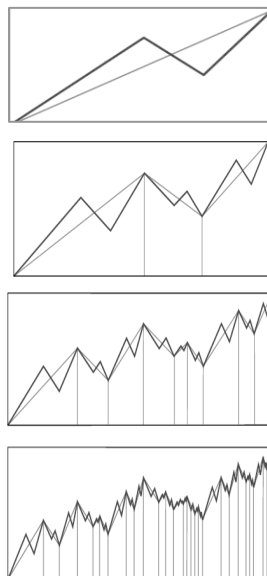


Figura 2.8. [Scientific American, Septiembre de 2008]

Lo interesante de este enfoque es que distintos generadores representarán distintos procesos, es decir, a medida que variamos sus dimensiones variaremos tanto la

dimensión fractal del gráfico como el exponente de Hurst. Estos dos conceptos se relacionan, aunque debe realizarse la siguiente aclaración: mientras que un objeto auto-similar posee una única dimensión, un objeto con auto-afinidad tendrá varias, dependiendo que aspecto está siendo considerado. Mandelbrot distingue entre la dimensión del gráfico D_G y la dimensión del trayecto D_T . Para entender este concepto el autor presenta el caso de un movimiento Browniano (recordar que para estos casos $H=0.5$) en dos dimensiones, $X(t)$ y $Y(t)$. $D_T = 2 = 1/H$ representará la dimensión fractal del paso del trayecto tridimensional dentro del gráfico t , $X(t)$ y $Y(t)$. Por el contrario $D_G = 1.5 = 2 - H$ se aplica a la proyección del trayecto bidimensional dentro del gráfico t y $X(t)$ ó t y $Y(t)$ [Mandelbrot, 1997].

Dado que $\alpha = 1/H$ algunos autores tales como Edgar E. Peters prefieren llamar a D_T directamente α , coeficiente que como se ha visto previamente está relacionado a las distribución de probabilidades de Lévy. Personalmente, de acuerdo a nuestro alcance, esta segunda alternativa resulta más intuitiva ya que nos provee de dos parámetros, uno relacionado a la memoria y otro a la brusquedad de las variaciones. Mandelbrot denomina al primero como el *efecto de José*, referente a la tendencia de distribuciones fractales a tener ciclos y tendencias. En la Biblia, José interpreta los sueños del faraón y predice que habrán siete años de vacas gordas seguidos por siete años de vacas flacas. Al segundo efecto lo denomina *efecto de Noé*, aludiendo a las grandes variaciones que uno debe esperar en este tipo de series de tiempo con varianza infinita. La ventaja de este enfoque es que mediante estos dos parámetros, los cuales resultan ser más estables que medidas como la varianza, se puede describir un mercado. El uso de dicho parámetro para medir la volatilidad, se ve puesto en duda cuando la serie de tiempo muestra correlación, es decir, que es influido por su historia.

En la segunda parte de esta Tesis se presentarán aplicaciones sobre datos reales y modelos de agentes que permitirán tener una idea aproximada del alcance de estos nuevos métodos. Mediante estos ejemplos, conceptos tales como escala y memoria pasarán a tomar un aspecto más “amigable”. A pesar del avance hecho por Mandelbrot y otros investigadores que lo siguieron, esta rama de las finanzas y la economía permanece un tanto verde, ya que se deben madurar y desarrollar varios conceptos dentro de un marco teórico consolidado. No obstante el estudio de sistemas complejos, gracias al avance en términos de computación, permanece una de las áreas más activas en la actualidad y es probable que dé mucho de que hablar en los próximos años. Este segmento trató de presentar esta nueva visión de los mercados, ya que es tiempo de que se acepten las limitaciones de los modelos clásicos y se expanda el horizonte. Como hemos visto este enfoque no rechaza de lleno a estos modelos, sino que los incluye como parte de un marco teórico más amplio y permite explicar por qué conceptos tales como varianza finita y eventos independientes no representan adecuadamente a la realidad. Es un camino que no pretende tener todas las respuestas, aunque sí, permite realizar muchas preguntas proponiendo un camino distinto.

CAPITULO 3

PENSAMIENTO CRÍTICO

“El tiempo se bifurca perpetuamente hacia innumerables futuros”

– Jorge Luis Borges, El jardín de los senderos que se bifurcan.

Si bien el último Capítulo trató con varias herramientas novedosas en el campo de las finanzas, no se pretendía proporcionar una explicación a ellas, sino que meramente se buscaba describir el comportamiento de un mercado. Aquí se intentará ubicar dichos aspectos dentro de un marco teórico más amplio.

A través de la historia, el hombre ha vivido en constante cambio. Desde revoluciones y guerras a modas pasajeras, lo único que parece permanecer constante es precisamente el hecho de que nada se mantiene igual. Incluso, estos cambios no se producen gradualmente sino que parecieran ocurrir de un momento a otro, sin que nadie los haya prevenido. Si bien entendemos esta idea conceptualmente, y no faltan explicaciones sociológicas *ad hoc*, no existe una conciencia generalizada de cómo este fenómeno social se inserta dentro de las ciencias naturales.

El objetivo de esta sección será presentar cómo muchas de las ideas referentes a cambios de fase, puntos críticos y criticalidad autoorganizada se extienden a fenómenos sociales, y consecuentemente a los mercados. Dicha teoría se inserta dentro de lo que se conoce como el estudio de sistemas complejos, área que ha adquirido momento (o masa crítica) con la difusión de la PC en los últimos veinte años. Comprendiendo sucesos aparentemente dispares tales como avalanchas, terremotos, magnetismo y evolución entre otros, dicha teoría proporciona un grado de universalidad sorprendente.

3.1 Una comunidad de partículas.

Las primeras personas en estudiar cuantitativamente cómo efectos locales, *micro*, se extienden al comportamiento global, *macro*, no fueron precisamente economistas sino químicos y físicos [Ball, 2004]. El marco teórico sobre el cual surgieron estas ideas es el conocido popularmente como la teoría cinética de los gases.

Dicha teoría tiene sus orígenes en el siglo XVII, con los estudios de Robert Boyle (1627-1691). A partir del trabajo de otros científicos de su tiempo demostró que el aire es elástico, es decir, resiste compresión y se expande para llenar el espacio disponible. A él se debe la ley que lleva su nombre, en donde la presión ejercida por un gas es inversamente proporcional al volumen de su recipiente.

A partir de la Ley de Boyle, el matemático suizo Daniel Bernoulli (1700-1782) construyó una teoría cinética, publicada en *Hydrodynamica*, que interpretaba los resultados encontrados por el físico irlandés. En ella exponía cómo dicha Ley podía

ser explicada por la fuerza ejercida sobre un pistón de n partículas moviéndose a una velocidad v , ya que a menor volumen habría una mayor frecuencia de impactos. Asimismo demostró como la presión sería proporcional a la energía cinética de las partículas.

En 1857 Rudolf Clausius (1822-1888) generó un modelo que incluía la traslación, rotación y vibración en las partículas. Cabe destacar que este matemático y físico alemán fue la primera persona en proponer el concepto de entropía, también conocido como la segunda ley de la termodinámica. En 1859, tras leer su *paper*, James Clerk Maxwell (1831-1879) formuló la primera distribución estadística en la física, al explicar qué cantidad de partículas se ubicaban en cierto rango de velocidades. Generalizando el logro del físico escocés, en 1871 Ludwig Boltzmann (1844-1906) formula lo que hoy se conoce como la distribución Maxwell-Boltzmann.

El problema con la teoría cinética de los gases radicaba en que si bien describía cuantitativamente su comportamiento, parecía quedarse sin palabras a la hora de explicar uno de los procesos más comunes de la naturaleza: la transición del líquido al gas y viceversa. La persona en resolver este problema fue el físico holandés Johannes Diderik van der Waals (1837-1923). Quedando maravillado al leer la obra de Clausius, Johannes razonó que no debería haber mayor diferencia entre el estado gaseoso y el líquido, ya que salvando aspectos cuantitativos, las fuerzas presentes deberían ser esencialmente las mismas a lo largo del proceso.

Para el momento que van der Waals estudiaba este fenómeno ya se tenía conocimiento del hecho de que algunos líquidos tales como el agua, el alcohol y el éter calentados en un tubo cerrado realizan una suave transición entre el estado líquido y el gaseoso. Esto ocurre por encima de cierta temperatura, la cual depende de la sustancia empleada. Debajo de esta temperatura no hay continuidad y se produce un cambio abrupto. Este punto de transición es lo que se conoce como *punto crítico* (Figura 3.1).

Van der Waals unió este concepto con la teoría cinética de los gases en su tesis doctoral de 1873. Su objetivo original era estudiar la teoría de la capilaridad, fenómeno en que los líquidos se ven atraídos a superficies sólidas, sin embargo su curiosidad lo fue llevando por terrenos fértiles que le permitieron desarrollar nuevas teorías.

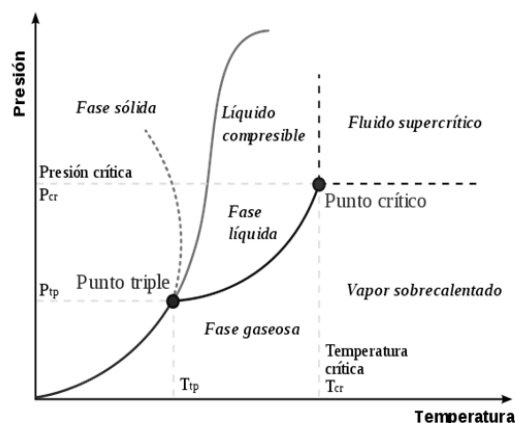


Figura 3.1. ["Punto crítico", Wikipedia]

Tal como se comentó anteriormente, la teoría cinética de los gases permite explicar como la presión del gas surge del movimiento de sus partículas. Van der Waals sabía que el líquido ejerce cierta presión sobre su área de contacto y que su magnitud tendría que ser considerable, ya que los líquidos al ser más densos que los gases, generan un mayor número de impactos de partículas por superficie. No obstante nadie sabía como calcular esta presión a partir de las propiedades físicas de una sustancia. Esto fue lo que se propuso hacer el físico holandés y utilizó la teoría cinética de los gases como punto de partida.

Los líquidos, al igual que los gases, están compuestos por partículas en un movimiento constante e impredecible, aunque, a diferencia de ellos, tienen cierto grado de cohesión. Esta cohesión es causada por la atracción de sus partículas entre sí (tensión superficial) y con otros materiales (capilaridad). El problema con la teoría cinética de los gases es que no tomaba en cuenta dicha atracción. Incluso, debido a que las partículas de un líquido se encuentran más comprimidas, estas poseen una menor libertad de movimiento y su propio tamaño deja de poder ser considerado infinitesimal.

Esto no significa que los gases sean esencialmente distintos a los líquidos, sino que debido a su baja densidad y alta velocidad estos dos factores juegan un rol despreciable. Al considerar estos dos aspectos y realizar ciertas suposiciones acerca de su comportamiento, van der Waals demostró que dentro de ciertos rangos de temperaturas y presiones, la sustancia puede existir únicamente en dos estados estables: uno de menor densidad, correspondiente al gas, y otro de mayor densidad, correspondiente al líquido. Incluso, Johannes se percató de que en cierto punto, mientras el gas está siendo enfriado o comprimido, el estado menos denso pasa a ser inestable, es decir, Van der Waals había podido describir matemáticamente un cambio de fase [van der Waals, 1910]. Maxwell fue quien finalmente pudo predecir precisamente a qué temperatura y presión una sustancia tendría esta transición.

Debemos recordar que en los casos comentados, en los que sí es posible realizar una transición suave (agua, alcohol, éter), se deben al hecho de que se encuentran por encima del punto crítico. La teoría de van der Waals también explicaba este hecho: a medida que aumenta la temperatura, la diferencia en densidades entre el líquido y el gas disminuye hasta un punto en donde son iguales, el punto crítico.

Dejando de lado los detalles químicos, el concepto que debe permanecer es la rapidez de la transición. En un punto dado hay una composición, y en otro hay uno completamente distinto. El líquido se produce mediante el compromiso de una fuerza de atracción y una de repulsión. El estado gaseoso se produce cuando hay la suficiente fuerza de desorden (temperatura) para que el estado gaseoso sea el más estable. Cada partícula continúa comportándose exactamente de la misma manera, pero el comportamiento global pasa a ser abruptamente distinto. Resumiendo: *cuando se trata de comportamientos colectivos no todo es posible.*

3.2 De fluidos a imanes: algo más que una coincidencia.

Hasta aquí lo comentado puede parecer interesante, no obstante su relación a otras áreas, especialmente las referentes a fenómenos sociales, no pasa de ser meramente una analogía atractiva. Para evitar esto se debe recalcar que los cambios de fase no se producen únicamente para el cambio de estado gaseoso a líquido, sino que

aparecen en imanes, superconductores y muchos otros fenómenos, con ciertos rasgos comunes a todos los procesos. Se presentarán algunos ejemplos para demostrar como todos estos procesos poseen una universalidad indistinta de las características específicas presentes en cada uno.

Desde hace siglos se sabe que un imán pierde su magnetismo cuando es calentado. Para el hierro esto ocurre por encima de los 770°C , razón por la cual, el mismo año que van der Waals presentó su tesis doctoral, William Barret propuso que este cambio no es gradual sino que representa un cambio de fase. En 1889, John Hopkinson llegó a la conclusión que la pérdida del magnetismo, en términos cuantitativos, comparte los mismos rasgos con el que un fluido pierde sus característicos estados líquido y gaseoso al pasar el punto crítico.

A partir del trabajo acerca de la transición magnética creado por Pierre Weiss en 1907, en 1920 el físico alemán Wilhem Lenz creó un modelo que explicaba este proceso. En él los átomos del material ferromagnético poseen cada uno cierto spin, el cual puede tomar $+1$ ó -1 como valor. Dado que el spin de un átomo puede influenciar a otro, la configuración más estable será aquella en la que todos los spin son $+1$ o todos son -1 , haciendo que el material posea un campo magnético apreciable a un nivel macro.

Al igual que la atracción intermolecular para el caso de un fluido, la temperatura afecta la interacción entre los átomos del material ferromagnético. A medida que esta aumenta, los átomos tendrán mayor movimiento, y consecuentemente, la influencia del spin entre ellos tomará menos fuerza. A partir de cierta temperatura, llamado punto de Curie (punto crítico), los spins de los átomos dejan de tener una orientación predominante y consecuentemente el material ferromagnético pierde su magnetismo. A diferencia de la transición líquido-gas, el material ferromagnético pierde su campo magnético gradualmente hasta llegar al punto crítico. Esto es lo que se denomina un cambio de fase de segundo orden, ya que dicho cambio de fase ocurre al mismo tiempo que el sistema pasa por el punto crítico. Los cambios de fase de primer orden son aquellos en el que alguna propiedad tiene un cambio abrupto sin que el sistema pase por un punto crítico. Este el caso de una transición líquido-gas.

En 1925 un estudiante de Lenz, Ernst Ising, representó el modelo de Lenz de la manera más simple posible: una hilera de átomos con únicamente dos direcciones de spin. Lamentablemente, era una representación demasiado simple de la realidad y generaba un punto crítico únicamente cuando el sistema llegaba al cero absoluto. Para obtener un modelo en dos dimensiones, se debieron esperar aproximadamente veinte años para que en 1942 el físico noruego Lars Onsager creara las matemáticas adecuadas para su desarrollo. A diferencia del modelo en una dimensión, éste experimentaba un cambio de fase por encima del cero absoluto. Para el modelo tridimensional no se ha encontrado una solución analítica, pero hoy en día gracias a las computadoras puede ser simulado sin complicación alguna y posee también un cambio de fase. La *Figura 3.2* representa la evolución de una simulación del modelo de Ising en dos dimensiones, en donde los puntos blancos representan un spin y los negros otro.

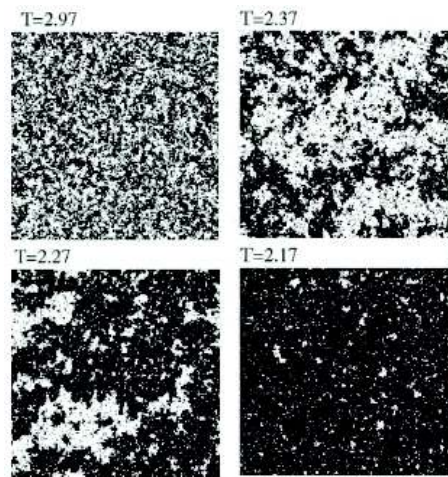


Figura 3.2. [Madame Curie Bioscience Database]

Los cambios de fase se pueden encontrar en diversos fenómenos además de la demagnetización de un material ferromagnético. Si uno enfría distintos materiales y sustancias a temperaturas cercanas al cero absoluto, empiezan a ocurrir extraños fenómenos. El plomo a los 7,2°K pasa a ser un superconductor, es decir, su resistencia cae a cero. Por otra parte el helio al acercarse a los 2°K se convierte en un superfluido, ya que pierde toda viscosidad. Estos dos fenómenos son similares a los de un material ferromagnético perdiendo su campo magnético, aunque se diferencian de este último debido a que son producidos por la interacción de fenómenos cuánticos que pueden manifestarse únicamente a muy bajas temperaturas. Las reglas locales pasan a estar determinadas por la física cuántica en vez de la familiares leyes Newtonianas, no obstante, el cambio de fase sigue produciéndose y presentando las mismas características.

Lo sorprendente de los casos comentados tal como la transición líquido-gas, la demagnetización de un metal, o un incluso el modelo de Ising en tres dimensiones, es que en términos relativos todos se comportan igual. Por ejemplo, al 99% del punto crítico la diferencia de densidades entre un líquido y un gas puede ser de un factor de 2. Al 99,5 % esta bajará a 1,5%, y así hasta alcanzar el punto crítico. La tasa a la que se produce este cambio es la misma para la magnetización de un material ferromagnético al aproximarse al punto de Curie. Lo mismo ocurre en el modelo de Ising, a pesar de ser una cruda representación de la realidad. La única condición que debe cumplirse para que se produzca esta universalidad es que la interacción dimensional de las partículas sea la mismas¹. Esto explica el hecho de que el modelo de Ising en dos dimensiones sea distinto a estos tres casos, es decir, *los detalles de la interacción no son importantes, únicamente las características globales determinan el proceso* [Ball, 2004]. Se puede decir que las diferencias en el comportamiento individual de las partículas se ven neutralizadas por la interacción del sistema como un conjunto.

El hecho de que distintos materiales, sustancias y procesos se comporten prácticamente igual en términos relativos debería sorprendernos. El hecho de que una simulación, la cual es una cruda representación de la realidad, haga lo mismo

¹ La simetría de las interacciones es representada por medio del Hamiltoniano (H), o energía generalizada del sistema [Jensen, 1998].

demuestra el grado de generalidad de dicha teoría. A partir de estos comentarios uno se podría ver tentado de relacionar cualquier tipo de cambio repentino, tal como el encendido de una lamparita a un cambio de fase; no obstante hay que tener cuidado, y tener bien en claro su definición. Un cambio de fase es un repentino cambio global en el comportamiento de un sistema a partir de las interacciones locales de sus partículas. La transición de fase ocurre cuando una influencia global que actúa sobre el sistema alcanza cierto valor umbral. En este punto, el sistema actúa de tal forma en la que una partícula puede afectar a todo el sistema ya que los efectos locales se propagan a través de éste [Jensen, 1998].

3.3 Leyes de potencia y escala (una vez más).

A medida que uno se aproxima a un punto crítico hay ciertas magnitudes que se vuelven extremadamente sensibles a pequeñas variaciones. La compresibilidad de un fluido en su punto crítico se torna absurdamente grande, infinitamente grande para ser precisos. En términos prácticos significa que el fluido podrá ser comprimido sin esfuerzo a un punto, no obstante no observamos esto experimentalmente, ya que el punto crítico es un estado altamente inestable.

Algo similar ocurre con la capacidad calorífica, la cual tiende a infinito al acercarse al punto crítico, haciendo que el fluido se comporte como un sumidero infinito de calor. Este tipo de comportamiento es lo que se llaman *divergencias*, es decir, cierta propiedad que tiende a infinito o cero al acercarse al punto crítico. Al calcular cómo una cantidad tal como la capacidad calorífica aumenta a medida que la temperatura se aproxima a su punto crítico, se calcula el *exponente crítico*. Lo sorprendente es que este exponente es el mismo para todos los fluidos. El exponente para la compresibilidad será distinto del utilizado para medir la capacidad calorífica, sin embargo ambos serán los mismos para todos los fluidos.

Retomando un tema que a esta altura debería resultar familiar, dichos exponentes tienen la peculiaridad de seguir leyes de potencia. Estas distintas cantidades (k) varían según la siguiente expresión al aproximarse a la temperatura crítica:

$$k \propto |T - T_C|^{-\alpha} \quad (3.1)$$

Si bien la teoría de van der Waals incluía estas divergencias y susceptibilidad a la variación, no podía predecir sus valores exactos. La razón de dicha discrepancia radica en la heterogeneidad microscópica de la sustancia al cruzar el punto crítico. Al atravesar dicho punto cada partícula se encuentra frente a una *bifurcación*: puede estar en un estado u otro. Esto se diferencia de las transiciones de primer orden en donde cada partícula tiene una única opción. Por ejemplo, el gas al enfriarse posee la única opción de convertirse en líquido.

Siguiendo el ejemplo de un fluido cruzando el punto crítico, debido a pequeñas fluctuaciones habrá zonas de mayor y menor densidad, es decir, hay cierto “ruido” que hace que el fluido no sea homogéneo. Cada una de estas minúsculas zonas al cruzar el punto crítico tenderá a convertirse en gas o líquido dependiendo de su densidad. El destino final quedará determinado por el balance final del conjunto: gracias a una pequeña ventaja infinitesimal inicial de un estado, la balanza se verá volcada

completamente hacia él. Es en este punto en el que el estado de una sola partícula podrá determinar el curso final, lo cual significa que el punto crítico es altamente inestable. A modo de analogía podemos compararlo al caso en el que una bola se mantiene en el borde de una ladera: podrá volcarse hacia un lado u otro ya que su dirección estará determinada por minúsculos movimientos y vibraciones. Este mismo efecto ocurre para el punto de Curie y muchos otros fenómenos (*Figura 3.2*).

Otra cualidad interesante que presentan los puntos críticos es que, al igual que los modelos y fractales de Mandelbrot, son libres de escala. En dicho punto las zonas de uno u otro estado podrán ser de cualquier tamaño. En el caso de los fluidos este hecho es lo que causa que no sean traslúcidos en este punto ya que hay zonas de líquido y gas de distintos tamaños. Algunas regiones serán del tamaño de la longitud de onda de la luz visible, lo cual crea este efecto.

El modelo del físico holandés no consideraba esta heterogeneidad al cruzar el punto crítico, sino que en vez de considerar todo como un conjunto de manchas blancas y negras suponía un estado gris homogéneo. Esta simplificación es lo que se conoce en la física como la teoría del campo promedio (*mean-field theory*). Lars Onsager (modelo de Ising en 2D) había evitado este enfoque y gracias a un método matemático desarrollado por el mismo, calculó los exponentes críticos exactos. Lamentablemente esto no puede realizarse para modelos más complicados, aunque existe una simplificación llamada *renormalización*. Gracias al desarrollo de dicho método, en 1982 le otorgaron el Premio Nobel de Física a Kenneth Wilson.

3.4 Más estable de lo que uno creería.

Hasta aquí se analizó cualitativamente, aunque con un considerable grado de profundidad, qué ocurre cuando un sistema atraviesa un punto crítico. Este concepto nos permitirá presentar ciertos procesos descubiertos recientemente que se denominan críticos autoorganizados (SOC: self-organized criticality). Abarcan desde terremotos, avalanchas, incendios forestales, evolución, a como un lector ansioso podría esperar a este punto, mercados.

El estudio de lo que se denomina criticalidad autoorganizada comienza a partir de un *paper* publicado en 1987 por Bak, Tang y Wiesenfeld (BTW), el cual revolucionó el campo teórico de lo que se conoce como la mecánica estadística. Su hipótesis consistía en que sistemas en el que interaccionan varios elementos exhiben ciertas características generales. Lo atractivo de esta idea es el hecho de que bajo condiciones bastantes generales, los sistemas dinámicos se organizan bajo una estructura compleja, aunque general. Si bien la respuesta dinámica exhibe un alto grado de complejidad, las propiedades estadísticas son descritas por simples leyes de potencia. Incluso, algunos exponentes pueden ser idénticos para sistemas que parecerían ser distintos bajo una mirada microscópica.

Bak, Tang y Wiesenfeld mantenían que este comportamiento surge sin necesidad de calibrar el sistema, y que los estados bajo los cuales se organiza poseen las mismas características que sistemas cruzando un punto crítico. Es preciso recordar que si bien el comportamiento descrito por Bak, Tang y Wiesenfeld es esencialmente el mismo que el que se describió con anterioridad, hecho del cual proviene el término *crítico*, la diferencia básica radica en que este no presenta un comportamiento altamente inestable. De este segundo hecho proviene el término *autoorganizado*. La razón por la cual su trabajo desarrolló un rápido interés en el estudio de la criticalidad

autoorganizada se debe al hecho de que une dos conceptos, comportamiento crítico y autoorganización, en uno todavía más intrigante: sistemas complejos.

A pesar de este temprano entusiasmo por los descubrimientos de Bak, Tang y Wiesenfeld, hoy día no existe una clara definición de qué representa un proceso con criticalidad autoorganizada, ni las condiciones necesarias bajo las cuales ocurre. Asimismo sigue habiendo una falta de formalismo matemático que pueda darle un marco teórico generalizado a los distintos procesos en los cuales se observa este fenómeno.

A pesar de estas dificultades para desarrollar dicho estudio, hay ciertos rasgos que son comunes a todos los procesos. Una de las características principales parece ser una separación de tiempos de escala. El proceso de excitación o influencia externa necesita ser mucho más lento que el proceso interno de relajación. Un ejemplo prototípico de este hecho es un terremoto. La tensión producida por las placas tectónicas a través de los años pasa a ser liberada en unos pocos minutos durante el sismo [Jensen, 1998]. La analogía con los mercados es evidente: cierta información o tendencia crece con los años, para ser plasmada en unos pocos instantes de *trading*. Esto es lo que denominamos burbuja, y claramente contradice la hipótesis de un mercado eficiente, en donde el precio actual representa toda la información disponible.

Esta separación de escalas esta íntimamente relacionada con los conceptos de *metaestabilidad* y valor *umbral*. Un estado metaestable es uno que, si bien como sugiere su nombre, es estable, no representa el de menor energía. Esto es posible debido al hecho de que el sistema debe atravesar cierto valor umbral para dejar esta estado de metaestabilidad. Un ejemplo de este concepto es una persona tratando de empujar un piano, ya que deberá realizar determinada fuerza para poder vencer la fuerza de fricción del piso y moverlo.

De todos los estados metaestables existe un conjunto de ellos que son de esencial importancia: los marginalmente estables. Estos estados representan una configuración en la que la mínima fuerza aplicada podrá desencadenar cualquier magnitud de respuesta. Bak, Tang y Wiesenfeld propusieron que estos estados marginalmente estables son caracterizados por una falta de escala espacial tanto como temporal. Las distribuciones de frecuencia están caracterizadas por leyes de potencia, siendo la escala de Richter un clásico ejemplo, mientras que las series temporales exhiben un comportamiento conocido como “fluctuaciones $1/f$ ”. Precisamente, estos fenómenos ocurren en sistemas termodinámicos atravesando el punto crítico.

3.4.1 Criticalidad Autorganizada (1987)

Analizaremos con detalle el modelo propuesto por Bak, Tang y Wiesenfeld, en el que presentan una simulación numérica de una avalancha en una dimensión [Bak *et al*, 1987]. Esto permitirá entender con mayor profundidad las implicancias de las conclusiones alcanzadas para el modelo en dos dimensiones, el cual presenta todas las características inherentes a procesos con criticalidad autoorganizada.

Por medio de estos modelos extremadamente simples el trío científico buscaban demostrar cómo sistemas dinámicos con muchos grados de libertad evolucionan naturalmente hacia un sistema de criticalidad autoorganizada. Como ya se ha mencionado con anterioridad, el término autoorganizado significa que el sistema arriba

a este estado indiferentemente del inicial, es decir, dicho estado es un atractor. Este enfoque, como comentan en el paper los autores, es similar a la del modelo de Ising:

“La filosofía es análoga a la de la física estadística del equilibrio, en que los resultados se basan en modelos de Ising que sólo poseen la simetría en común. Nuestros ‘Modelos de Ising’ son autómatas celulares discretos, que son mucho más sencillos de estudiar que ecuaciones de derivadas parciales continuas.”

El ejemplo que presentan puede ser descripto como una pila de arena. Suponiendo que se inicia desde cero agregando aleatoriamente un grano de arena a la vez, iremos formando esta pila. La pila crecerá, y su pendiente también. Eventualmente, en cierto punto, la pendiente alcanzará cierto valor umbral. Si se la agrega un grano más, se deslizará. Si se hubiese comenzado a partir de una gran pila, se habrían producidos deslizamientos hasta alcanzar la misma pendiente crítica. Esto es a lo que se refieren cuando hablan de un sistema autoorganizado. A continuación se presenta la Figura 3.3, la cual fue usada por Bak, Tang y Wiesenfeld en su escrito.

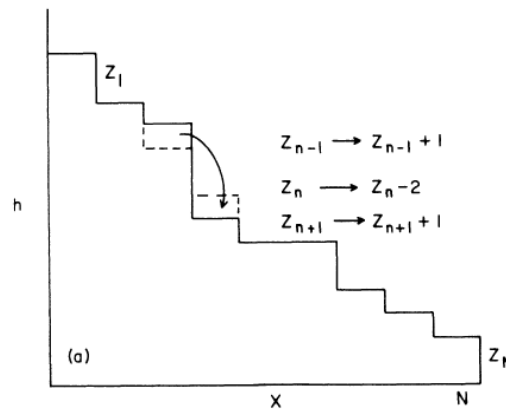


Figura 3.3. [Bak et al, 1987].

El sistema es extremadamente simple. Siendo h_i el número entero denotando la cantidad de granos de arena en la posición i y $z_i = h_i - h_{i+1}$, la pendiente de la posición, definiremos la dinámica según dos acciones: agregar un grano a la pila y relajar la pendiente de la pila cuando la pendiente local excede el valor umbral z_c .

Si se agrega un grano de arena a la posición i tendremos,

$$\begin{aligned} z_i &\rightarrow z_i + 1 \\ z_{i-1} &\rightarrow z_{i-1} - 1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Si en algún punto $z_i > z_c$ se producirá un deslizamiento local, es decir,

$$\begin{aligned}
 z_{i-1} &\rightarrow z_{i-1} + 1 \\
 z_i &\rightarrow z_i - 2 \\
 z_{i+1} &\rightarrow z_{i+1} + 1.
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

En el caso de elegir un sistema abierto, en donde el borde de la pila esta delimitado, cuando se supere la pendiente umbral en el extremo se producirá lo siguiente,

$$\begin{aligned}
 z_{N-1} &\rightarrow z_{N-1} + 1 \\
 z_N &\rightarrow z_N - 1.
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Es fácil de predecir el comportamiento de este modelo unidimensional. A medida que caen granos aleatoriamente, se alcanzará un estado en donde todas las posiciones tengan la pendiente umbral ($z_i = z_c \forall i$). Este estado es el *atractor* del sistema, y puede considerarse *crítico* en el sentido en que un evento puede desencadenar una reacción de cualquier tamaño. En este caso unidimensional resulta trivial ver el hecho de que si los granos caen con igual probabilidad sobre todas las posiciones, s representa el número de lugares involucrados en el deslizamiento y t el número de pasos hasta llegar a una configuración estable, la distribución de probabilidades será uniforme:

$$P(s) = P(t) = \frac{1}{N+1} \quad \text{si } i \in \{1, 2, \dots, N+1\}
 \tag{3.5}$$

Esto se debe simplemente al hecho de que cuando el sistema se encuentra en su estado crítico y se coloca un grano extra en alguna posición, éste simplemente “pasará” de una posición a otra, hasta “caerse” en el borde. La magnitud de la “avalancha” dependerá únicamente del lugar en dónde caiga inicialmente el grano de arena. Dado que hay igual probabilidad de ocurrencia de agregar un grano a todas las posiciones, la distribución de la magnitud de los eventos será uniforme.

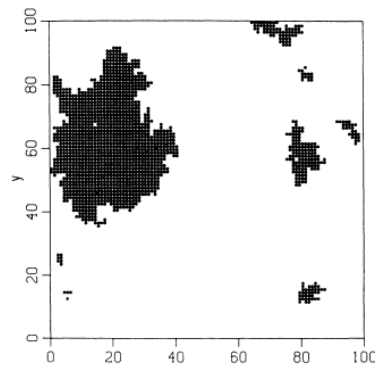


Figura 3.4. [Bak et al, 1987].

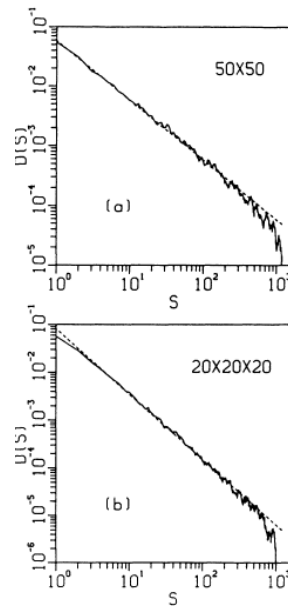


Figura 3.5. [Bak et al, 1987].

Este ejemplo es fácil de entender debido a que existe un único estado crítico. Esto es equivalente al modelo unidimensional de Ising, en donde se arribaba a resultados triviales. No obstante, al igual que el modelo de Ising en dos dimensiones, el mismo ejemplo llevado a dos dimensiones produce resultados no triviales que caracterizan el comportamiento de sistemas con mayor grado de complejidad. No se describirá en detalle este modelo, pero bastará mencionar el hecho de que varios parámetros del sistema poseen distribuciones de probabilidades que siguen leyes de potencia, es decir, cada vez que se agregue un grano de arena al sistema no habrá manera de saber que magnitud tendrá la avalancha. En la *Figura 3.4* se muestra una imagen de la simulación, en donde los puntos negros representan deslizamientos producidos por un solo grano. La *Figura 3.5* representa la distribución de la magnitud de los deslizamientos para los modelos de dos y tres dimensiones.

A partir de la publicación del *paper*, aparecieron varias publicaciones tratando de explicar diferentes fenómenos sociales, económicos y financieros por medio la criticalidad autoorganizada. La metodología incluye por lo general un modelo de agentes heterogéneos siguiendo determinadas reglas, al cual posteriormente se le realiza un análisis de los datos producidos. Dicho análisis busca encontrar leyes de potencia, distribuciones de Levy, exponentes de Hurst distintos de 0,5 y otros rasgos que caracterizan un comportamiento crítico. A diferencia de muchos otros modelos económicos y financieros estos nuevos enfoques permitirían proporcionar una explicación endógena al comportamiento de los mercados y muchos otros sistemas complejos. Teniendo en cuenta que la primera publicación referente a la criticalidad autoorganizada data de fines de los años ochenta, este tipo de ensayos empezó a cobrar fuerza solamente a partir de los años noventa y en esta década. Si bien se ha avanzado mucho sigue faltando una teoría que permita unir muchas de estas ideas en una sola obra amplia y práctica que permita la difusión definitiva al ámbito académico y empresarial.

La variación de precios especulativos.

CAPITULO 4

AGENTES: LOS NUEVOS CONEJILLOS DE LAS INDIAS

"La ciencia y la tecnología cambiarán su pasado énfasis en el movimiento, la fuerza y la energía a la comunicación, la organización, la programación y el control."

-John von Neumann.

"Una vez, hace mucho tiempo, el economista Kenneth Boulding me preguntó, '¿Qué te gustaría hacer en la economía?'. Siendo joven y temerario, dije con muy poca modestia, 'Quiero traer la economía al siglo veinte.'. Me miró y me dijo, '¿No crees que primero deberías traerla al siglo dieciocho?'"

-W. Brian Arthur.

Históricamente el estudio de las ciencias sociales presentó una fuerte desventaja con respecto al de los fenómenos físicos. *The Wealth of Nations*, de Adam Smith, fue impresa prácticamente noventa años tras la publicación en 1687 de *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, y mientras la primera exponía un estilo filosófico y cualitativo, la última poseía el empleo del método científico que caracterizaría a la era moderna. Como se discutió anteriormente en el Capítulo 2, recién a partir de los estudios cuantitativos de Vilfredo Pareto las ciencias sociales comenzaron a asemejarse a la metodología empleada por las físicas, no obstante seguían estando tan rezagadas como en el siglo XVIII.



Figura 4.1. [The Economist, Julio de 2009]

Previo a los estudios del economista italiano, Adolph Quetelet (1796-1874) llevó la estadística empleada en la astronomía a fenómenos sociales y expandió lo que Auguste Comte (1798-1857) denominó la física social (*physique sociale*). Otros “físicos sociales” o economistas de la época incluyen a David Ricardo, Thomas Malthus, Fleemin Jenkin y Alfred Marshall. Hoy día se ha avanzado en muchas áreas, sin embargo el hecho de que siga habiendo distintas escuelas de pensamiento y cierta ideología en temas de base debería ser una señal de alerta. Un informe de julio de 2009 en *The Economist* (Figura 4.1) resalta este hecho. Refiriéndose a los economistas Paul Krugman y Brad DeLong comenta:

“Recurren como inspiración a libros de texto de la época de la gran depresión, sobre todo a los trabajos de John Maynard Keynes, y olvidados disidentes, tales como Hyman Minsky. En el área de las humanidades esto sería una rutina habitual. Sin embargo, para muchos economistas modernos, es poco digno. Los científicos auténticos, después de todo, no hojean el texto Principia Mathematica de Newton para resolver problemas contemporáneos de la física.”

Una de las razones de semejante abismo entre las ciencias sociales y físicas se debe al hecho de que la primera es incapaz de realizar experimentos aislados. En primer lugar es extremadamente difícil poder aislar procesos sociales, económicos y financieros, tanto espacial como temporalmente, debido al alto grado de interrelación entre las variables. Por otro lado, es éticamente incorrecto experimentar distintos procesos en distintas poblaciones¹.

Este handicap de las ciencias sociales parece estar reduciéndose con la incorporación de una poderosa herramienta: la modelización basada en agentes o ABM (*Agent-Based Modeling*) según sus siglas en inglés.

Pareciera ser que la pregunta planteada por *The Economist* en Julio de 2009 con respecto al estado de las ciencias económicas y financieras ha tratado de ser respondida en un artículo de *Nature* de Agosto del mismo año. Resulta paradójico el hecho de que mientras las preguntas son planteadas desde una revista económica, las respuestas están siendo sugeridas desde una revista de corte netamente físico y biológico. El artículo se titula “*The economy needs Agent-Based Modeling*” y sus autores sostienen que varias políticas económicas deben empezar a ser encaradas usando dicho método.

4.1 Influencias.

La simulación con agentes puede ubicarse dentro de una novedosa área denominada *Ciencias de la complejidad o pléctica*. Sus fronteras no están claramente delimitadas, pero incluyen: fractales, teoría del caos, teoría de juegos, algoritmos genéticos, inteligencia artificial, teoría de redes, criticalidad autoorganizada y muchos otros estudios dedicados a entender el funcionamiento de sistemas complejos. En el Anexo F se presenta un mapa representativo de sus influencias y un orden cronológico tentativo de la evolución de las diversas áreas de estudio.

¹ El comunismo puede llegar a ser considerado el mayor experimento social del siglo XX, con países tales como Alemania y Corea divididos únicamente por un sistema político.

Si bien un recorrido exhaustivo a través de cada rama de la disciplina significaría una Tesis por sí misma, se presentará un breve *racconto* de algunas áreas de importancia previo a una incursión más detallada en la modelización con agentes.

4.1.1 ¿Pléctica?

La modelización con agentes tiene sus orígenes en el estudio de sistemas adaptativos complejos o CAS (*Complex Adaptive Systems*) por sus siglas en inglés. Dicha disciplina surgió a partir del estudio de la adaptación de sistemas biológicos, y obtuvo mayor divulgación tras la fundación del *Santa Fe Institute* en 1984. El estudio de sistemas adaptativos complejos se enfoca principalmente en sistemas compuestos por elementos que interaccionan entre sí y cómo por medio de simples reglas locales emerge un comportamiento complejo. Su principal característica es la habilidad de poder adaptarse y autoorganizarse de manera tal que sus componentes individuales sean más aptos para sobrevivir a su entorno. Dicha adaptación y organización ocurre a múltiples escalas, y se relaciona con los procesos críticos autoorganizados (Capítulo 3).

El término pléctica fue dado por Murray Gell-Mann (premio Nobel de física de 1969) en 1995 y deriva del término griego *plektos*. De él derivan en latín *simplex* y *complex*, lo cual facilita la transmisión de la idea de cómo por medio de lo simple emerge un comportamiento complejo. Debido a su carácter altamente interdisciplinario, la pléctica ha pasado a estudiar una variedad de sistemas en busca de encontrar cierta universalidad en ellos. Algunos de los ejemplos incluyen: mercados financieros, colonias de insectos, sistemas sociales o políticos, el sistema inmune y ecosistemas entre otros [North, 2007].

4.1.2 GOL.

El origen directo de la modelización con agentes proviene de lo que se conoce como un autómata celular (AC). Un autómata celular es un modelo matemático para un sistema dinámico que evoluciona en pasos discretos. Un típico AC está compuesto por una grilla bidimensional dividida en pequeñas celdas. Cada celda toma uno de una variedad finita de estados posibles en cada instante de tiempo, los cuales están determinados por un conjunto de leyes simples. En cada instante de tiempo cada celda actualiza su estado de acuerdo al de las otras celdas que la rodean.

El primer AC fue desarrollado en la década del cuarenta por el físico Stanislaw Ulam en respuesta a una pregunta propuesta por el matemático John von Neumann. La pregunta era: ¿Es posible programar una máquina para que haga una copia de sí misma? La respuesta era afirmativa, y era dada por la representación matemáticamente abstracta de una máquina como un AC. No obstante, se debió esperar hasta 1970 para que John Conway desarrollara el popular autómata celular que llamó “El juego de la vida” o GOL (*Game of Life*) según sus siglas en inglés.

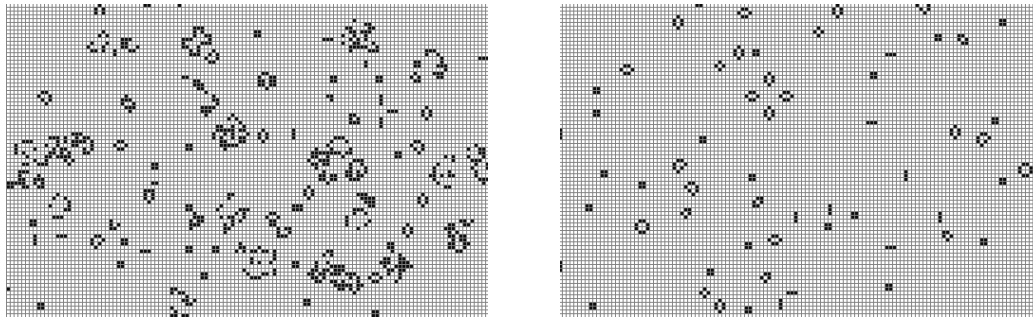


Figura 4.1: utilización de la aplicación bajada de bitstorm.org/gameoflife.

El juego de la vida posee tres simples reglas:

- La celda permanecerá encendida en la siguiente etapa si hay exactamente otras tres celdas (de ocho) encendidas a su alrededor.
- La celda mantendrá su estado actual si hay exactamente dos celdas encendidas a su alrededor.
- De lo contrario, la celda permanecerá apagada.

La *Figura 4.1* muestra dos imágenes de una simulación del juego de la vida. Tras iniciar la simulación con una disposición aleatoria comienzan a emerger ciertos patrones y en algunos casos estos patrones pueden permanecer indefinidamente en el tiempo. Se debe recordar que estos patrones que ocupan grandes segmentos de la grilla y muestran un comportamiento complejo sensible a las condiciones iniciales son generados únicamente a partir de reglas locales y simples [North, 2007]. Stephen Wolfram ha estado investigando esta área de estudio en particular desde los años setenta. Demostró, entre otras cosas, que variando las reglas de distintos autómatas celulares emergen sorprendentes patrones, algunos de los cuales corresponden a una variedad de algoritmos y sistemas lógicos. Estas ideas fueron plasmadas en un libro publicado en 2002 bajo el título de *A New Kind of Science*. El concepto de un autómata celular está intrínsecamente relacionado a la plética.

4.1.3 Un mundo pequeño.

Si bien el estudio de redes no se relaciona directamente a la modelización con agentes, influyen profundamente en su concepción, especialmente a la hora de estudiar fenómenos sociales.

El interés en las redes sociales comenzó alrededor de los años cincuenta, con un estudio del sociólogo político Sola Pool y el matemático Manfred Kochen en MIT acerca de la influencia de círculos sociales en las decisiones y estructuras políticas. Su trabajo titulado *Contacts and Influences* no fue publicado, pero abordó por primera vez varias preguntas que probarían ser fértiles para el desarrollo de varias publicaciones en años subsiguientes.

Una de estas preguntas consistía en saber qué tan interconectado está el mundo, o más precisamente ¿cuál es la distancia promedio entre dos nodos aleatorios en una

red social? Para responder esta pregunta Stanley Milgram, de la Universidad de Harvard, realizó en 1967 un experimento poco convencional: envió 196 paquetes a personas de Omaha, Nebraska solicitándoles que lo enviaran a un corredor de bolsa de la zona de Boston, a quien no conocían. Lo interesante del experimento radicaba en que el paquete no tenía la dirección del corredor de bolsa, sino que las 196 personas de Nebraska debían enviarlo a quién pensaran podía tener más chances de llevar el paquete al destinatario.

Cada persona que recibiera el paquete debía escribir su nombre en una lista y continuar la cadena. Varios de los paquetes no llegaron al destinatario, sin embargo, aquellos que sí llegaron poseían en promedio una cadena de entre 5,5 y 6 personas. Este estudio junto al título de la obra de John Guare popularizaron el concepto de “seis grados de separación” y el hecho de que en definitiva vivimos en “un mundo pequeño”.

Otra pregunta que se vienen haciendo los sociólogos en los últimos cincuenta años es cómo están compuestas las redes sociales. Para responder esta pregunta se deben presentar primero dos alternativas extremas: por un lado un *grafo aleatorio* y por el otro una *grilla*.

Un grafo es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos, que permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto. Un grafo aleatorio consecuentemente es un grafo generado por algún proceso aleatorio, siendo el modelo de Erdős y Rényi uno de los más aplicados. Una de las propiedades de este tipo de grafos es que el número de conexiones por nodo sigue una distribución normal.

Una grilla es un grafo regular, en el que el número de conexiones es igual para todos los nodos. A diferencia de los grafos aleatorios, las grillas no necesitan de medidas promedio ya que pueden ser descritas con relativa facilidad. En este tipo de redes, para ir de un nodo a otro, se debe atravesar todos los nodos intermedios. Por el contrario, en un grafo aleatorio, es posible realizar grandes saltos para ir de un nodo a otro, es decir, existe la posibilidad de realizar “atajos”.

Nuestro “mundo pequeño” queda en algún punto de ambos extremos, hecho que llevó a Steven Strogatz y a Duncan Watts a investigar cómo era posible pasar de un extremo a otro dejando los grafos intermedios completamente conectados. El método descrito consiste básicamente en partir de una grilla circular y reconectar algunos de sus nodos aleatoriamente. Con unos pocos reconexiones se obtiene el comportamiento esperado en un “mundo pequeño” y, con un promedio de solamente un nodo en diez reconectado, es prácticamente aleatorio. La cualidad de este mundo pequeño es el hecho de que combina un alto grado de agrupación, característica de una grilla, con una distancia promedio baja, característico de un grafo aleatorio. Otra cualidad interesante es que la transición de un estado a otro ocurre rápidamente, semejantemente a la que uno podría esperar de un cambio de fase [Ball, 2004]. Sus estudios fueron publicados en 1998 en la revista *Nature*. La *Figura 4.1* muestra el proceso de reconexión que lleva a la red de un extremo a otro, siendo el “mundo pequeño” el punto intermedio.

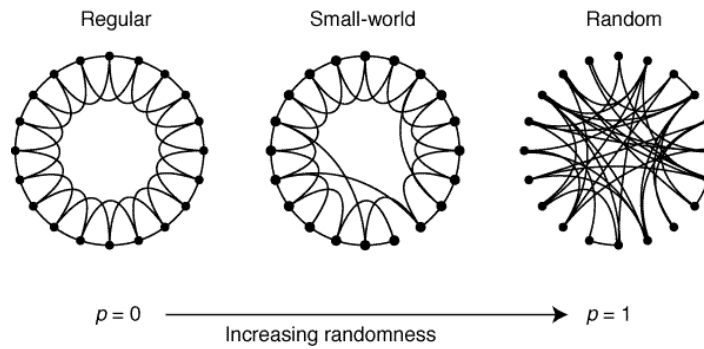


Figura 4.1. [Ball, 2004]

En 1999 Réka Albert, Hawoong Jeong y Albért Lázsló Barbási investigaron la estructura de la red por medio de la cantidad de conexiones entre páginas dentro del dominio de la Universidad de Notre Damme (www.nd.edu). Sus estudios ratificaron el hecho de que Internet, al igual que las redes sociales, puede ser caracterizada como un “mundo pequeño” pero, a diferencia del modelo propuesto por Strogatz y Watts, encontraron que sigue una topología libre de escala, es decir, puede ser representada mediante leyes de potencia. Esto significa que hay una mayor probabilidad de encontrar un nodo con un gran número de conexiones que la esperada en una red aleatoria. Lo sorprendente de este hecho es que dicha estructura y distribución emergen sin haber sido diseñadas, de la misma manera que las pilas de arena se autoorganizaban en un estado crítico, como se presentó en el Capítulo 3. El único ingrediente necesario para generar esta topología libre de escala pareciera ser cierto sesgo a favor de los nodos más conectados al generar nuevas conexiones. Esto concuerda con nuestra intuición de que las personas o páginas más populares son más propensas a atraer aún más contactos o vínculos. Este fenómeno ocurre desde citas científicas y apariciones de actores en películas (el famoso número de Bacon) a procesos metabólicos, lo cual indica un alto grado de universalidad del concepto de “un mundo pequeño”.

H. E. Stanley destaca que en algunos casos, como la de la red de apariciones de actores en películas, las leyes de potencia alcanzan cierto límite, y consecuentemente dejan de seguir dicha distribución. Una explicación posible radica en que se alcanza cierto límite natural en que un actor no puede realizar más de x películas en su vida por más fama que éste disfrute [Ball, 2004]. La distribución encontrada para la variación de activos financieros sigue un patrón similar, indicio de que podría haber un límite físico que impida encontrar una ley de potencias a partir de cierta dimensión de variación.

4.2 Rasgos principales.

La modelización con agentes puede ser definida como el estudio de un modelo computacional para simular la interacción de agentes individuales con el propósito de observar el comportamiento del sistema como un todo. Al igual que un autómata celular, se observa la emergencia de comportamiento complejo en un nivel *macro* a partir de simples reglas de comportamiento locales observadas en un nivel *micro*.

Según Nigel Gilbert [Gilbert, 2008], las principales características de una modelización con agentes son las siguientes:

- **Correspondencia ontológica.**

Puede llegar a existir una correspondencia directa entre los agentes del modelo computacional y los actores del mundo real, lo cual hace que sea más fácil e intuitivo de modelar e interpretar resultados.
- **Agentes heterogéneos.**

En términos generales, las teorías económicas y sociales emplean suposiciones en las que asumen poblaciones homogéneas en diversos aspectos. Si bien se puede llegar a suponer una diversidad de preferencias, resulta muy raro que los agentes tengan diferentes reglas de comportamiento. Dicha simplificación no proviene de una observación de la vida real, sino del hecho de que es la única manera de generar soluciones analíticas. La modelización con agentes evita tener que utilizar este tipo de restricciones.
- **Representación del entorno.**

Es posible representar el entorno en el que interactúan los agentes tales como límites geográficos, agotamiento de recursos, influencias locales, etc. Muchos de estos aspectos serían prácticamente imposibles de representar en un modelo analítico.
- **Interacciones entre agentes.**

Una de las principales ventajas de la simulación con agentes es el hecho de que puede representarse la interacción entre ellos. Este nexo puede incluir desde el simple traspaso de información, al intercambio de recursos por medio de reglas de decisión. En algunos casos puede construirse una topología de interacciones en la que existe una red entre los distintos agentes, tal como se comentó en el ejemplo de “mundos pequeños”.
- **Racionalidad acotada.**

En muchos modelos analíticos se asumen que los agentes son racionales, poseen información perfecta y realizan sus decisiones de tal manera de optimizar cierto recurso. La simulación con agentes permite introducir lo que se conoce como racionalidad limitada, en donde, si bien los agentes realizan ciertas decisiones de acuerdo a determinadas reglas, no se necesita forzar la introducción de suposiciones irrealistas.
- **Aprendizaje**

Es posible simular aprendizaje tanto a nivel individual como grupal. Un ejemplo sería la simulación de algún proceso de evolución en donde los agentes aprenden para sobrevivir a su entorno y el sistema aprende al aumentar su resiliencia ante cambios externos.

Tras presentar las principales características de la modelización con agentes, se explicará con mayor detalle qué es lo que se describe como un agente. Según Wooldridge y Jennings un agente posee cuatro rasgos esenciales:

- Autonomía: no hay un controlador global dictando las acciones del agente, sino que se comporta de acuerdo a lo que fue programado a realizar.
- Conexión: puede interactuar con otros agentes e intercambiar información.
- Reactividad: es capaz de reaccionar frente a estímulos provenientes del entorno.
- Proactividad: posee ciertos objetivos definidos que busca alcanzar.

Dicha caracterización puede resultar difícil de aplicar a determinadas situaciones, razón por la cual Nigel Gilbert ofrece como alternativa los siguientes atributos:

- Percepción: un agente puede percibir su entorno, incluyendo la presencia de otros agentes.
- Funcionamiento: los agentes son capaces de realizar ciertas actividades. Pueden moverse e intercambiar información tanto con su entorno como con otros agentes.
- Memoria: poseen memoria, la cual registra acciones y percepciones previas.
- Reglas: tienen ciertas reglas o estrategias que de acuerdo a su situación actual e historia determinan sus acciones y funcionamiento.

Habiendo definido los componentes principales de la modelización con agentes, resultará más práctico presentar algunos ejemplos históricos para poder tener una idea del alcance de dicha disciplina.

4.3 Historia.

4.3.1 Modelos de Segregación

“Al comprar una casa, piensa en el vecino que adquirirás con ella.”

– proverbio ruso.

A Thomas Schelling se le reconoce el hecho de ser la primera persona en realizar una simulación en donde los agentes representan personas y sus interacciones describen un fenómeno social [North, 2007]. Su objetivo era tratar de explicar la segregación racial en los Estados Unidos y en 1971 publicó un artículo titulado *Models of Segregation*. Si bien su modelo era abstracto al no representar un fenómeno en especial, sus consecuencias permitieron entender como pueden surgir poblaciones altamente segregadas sin que necesariamente haya un alto sesgo racial entre sus habitantes.

El modelo está basado en una grilla rectangular en donde sus celdas son ocupadas aleatoriamente por agentes, los cuales representan habitantes de un barrio o ciudad. Solamente puede haber dos tipos de agentes, a los cuales llamaremos verdes o rojos. Cada celda puede albergar a un único agente por vez y hay muchas celdas que quedan libres. A cada intervalo de tiempo cada habitante percibe cuántos habitantes

de cada color hay a su alrededor (las ocho celdas que lo rodean). Si dicho valor es superior a cierto valor umbral de tolerancia, es decir, hay más de una cierta proporción de agentes verdes rodeando a uno rojo o viceversa, el agente se muda a una celda vacía. Al siguiente intervalo de tiempo el nuevo agente reposicionado puede llegar a inclinar la balanza de tolerancia de sus vecinos y forzar nuevas mudanzas. Lo interesante de este modelo es que hasta para tolerancias bajas de alrededor de 0.3, una distribución inicial aleatoria puede terminar en un arreglo altamente segregado con sectores de agentes verdes y rojos.

Las consecuencias del modelo son influyentes por varias razones. Primero, el resultado es sorprendente y no fácilmente predecible solamente a partir del comportamiento de los agentes. Segundo, el modelo es extremadamente simple y posee a la tolerancia como única variable, facilitando así su comprensión y comunicación. Finalmente, los patrones emergentes de segregación son robustos, ya que los mismos resultados ocurren para diversos niveles de tolerancias y reglas. A continuación se presenta en la *Figura 4.2* una simulación computacional del modelo.



Figura 4.2: simulación realizada con la aplicación de p.seppecher.free.fr/schelling

Dado que el estudio fue realizado en 1971, previo a la llegada de la PC, su modelo consistió básicamente de monedas distribuidas en una grilla dispuesta en una mesa de su casa a las cuales manualmente aplicaba las reglas. A partir de este primer estudio varios modelos basados en agentes han sido empleados para explicar diversos fenómenos sociales.

4.3.2 Una ecología de estrategias.

“Ojo por ojo, diente por diente”

– Ley del Talión.

A fines de la década del setenta Robert Axelrod trató de contestar la pregunta de cómo jugar el juego del dilema del prisionero de una manera muy poco convencional: realizó una competencia entre catorce investigadores de las ciencias sociales. El experimento consistía en que cada investigador debía proponer una estrategia y competir entre ellos. Varios participantes enviaron complejas estrategias con elaboradas fórmulas matemáticas, sin embargo la táctica ganadora fue una extremadamente simple propuesta por Anatol Rapoport, profesor de psicología y matemáticas de la Universidad de Toronto. Su estrategia, popularmente conocida como *Tit for Tat*, era simplemente comenzar cooperando y, de ahí en más, copiar la

última movida de su oponente. Axelrod fue sorprendido por este inesperado ganador y realizó un segundo torneo incluyendo ahora a sesenta y dos participantes de diversas áreas tales como la economía, matemática, física, biología evolutiva y ciencia computacional pero *Tit for Tat* ganó nuevamente. Axelrod quedó perplejo ¿Cómo era posible que una estrategia tan simple haya ganado ambos torneos?

Para evitar realizar un tercer torneo Axelrod contactó a John Holland de la Universidad de Michigan, quien había desarrollado un método para simular evolución en una computadora. La idea de Axelrod consistía en dejar que el algoritmo evolutivo produzca las posibles estrategias ganadoras. Sus resultados fueron publicados en 1987 bajo el título *The Evolution of Strategies in the Iterated Prisoner's Dilemma*.

Los pasos de Axelrod fueron seguidos por Kristian Lindgren, un físico de la Universidad de Gotenburgo. La innovación que realizó el físico sueco con respecto al modelo de Axelrod consistía en utilizar un grilla, similar a la de GOL, en vez de tener parejas jugando entre sí [Beinhocker, 2006]. Con esta alternativa se creó un sistema en desequilibrio, debido a la constante tensión entre cooperar o no cooperar. Asimismo no existiría una mejor alternativa óptima, sino que los agentes debían mirar su historia, situación y hacer lo mejor que pudieran. Al igual que en el GOL surgieron complejos comportamientos que no podrían ser predichos con anterioridad, o dicho en otras palabras, emergía un modelo que innovaba.

El experimento de Lindgren puede ser descrito como un GOL en donde en vez de que cada celda este prendida o apagada de acuerdo a las reglas del GOL, cada celda estaría coloreada según la estrategia utilizada y dicho color dependería de aplicar el juego del dilema del prisionero con las celdas vecinas. Lindgren simplemente hizo que cada celda jugara el juego del dilema del prisionero con sus cuatro celdas vecinas y computó el promedio de los cuatro juegos para cada celda. Una vez hecho esto, cada celda pasaría a tener la estrategia con el promedio más alto a su alrededor (Figura 4.3).

4 →	1	-2
	-1	

Figura 4.3

El problema que permanece es qué estrategias implementar inicialmente. Si se implementan estrategias aleatorias en la grilla, eventualmente el sistema tenderá a estabilizarse en un valor o ciclo repetitivo. Para evitar que esto suceda empleó un algoritmo genético en el que un número binario determinaría la estrategia. Inicialmente con dos números habría únicamente cuatro estrategias y una memoria de solamente un juego. Por ejemplo *Tit for Tat* sería 10, *Tat for Tit* 01, siempre cooperar 11 y nunca cooperar 00. A medida que avanzaba el juego Lindgren permitió que estas cadenas de unos y ceros crezcan en tamaño y complejidad mediante simples mutaciones aleatorias. El resultado fue un ecosistema de estrategias que evolucionaba en complejidad. La Figura 4.4 muestra un gráfico la evolución del número de celdas en la grilla con determinada estrategia.

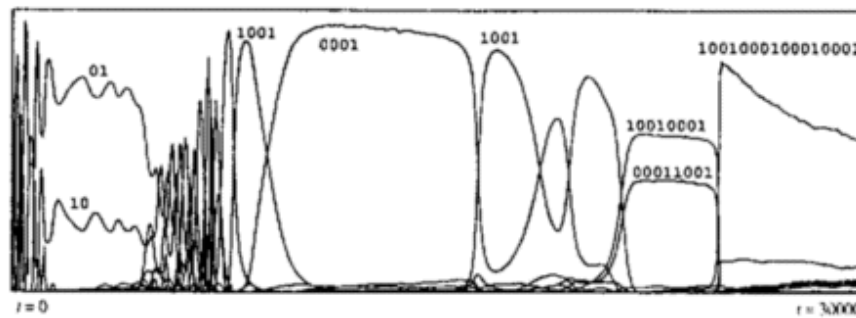


Figura 4.4. [Lindgren, 1991]

¿Qué estrategia fue la ganadora entonces? Resulta que esta pregunta no tiene sentido, ya que la respuesta dependerá del contexto e historia de lo sucedido. Las estrategias ganadoras son aquellas que “sobrevivieron”, aunque nada garantiza que en otra corrida corran la misma suerte. La suerte depende de la historia y la única manera de saber esto es corriendo la simulación, ya que el sistema, al igual que la economía, el clima o el sistema financiero, es verdaderamente impredecible debido a su alto grado de complejidad. Stephen Wolphram llama a este tipo de fenómeno *computational irreducibility*, ya que no hay manera de predecir qué ocurrirá más que corriendo el modelo.

A pesar de que no se puede predecir que sucederá exactamente con el sistema, sí es posible comprenderlo. Por ejemplo, se puede afirmar que con determinada tasa de mutación, o valores relativos del juego del dilema del prisionero, habrá más estrategias cooperadoras o mayor innovación. Por medio de simulaciones y estadísticas se podrá tener una idea de cuán robusto es el sistema y otras cualidades que serán mas valiosas que realizar simples pronósticos.

4.3.3 Sociedades artificiales.

*They were not Slaves to Tyranny,
Nor ruled by wild Democracy;
But Kings, that could not wrong, because
Their Power was circumscrib'd by Laws.*

- Bernard Mendeveille, The Fable of Bees, 1714.

¿Es posible construir una sociedad, al menos una computacional, a partir de las interacciones de sus individuos? Esta fue la pregunta que se plantearon Robert Axtell y Joshua Epstein a principios de los años noventa [Epstein, 1996]. Su respuesta resultó ser un revolucionario modelo de agentes al cual denominaron *Sugarscape*, y fue la base de la publicación en 1996 del libro *Growing Artificial Societies – Social Science from the Bottom up*.

La filosofía inherente en su planteo consistía en que diferentes fenómenos sociales tratados separadamente por las humanidades tales como procesos económicos,

culturales y geográficos deben ser abordados como uno solo debido a su interrelación y complejidad. Por medio de los comportamientos *micro* de los agentes, Axtell y Epstein esperaban modelar una sociedad con comportamientos *macro*, similares a los que podríamos esperar en la vida real. La mayoría de los modelos económicos asumen mercados, consumidores, productores y muchos otros elementos sin preguntarse previamente como surgen. Axtell y Epstein buscaban precisamente *crecer* estos fenómenos de cero.

El modelo puede ser descrito como una grilla, similar a la vista en ejemplos anteriores, en donde los agentes se mueven e interactúan (*Figura 4.5*). En la grilla crece azúcar, la cual es consumida por los agentes para trasladarse. Si un agente posee menos de cierta cantidad de azúcar en su organismo, entonces este muere. Asimismo cada agente posee cierto alcance de visión que le permitirá decidir la dirección óptima, con la mayor cantidad de azúcar a la cual desplazarse en cada movida. A principio del juego se distribuyen aleatoriamente los agentes en el terreno y se le otorgan aleatoriamente ciertos rasgos “genéticos” tales como visión y metabolismo.

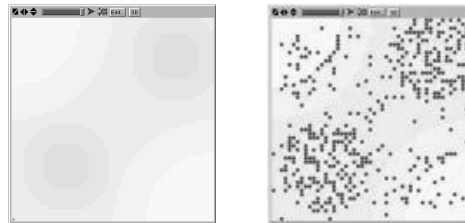


Figura 4.5: simulación en Netlogo de Sugarscape.

Para esta disposición Axtell y Epstein se preguntaron qué distribución de riqueza emergería. Al igual que Pareto, hurgando entre registros de impuestos a principios del siglo XX, encontraron una distribución con unos pocos individuos extremadamente ricos y una mayoría de pobres. Dicha distribución lleva el nombre del economista italiano y, como se presentó en el Capítulo 3, se conoce popularmente como la regla del 80/20. Al seguir la evolución de la distribución de la riqueza, Axtell y Epstein observaron que mientras inicialmente la sociedad era moderadamente igualitaria y pobre, hacia el final, esta aumentaba en riqueza aunque también en inequidad.

¿Qué posibles explicaciones se pueden encontrar para este fenómeno? Está claro que tanto la variación de aptitudes (visión y metabolismo), como la situación geográfica en la que nacen los agentes no puede ser la única explicación para semejante disparidad. Esto se debe a que si bien estos factores están aleatoriamente distribuidos al inicio de la simulación, hacia el final la disparidad en riqueza termina siendo sideralmente mayor. La explicación, más bien, es el sistema como un conjunto, en el que pequeñas divergencias iniciales pueden marcar enormes diferencias a futuro.

A partir de este primer modelo Axtell y Epstein agregaron la posibilidad de reproducción entre los agentes. La innovación consistió básicamente en agregar un sexo a cada agente y la posibilidad de reproducirse bajo ciertas condiciones (edad y nivel de azúcar). De esta forma, cuando dos agentes de sexos opuestos y con la

capacidad de reproducirse se encontraran, producirían otro agente. Sus parámetros, tales como visión y metabolismo, provendrían aleatoriamente de ambos padres.

Estos cambios produjeron una selección natural a favor de una mayor visión y un menor metabolismo. Esto permitió una mayor eficiencia para coleccionar el azúcar producido por la grilla y un mayor nivel de riqueza en la sociedad artificial. No obstante se observó una inequidad aún mayor y, gracias a la posibilidad de reproducción, aparecieron períodos de crecimiento seguidos por períodos de sobrepoblación, hambruna y muerte hasta que finalmente se volvía a repetir el ciclo.

Para introducir aún más realismo a este pequeño mundo virtual, Epstein y Axtell introdujeron un nuevo *commodity* al que denominaron *picante*. Al igual que el azúcar, este estaría distribuido en dos montañas opuestas. Esto significaría que cada celda tendría un valor para el azúcar y otro para el picante. El metabolismo de los agentes fue consecuentemente cambiado para que necesiten un mínimo de picante además del nivel mínimo de azúcar. Debido a la variación de preferencias incluida en el modelo, algunos agentes necesitarán mucha azúcar y poco picante, mientras que otros requerirán poca azúcar y mucho picante.

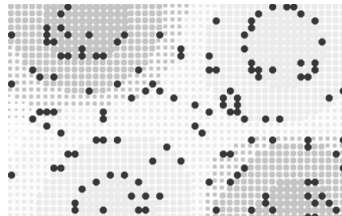


Figura 4.5. [Epstein, 1996]

El paso final fue permitir que los agentes comerciaran: cuando dos agentes se encontraran, podrían intercambiar azúcar y picante por medio de una negociación en la que los dos saldrían beneficiados ². El resultado fue la aparición de una economía virtual y compleja que permitió la formación de redes de comercio e incrementó la prosperidad del conjunto. Asimismo la combinación de geografía y economía permitió la creación de densas rutas de comercio uniendo las zonas de azúcar con las de picante, junto con agentes eficientes en recolectar azúcar y pimienta. El equivalente a “productores”, “consumidores” y “rutas de seda” emergían en la PC. Epstein y Axtell, semejantemente a los experimentos *in vitro* realizados en la biología, habían hecho crecer la primera economía *in silico*.

2

1. Cada Agente computa su Tasa Marginal de Substitución (TMS) de picante. Si son iguales el proceso termina.
2. El picante fluye del agente con la mayor TMS al de la menor. El azúcar lo hace en la dirección contraria.
3. La media geométrica de ambas TMS es calculada. Este valor será el precio p .
4. Si $p > 1$ se intercambian p unidades de picante por una de azúcar. Si $p < 1$ se intercambian $1/p$ unidades de azúcar por una de picante.
5. Si este intercambio (a) incrementa el patrimonio de ambos agentes y (b) no hace que se cambie el sentido de sus TMS, entonces se realiza el intercambio y se vuelve a empezar. De lo contrario termina la negociación.

Como era de esperarse, cuando Epstein y Axtell computaron la oferta y la demanda agregada de todos los agentes, encontraron las características curvas encontradas en los libros de texto. No obstante, los precios y cantidades comerciadas nunca alcanzaban el punto de equilibrio predicho por la teoría económica, sino que fluctuaban cerca de él. Otra anomalía observada fue el hecho de que la cantidad comerciada excedía a la esperada por la teoría clásica.

La explicación a estas discrepancias con la teoría clásica radica en que los agentes se mueven en tiempo y espacio sin la suposición de una subasta Walrasiana. Esto permite que las condiciones cambien constantemente sin llegar nunca a un equilibrio en el que nadie pueda mejorar su situación. El supuesto de una subasta Walrasiana podrá ser cierta para ejemplos tales como los mercados financieros o eBay, aunque aplicarla a todo bien económico es sin dudas una simplificación grosera.

El modelo de *Sugarscape* permanece como uno de los modelos más reconocidos en el campo de la modelización con agentes, sirviendo de punto de apoyo para muchos papers subsiguientes.

Quizá se haya preguntado de donde proviene la cita al comienzo de esta sección. Para aquellos curiosos, Bernard Mandeville fue un filósofo y economista nacido en Rotterdam en 1670 que pasó la mayor parte de su vida en Inglaterra. Influyó notablemente en Adam Smith, por medio de su poema, *La fábula de las abejas*, en donde narra la historia de un enjambre de abejas, las cuales prosperan como un conjunto por medio de sus pequeños vicios individuales. Paradójicamente, uno de los programas más populares a la hora de simular con agentes se llama *Swarm*, que significa enjambre en español.

4.4 Aplicaciones al estudio de mercados financieros.

Los últimos quince años han visto una explosión de *papers* abordando los mercados financieros como un sistema adaptativo complejo. La principal razón por este fenómeno se debe al vacío teórico dejado por las teorías tradicionales que vieron su expansión en la década del setenta, junto con la masificación de la PC y la maduración de muchas influencias tales como evolución, genética, criticalidad autoorganizada, teoría del caos, fractales, teoría de redes, dinámica de sistemas, etc. Si a esto se le suma la incapacidad de los modelos tradicionales para explicar el lunes negro de 1987, la crisis asiática de 1997, la caída de las compañías .com en el 2000 y finalmente el colapso financiero de 2008, es evidente que la teoría contiene demasiadas excepciones.

Al igual que el cálculo en siglo XVII, la ciencia de la complejidad en el siglo XXI es una idea que simplemente está en el aire, y es sólo cuestión de tiempo a que sea difundida al público en general. Quizá pueda pecar de optimista, pero es innegable que esta nueva rama está empezando a hacerse sentir en el ámbito académico. A continuación se presentarán varios modelos que buscan explicar varias de las “anomalías” encontradas en los mercados financieros por medio de la modelización con agentes y otras teorías.

4.4.1 El juego de las minorías.

El problema El Farol bar, es un problema relacionado a la teoría de juegos y creado en 1994 por William Brian Arthur, economista del Santa Fe Institute [Voit, 2005] [Beinhocker, 2006]. El problema consiste en que una población de gente debe decidir cada jueves ir o no a un conocido bar irlandés ubicado en Santa Fe, New Mexico, y como muchos bares, se pasa un buen momento si no está demasiado lleno.

Si menos del 60% de la población concurre al bar, pasará un mejor rato en el bar que si se hubiese quedado en su casa, aunque en el caso contrario, preferiría haberse quedado en su casa. El dilema consiste en que sin importar qué estrategia elija cada persona, si esta pertenece a la mayoría, estará destinada a fracasar. Es un juego dinámico en el que una ecología de estrategias cambiantes debe competir por un recurso escaso.

Una variante al problema de *El Farol* es conocido como un juego de las minorías, propuesto en por Yi-Cheng Zhang y Damien Challet, de la Universidad de Fribourg. En este juego un número impar de jugadores N_p , cada uno con un número finito de estrategias N_s , debe elegir a cada intervalo una de dos alternativas tales como comprar o vender, ir a un bar o quedarse en casa, etc.

Se utilizará ± 1 para describir la elección binaria, y la decisión de un jugador i en el tiempo t se define como $a_i(t)$. La regla consiste en premiar a aquellos jugadores del lado minoritario con un punto. El ganador es aquel que termine con la mayor cantidad de puntos.

La serie de tiempo está disponible a todos los jugadores como información común. Una estrategia de longitud M es una función que convierte los últimos M bits del historial en una acción para el próximo. Por ejemplo, para $M = 3$, habrá ocho (2^3) posibilidades, cada una con una acción. La siguiente es una posible estrategia.

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \{ 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1 \} \quad (4.1)$$

La historia $h(t)$ es la señal transmitida a todos los jugadores a cada intervalo, es decir, los últimos M sucesos. El espacio de estrategias posibles está definido por 2^{2^M} , ya que cada una de las 2^M posibilidades de historia define dos posibles acciones: 1 o -1 .

De esta forma M es un indicador de la capacidad de memoria de los agentes, y define que tan complejo es el espacio de estrategias posibles. Cuando el número de estrategias disponibles para cada jugador sea muy inferior al máximo posible ($N_s \ll 2^{2^M}$), muy pocas serán utilizadas por dos o más jugadores. Por el contrario, cuando no se cumpla esta igualdad, habrá muy pocas estrategias que podrán ser utilizadas solamente por un jugador.

A cada intervalo de tiempo cada jugador evalúa la performance de cada una de sus estrategias, sin importar si fueron utilizadas o no. A aquellas que hubieran resultado

ganadoras (o las que efectivamente fueron ganadoras) se les asigna un punto. De esta forma, a cada intervalo, cada jugador utilizará aquella estrategia que tenga el mayor puntaje acumulado.

El registro del juego es la serie de tiempo definida por:

$$A(t) = \sum_{i=1}^{N_p} a_i(t) . \quad (4.2)$$

De esta forma, consecuente con lo comentado anteriormente, se le otorgará un punto a aquellos jugadores que cumplan:

$$a_i(t) = -\text{sign } A(t) . \quad (4.3)$$

Cuando se simula el juego, el resultado es una serie de tiempo $A(t)$ que oscila de una manera aleatoria alrededor de 0. Al igual que el modelo de Lindgren (4.3.2) no existe una estrategia dominante, ya que esta será buena o mala sólo si se toma en cuenta su contexto, es decir el conjunto de estrategias contra las cuales compite. Cuando se analiza la distribución de puntos para las estrategias en tiempos relativamente cortos hay una amplia diferencia entre las buenas y las malas. No obstante, para largos períodos de tiempo, esta brecha se reduce significativamente, indicándonos que en el largo plazo todas las estrategias son iguales. El éxito o el fracaso dependerán, en definitiva, de un buen *timing* para utilizar las distintas estrategias.

Un hecho que resulta curioso de este juego es como varía la volatilidad o el desvío estándar de $A(t)$ en relación a M , la cual define la memoria de los jugadores. Para pequeños valores de M , la volatilidad decrece rápidamente a medida que aumenta M . Sin embargo a partir de un valor de memoria crítico, la volatilidad aumenta lentamente con M . Lo contrario ocurre con N_p , el número de jugadores. Dicho comportamiento puede describirse como un cambio de fase, y el parámetro para la transición se calcula como:

$$\alpha_A = \frac{2^M}{N_p} , \quad (4.4)$$

la cual en definitiva es una medida de la complejidad de la información por jugador.

Para valores pequeños de α_A el juego tendrá una gran cantidad de estrategias compartidas, ya que habrá mayor probabilidad de que dos jugadores posean una estrategia en común. Se puede decir que el espacio de estrategias posibles está *apiñado*. Por el contrario, para valores grandes de α_A , habrá muy poca probabilidad de que dos jugadores tengan una misma estrategia, y muchas posibles estrategias quedarán sin ser exploradas.

La relación a los mercados financieros es clara. Los agentes deben realizar decisiones bajo ciertas limitaciones, incertidumbre y con información limitada. Asimismo la decisión fundamental en un mercado financiero es binaria: comprar o vender. Los inversores pueden encontrar sus estrategias por prueba y error, y estas pueden ser limitadas. En este juego de las minorías, al igual que en los mercados, hay competencia y no existe una estrategia infalible, por consiguiente, uno no podrá ganar todo el tiempo.

Sin embargo, existen varias diferencias con un mercado. En primer lugar uno puede argumentar que los mercados financieros están influenciados por el arribo de información ligada al activo subyacente. En segundo lugar, con una expectativa de una transacción ganadora del 50%, no está en claro qué es lo que los hace comerciar. En tercer lugar, los mercados parecieran que juegan en muchos momentos al juego de la mayoría en vez del de la minoría, ya que las estrategias exitosas son aquellas que compran cuando todos compran y venden cuando todos venden. Finalmente, a diferencia de este juego, en la vida real los corredores de bolsa pueden decidir no participar en algunos momentos.

Si bien los modelos de juegos de minoría no buscan representar un mercado, se puede argumentar que presentan varias similitudes con él. Su estudio nos permite entenderlo desde otro ángulo al ofrecer posibles explicaciones endógenas a distintos fenómenos, además del arribo de nueva información.

4.4.2 Culpen al subastador.

Un enfoque distinto propuesto en 2004 por Doyne Farmer, del *Santa Fe Institute*, bajo el título de *The predictive power of zero intelligence in financial markets* [Farmer, 2004] buscó explicar la volatilidad por medio del sistema de subastas. A diferencia de muchos otros estudios que intentaban reproducir leyes de potencia encontradas en la vida real, por medio de la interacción de agentes con racionalidad limitada, Farmer y sus colegas se avocaron a estudiar al sistema de subastas en sí [Beinhocker, 2006].

El tipo de subasta bajo escrutinio fue la subasta doble continua que, a grandes rasgos, es la utilizada en la mayoría de mercados financieros. Se la llama doble, debido a que los agentes pueden decidir entre comprar o vender, y se la llama continua, dado que pueden hacerlo en todo momento. Una orden que no cruce al mejor precio opuesto, y consecuentemente no resulte en una compra o venta, se la llama una *orden de límite*. Una orden que sí cruce el mejor precio opuesto y cause una transacción inmediata se la llama *orden de mercado*. Si bien cada mercado usa distinto tipo de órdenes, estas pueden ser descompuestas esencialmente a órdenes de límite y de mercado. Las órdenes de límite para comprar y vender se acumulan en sus respectivas filas, mientras que las órdenes de mercado generan transacciones que remueven órdenes de límite. Las órdenes de límite pueden ser canceladas en cualquier momento. El precio mínimo ofrecido para la venta se lo denominará como la *mejor venta*, $a(t)$, mientras que el precio máximo ofertado se lo denominará la *mejor compra*, $b(t)$. La brecha entre estos dos precios $s(t) = a(t) - b(t)$ irá cambiando a medida que se realicen transacciones o arriben nuevas órdenes. La *Figura 4.6* es la utilizada en el *paper* original para explicar este proceso.



Figura 4.6. [Farmer, 2004]

Farmer y sus colaboradores decidieron mantener el modelo simple, con el fin de facilitar el subsiguiente análisis analítico. El modelo asume que existen dos tipos de agentes: los *ansiosos* y los *pacientes*. Los compradores o vendedores ansiosos son aquellos que compran o venden órdenes de mercado, según un proceso independiente de Poisson a una tasa de μ acciones por unidad de tiempo. El precio de dichas acciones queda totalmente determinado por el mercado. Por el contrario, los compradores o vendedores pacientes colocan órdenes de límite a una tasa de α acciones por unidad de tiempo por unidad de precio. En el intervalo $-\infty < p < a(t)$, en donde p es el logaritmo del precio, se colocan uniformemente órdenes límite para la compra, mientras en el intervalo $b(t) < p < \infty$ se colocan uniformemente las órdenes de límite para la venta. Tanto las órdenes de límite como las de mercado tienen un tamaño de σ acciones. Las órdenes de límite en espera son canceladas según un proceso de Poisson, a una tasa fija de δ acciones por unidad de tiempo.

Usando estas simplificaciones, el físico del *Santa Fe Institute* utiliza lo que se conoce como la teoría del campo medio (ver Capítulo 3, Sección 3) para resolver el problema. Algunas suposiciones, tal como la distribución uniforme de órdenes de límite, son hechas simplemente teniendo en cuenta la simplicidad del modelo analítico a la hora de aplicar la teoría del campo medio. El valor predicho por el modelo para la brecha promedio es:

$$\bar{s} = (\mu / \alpha) f(\sigma \delta / \mu). \quad (4.5)$$

El parámetro adimensional $\sigma \delta / \mu$ puede ser pensado como el porcentaje de acciones removidas por órdenes de mercado sobre las removidas por cancelaciones, siendo $f(x)$ una función monotonita creciente que puede ser aproximada según $f(x) = 0.28 + 1.86 x^{3/4}$.

El modelo puede también predecir la tasa de difusión de los precios, la cual es una medida de la volatilidad y riesgo financiero. Si se asume que los precios siguen un

paseo aleatorio, la varianza quedará determinada por $V(t) = Dt$, siendo D la tasa de difusión. Dicha tasa, a pesar de ser esencial para determinar la volatilidad, permanece incomprendida ya que en muchos modelos suele ser considerada como “arribo de información”. La estimación de dicho parámetro hecha por el estudio es la siguiente:

$$D = k\mu^{5/2}\delta^{1/2}\sigma^{-1/2}\alpha^{-2}. \quad (4.6)$$

Los autores verificaron empíricamente sus resultados frente a once acciones correspondientes al London Stock Exchange entre Agosto de 1998 y Abril de 2000. Sus resultados sugieren que el modelo puede explicar la mayor parte de dicha variabilidad. A continuación, en la *Figura 4.7* se presenta el gráfico que compara la regresión hecha para los datos reales (en línea continua) frente a los predichos por el modelo (línea rayada) para el caso de la brecha promedio.

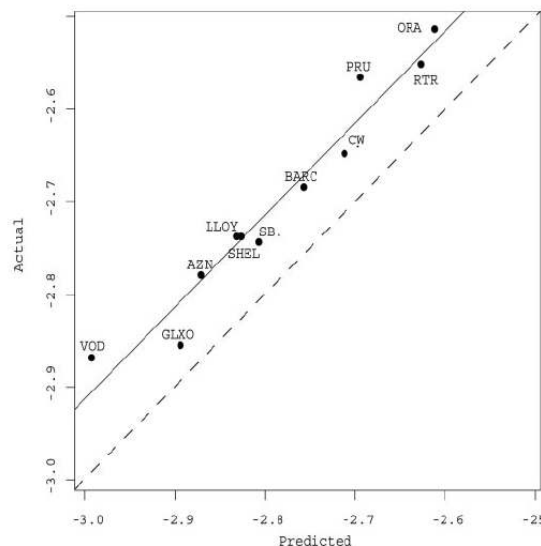


Figura 4.7. [Farmer, 2004]

Más allá de los detalles técnicos ofrecidos por el estudio, la principal virtud es su singular enfoque para entender la variación de precios. Según comentan, su *paper* permite entender el problema “blando” de cómo varían los precios mercado dado cierto arribo de órdenes, no obstante sigue faltando un entendimiento de por qué el arribo de órdenes varía de la forma que lo hace. Dicho trabajo demuestra el nuevo enfoque que está empezando a divulgarse en el estudio de fenómenos sociales, permitiendo el cruce de ideas entre diversas áreas. La siguiente cita confirma tal idea:

“Las leyes que presentamos aquí no son descripciones temporales, sino que son restricciones a variables de estado. La ley del gas ideal $PV=RT$, nos provee de una buena analogía. (...) Similarmente, el estudio proporciona dos relaciones entre propiedades de flujos de órdenes y propiedades de precios.”

4.4.3 Fundamentalista o especulador, he aquí la cuestión.

“La hipótesis de la eficiencia en los mercados es simplemente un modelo y, como todo modelo interesante, no es literalmente cierto.”

– Kenneth R. French

Tal como se comentó con anterioridad, la variación de los precios de los mercados financieros sigue un comportamiento semejante al de las leyes de potencias de sistemas físicos, en donde una gran cantidad de componentes interaccionan entre sí. Esto hecho lleva a plantearse si dicha dinámica proviene de la misma fuente: un gran número de participantes comprando y vendiendo en un mercado. El artículo de la revista *Nature* titulado *Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market*, publicado en Febrero de 1999 por Thomas Lux, de la Universidad de Bonn, y Michele Marchesi, de la Universidad de Cagliari, aborda esta cuestión [Lux, Marchesi, 1999].

Una consecuencia inmediata de dicho planteo es que contradice la hipótesis de mercado eficiente, en donde se asume que la variación de precios proviene del arribo de información. Según la teoría, la distribución de la variación de precios debería ser un reflejo de la distribución con la que el mercado recibe la información; no obstante, el modelo propuesto demuestra la aparición de leyes de potencia y escala a partir de un arribo de información estrictamente *gaussiano*. La variación de precios, consecuentemente, es producida por la dinámica del sistema en sí, y no a la variable de entrada, demostrando la presencia de factores endógenos en la dinámica del precio del mercado.

El modelo propuesto es bastante sencillo ya que existen únicamente dos tipos de agentes: por un lado se encuentran los *fundamentalistas*, los cuales esperan que el precio p siga al precio fundamental del activo p_f , y por el otro lado se encuentran los *especuladores*, los cuales se enfocan en tendencias y el comportamiento de otros agentes. Dicho grupo, a su vez, se encuentra dividido entre optimistas y pesimistas, los cuales compraran o venderán unidades adicionales del activo. La estrategia a seguir por un fundamentalista será comprar cuando el valor de mercado esté por debajo de su valor fundamental y viceversa.

La dinámica de la simulación está impulsada por tres eventos: el cambio de agentes de un grupo a otro, el cambio del valor fundamental y el cambio del precio de mercado. Los cambios entre especuladores optimistas y pesimistas, o viceversa, están determinados por factores de “ruido”: tendencias y mayoría de opiniones. Las tasas de cambio son las siguientes:

$$\pi_{- \rightarrow +} = \nu_1 \frac{n_e}{N} e^{U_1} \quad \pi_{+ \rightarrow -} = \nu_1 \frac{n_e}{N} e^{-U_1} \quad (4.7)$$

$$\text{siendo} \quad U_1 = \alpha_1 \frac{n_+ - n_-}{n_e} + \frac{\alpha_2}{\nu_1} \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$$

$N = n_e + n_f$ representa el número total de agentes, siendo $n_e = n_+ + n_-$ el número de especuladores optimistas (n_+) y pesimistas (n_-), y n_f el número de fundamentalistas. v_1 y $\alpha_{1,2}$ representan las frecuencias de reevaluación de opiniones y movimientos de precios. De esta forma, el primer término correspondiente a la función de utilidad U_1 representa la opinión mayoritaria de los especuladores, y el segundo la tendencia de precio. Por ejemplo, incrementos de precio junto con una predominancia de individuos optimistas generará un traspaso de especuladores pesimistas a optimistas.

Para evaluar los cambios entre especuladores y fundamentales se necesitan cuatro tasas.

$$\begin{aligned} \pi_{f \rightarrow +} &= v_2 \frac{n_+}{N} e^{U_{2,1}} & \pi_{+ \rightarrow f} &= v_2 \frac{n_f}{N} e^{-U_{2,1}} \\ \pi_{f \rightarrow -} &= v_2 \frac{n_-}{N} e^{U_{2,2}} & \pi_{- \rightarrow f} &= v_2 \frac{n_f}{N} e^{-U_{2,2}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Al igual que para la tasas de cambio entre especuladores, dichas tasas de cambio entre especuladores y fundamentalistas están determinadas por el porcentaje de fundamentalistas, especuladores optimistas o especuladores pesimistas sobre la población total, la tasa de reevaluación para cambiar de grupo y una función de utilidad. Sin embargo, debido a que las utilidades de ambos grupos son distintas, sus funciones variarán.

La utilidad de fundamentalistas está dada por la diferencia entre el valor de mercado y el valor fundamental pero, debido a que la utilidad podrá ser registrada únicamente cuando llegue a este último valor, habrá que descontarla por un factor $q < 1$. De esta forma la utilidad del fundamentalista será $q|p - p_f|/p$. Por otro lado, la utilidad del especulador estará dada por la diferencia entre los retornos de su inversión y la del mercado R . El retorno de su inversión está dado por los dividendos de la acción sumados al cambio de precio, dividido por el precio. Para el caso del especulador optimista será

$$\frac{d + \frac{1}{v_2} \frac{dp}{dt}}{p}, \quad (4.9)$$

mientras que para el pesimista será simplemente su valor negativo. De esta forma tendremos:

$$U_{2,1} = \alpha_3 \left(\frac{d + \frac{1}{v_2} \frac{dp}{dt}}{p} - R - q \frac{|p - p_f|}{p} \right) \quad U_{2,2} = \alpha_3 \left(R - \frac{d + \frac{1}{v_2} \frac{dp}{dt}}{p} - q \frac{|p - p_f|}{p} \right) \quad (4.10)$$

Una vez definidas las tasas de cambio entre poblaciones se presentará la determinación del precio, el cual se forma relativamente simple. Se asume que a cada instante de tiempo existe un subastador que aumenta o baja el precio cierto valor fijo según la siguiente probabilidad.

$$\pi_{\uparrow p} = \max[0, \beta(ED + \mu)] \quad \pi_{\downarrow p} = \min[\beta(ED + \mu), 0] \quad (4.11)$$

ED representa el exceso de demanda, β es un parámetro para la velocidad de reacción del subastador y μ es un término de ruido. El exceso de demanda proviene del conjunto entre fundamentalistas y especuladores. Están dadas por:

$$ED = ED_f + ED_e = n_f \gamma (p_f - p) + (n_+ - n_-) \sigma, \quad (4.12)$$

siendo γ una medida de la fuerza de reacción de los fundamentalistas y σ la cantidad fija que compran o venden los especuladores.

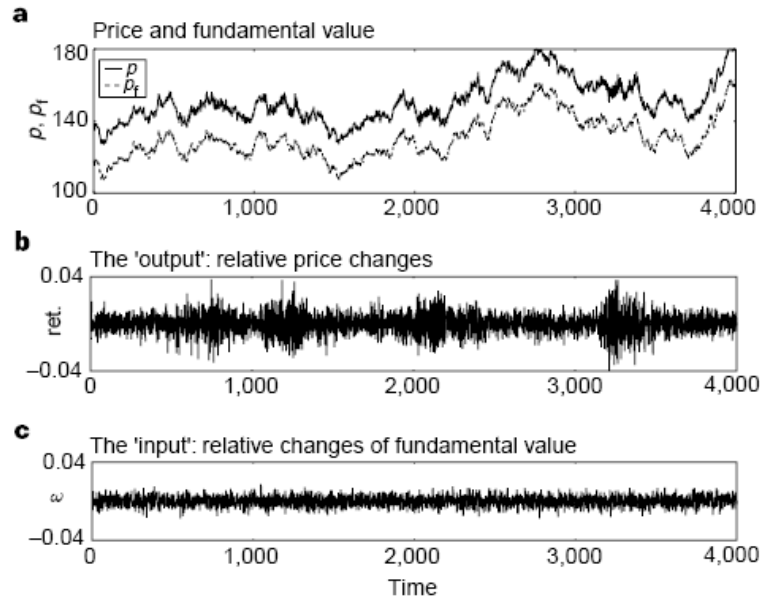


Figura 4.8. [Lux, Marchesi, 1999]

Resulta interesante observar que *en promedio* el precio de mercado sigue el valor fundamental, sugiriendo que, al menos en el largo plazo, el mercado puede ser

descripto como “eficiente”: no se encuentran desviaciones persistentes entre ambos valores. Este hecho puede ser visto en la *Figura 4.8 a*, en donde el precio de mercado sigue cercanamente al del valor fundamental (en la imagen los precios están corridos verticalmente con el propósito de facilitar la presentación de este hecho). Sin embargo si se compara la variación del precio fundamental p_f , la variable de entrada **c**, con el del mercado p , la variable de salida **b**, se observa una marcada diferencia. Mientras el valor fundamental varía mediante un proceso de Gauss, es decir $\ln(p_{f,t}) - \ln(p_{f,t-1}) = \varepsilon_t$, el precio de mercado demuestra una mayor frecuencia de eventos extremos y una agrupación de la volatilidad. Esto indica que dicha dinámica proviene de la interacción del sistema y no de su variable de entrada, el valor fundamental. La *Figura 4.9* demuestra este hecho.

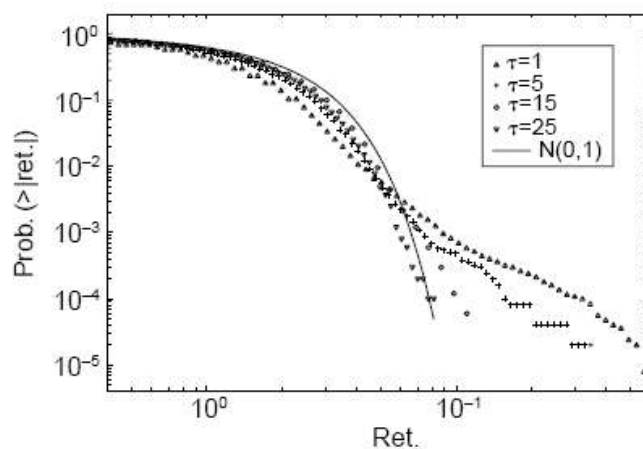


Figura 4.9. [Lux, Marchesi, 1999]

La línea continua la corresponde al proceso de Gauss, y las punteadas a distintos intervalos de tiempo para el precio de mercado. Se observa que para tiempos cortos, las colas de la distribución se asemejan a la de una ley de potencia; no obstante para mayores horizontes de tiempo, esta se aproxima a la distribución normal. Estos hechos concuerdan con los datos empíricos de distintos mercados. Otro hecho interesante es que, a diferencia del valor fundamental, los retornos absolutos del precio de mercado demuestran dependencia temporal $H \approx 0.85$ (recordar el exponente de Hurst del Capítulo 2).

Un análisis detallado del sistema demuestra que los cambios repentinos de volatilidad se producen a partir de los cambios de agentes entre grupos. En los períodos turbulentos existe un gran porcentaje de especuladores, y se observa que el sistema pierde estabilidad a partir de cierto valor crítico de especuladores. Sin embargo estas fases de volatilidad elevada se resuelven endógenamente, mediante la acción de los fundamentalistas, que observan las desviaciones del valor fundamental como oportunidades de ganancias, llevando el sistema a la normalidad.

La variación de precios especulativos.

CAPITULO 5

INCURSIONES PRÁCTICAS

5.1 Estimación del exponente de Hurst para el índice Merval.**5.1.1 Método**

Tal como se comentó en el Capítulo 2, Hurst desarrolló lo que se conoce como el análisis del rango re-escalado, un método estadístico para analizar series de tiempo. Originalmente fue empleado con el propósito de dimensionar una serie de diques en el río Nilo, aunque hoy día es aplicado a una variedad de fenómenos naturales. A continuación se describe el método empleado para calcular dicho exponente [Peters, 1994, 1996].

Dada la serie temporal $\{x(1), x(2), \dots, x(t)\}$ de un fenómeno natural registrado a intervalos discretos en un intervalo τ , se calcula el promedio en dicho intervalo como

$$\langle x \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} x(t). \quad (5.1)$$

Resulta conveniente convertir la serie de precios al retorno logarítmico, ya que el análisis de rango re-escalado calcula el desvío acumulado del promedio. Esto se debe a que la suma del logaritmo de los retornos calcula el retorno acumulado, mientras que los cambios porcentuales no lo hacen. De esta forma nuestra serie $x(t)$ quedará definida por

$$x(t) = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right). \quad (5.2)$$

$X(t, \tau)$ se calcula como la divergencia acumulada de la señal $x(t)$ frente a su promedio $\langle x \rangle_\tau$.

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t \{x(u) - \langle x \rangle_\tau\} \quad (5.3)$$

El rango se calcula como la diferencia entre el mínimo y el máximo valor encontrado para la divergencia acumulada.

$$R(\tau) = \max X(t, \tau) - \min X(t, \tau); \quad 1 \leq t \leq \tau \quad (5.4)$$

Utilizando el desvío estándar

$$S = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \{x(t) - \langle x \rangle_{\tau}\}^2} \quad (5.5)$$

Hurst descubrió que el observado rango re-escalado (R/S) sigue para una variedad de procesos la siguiente relación empírica.

$$\frac{R}{S} = (c\tau)^H \quad (5.6)$$

Dicha relación puede presentarse en un gráfico logarítmico doble, en donde la pendiente representará al exponente ya mencionado.

$$\log_{10} \left(\frac{R}{S} \right) = H \log_{10}(\tau) + H \log_{10}(c) \quad (5.7)$$

Para obtener dicho gráfico deberá hacerse el análisis de rango re-escalado para distintos intervalos. Por ejemplo si se tuvieran datos mensuales para un período de cuarenta años, se podría comenzar obteniendo ochenta valores semestrales de R/S . El logaritmo del promedio de estos ochenta valores representará un punto del gráfico correspondiente al logaritmo de τ , seis meses. Expresado matemáticamente, siendo N el número total de datos y a la cantidad de segmentos en la que se pueden dividir la serie, dado el intervalo τ .

$$a = \lfloor N / \tau \rfloor$$

$$\left(\frac{R}{S} \right)_{\tau} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a \frac{R_i}{S_i} = (c\tau)^H \quad (5.8)$$

Esto mismo proceso puede realizarse para distintos intervalos, aunque siempre se debe constatar de que los distintos intervalos correspondientes a un mismo período no se superpongan. Una forma de asegurarse de esto es comenzar con un mínimo de ocho datos (número mínimo recomendable) como intervalo τ , e ir multiplicando por dos hasta llegar al período total. El problema con dicho método es que se obtienen pocos puntos con los cuales estimar H . Para solucionar tal inconveniencia se pueden utilizar todos los enteros entre 8 y N . Una vez calculados todos los puntos, se estima el exponente por medio de una regresión lineal.

Debido a que dicho proceso es demandante en términos de cómputo (un solo punto de la regresión puede llegar a significar varios cálculos) resulta conveniente utilizar algún programa que simplifique el proceso. En el análisis se utilizó una planilla Excel junto con programación en Visual Basic. Debido a que mucha de la bibliografía tiende a obviar estos últimos pasos, sin especificar cómo debe hacerse el análisis, dicho código puede resultar de mucha utilidad debido a su practicidad y facilidad de uso. Si bien existen unos pocos programas hechos con este propósito, funcionan a modo de “caja negra” en donde no se pueden inferir pasos intermedios. Se considera que el programa desarrollado es útil tanto a fines prácticos como educativos. Para aquellos interesados en el código, su detalle junto con las instrucciones se encuentra en el Anexo G.

5.1.2 Resultados.

Utilizando el código detallado en el Anexo G, el valor estimado de H para el índice Merval entre Enero de 1988 y Julio de 2009 es de 0,80. Se ha constatado que dicho método coincide con el obtenido manualmente, por lo menos para algunos períodos y segmentos.

El exponente de Hurst coincide con los encontrados para otros índices bursátiles. Por ejemplo, la estimación para el índice S&P500 en el período de Enero de 1950 a Julio de 1988 posee un valor de 0,78 mientras que para el índice MSCI (Morgan Stanley Capital International) de Alemania entre Enero de 1959 y Febrero de 1990 el valor encontrado es de 0,72.

Si bien el valor encontrado para H es uno cercano al que se hubiese esperado al comienzo del estudio, no se ha podido estimar lo que se conoce en este tipos de análisis como el “ciclo”. Dicho valor es el período para el cual el valor estimado de H empieza a tender a 0,50. En el caso del S&P500 el ciclo se estima cercano a cuatro años (48 meses) y en el MSCI de alemania 5 (60 meses), pero no se pudo observar este fenómeno en la serie analizada. Una posible explicación es el período utilizado fue cercano a dos décadas, mientras que los otros fue de tres. Esto produjo que los valores encontrados para $\log(R/S)_\tau$ para grandes valores de intervalo τ hayan sido calculados mediante un solo segmento.

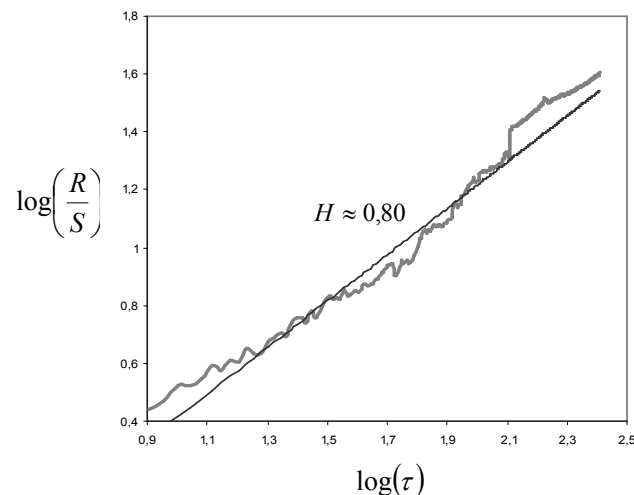


Figura 5.1

5.1.3 Menos *normal* de lo que uno creería...

Hasta aquí se discutió únicamente los detalles técnicos de cómo estimar H y qué valor se encuentra para el índice Merval, pero poco se dijo de su significado e implicaciones. En el Capítulo 2 se mencionó el origen del método, su historia y su relación a la dimensión fractal, aunque no se explicó detenidamente el alcance de la idea.

Para entender qué significa un proceso con memoria o sesgo y como puede surgir, a falta de una computadora a principios del siglo XX, Hurst utilizó un mazo de 52 cartas. A las mismas les asignaba un valor $(-1,+1,-3,+3,-5,+5,-7,+7)$ de tal forma que su distribución se asemeje a una normal.

Para simular un paseo aleatorio sesgado, Hurst comenzaba por mezclar el mazo, cortar y anotar el número correspondiente a la carta observada. Por ejemplo, supongamos que la carta era un $+3$. Hurst insertaría la carta nuevamente en el mazo y repartiría dos manos de 26 cartas, a las cuales denominaremos A y B. Dado que previamente había anotado $+3$, tomaría las tres cartas con mayor puntaje de B y las tres cartas con menor puntaje de A y las intercambiaría de mazo. Dicho cambio produciría un sesgo positivo en A. Finalmente colocaría un joker en el mazo A, y volvería a mezclar. Ahora Hurst usaría dicha mano como la generadora de números aleatorios hasta que se topara con el joker. En dicho momento, volvería a mezclar las 52 cartas y comenzaría nuevamente.

Notablemente, a pesar de que las cartas estaban distribuidas siguiendo una distribución normal, dicho proceso produce, al igual que en muchos procesos naturales, un exponente de Hurst cercano a 0,7. El sesgo es producido por el componente aleatorio de la primera carta ($+3$) y el largo de la corrida proviene de la posición del joker en el mazo A. No es difícil suponer como podría producirse dicho sesgo en un mercado de capitales: los inversores comercian de acuerdo a las actuales

condiciones hasta que el arribo de información (equivalente al joker), cambia la tendencia y clima del mercado [Peters, 1994].

Según la teoría estadística, H debe valer 0,5 si la serie es un paseo aleatorio (aunque no necesariamente es un paseo aleatorio si vale dicho valor). Esto equivale a decir que el rango de desviaciones acumuladas debería crecer según la raíz cuadrada del tiempo, no obstante, los valores empíricos demuestran que los hace más rápido.

Muchas de las teorías de las finanzas modernas suponen que los precios reflejan toda la información disponible, es decir, los precios futuros sólo pueden quedar determinados por el arribo de nueva información. Esto es lo que se conoce como la *Teoría de la Cartera Eficiente*, y es necesaria para aplicar la *Teoría Central del Límite* a los mercados. Si bien se puede decir que algunas personas reaccionan impulsivamente al arribo de nueva información, muchos inversores esperan la confirmación de ciertos rumores y no reaccionan hasta que una tendencia se ha establecido.

Al igual que Hurst con sus cartas, se pueden “mezclar” los datos correspondientes a la serie del índice Merval y observar si efectivamente el mercado tiene memoria. Dicha mezcla simplemente cambiará el orden de la variación de precios, sin embargo su distribución permanecerá constante.

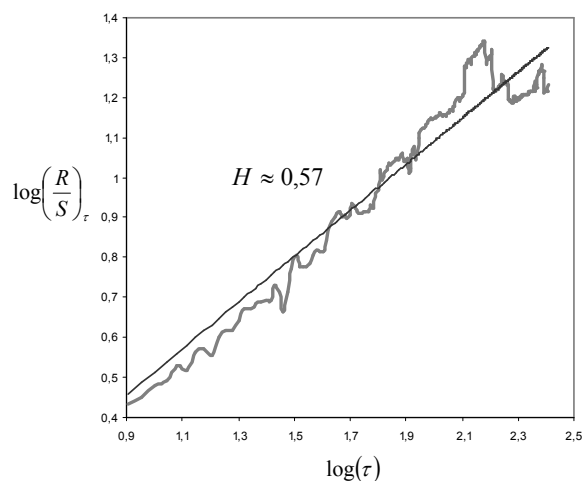


Figura 5.2

El valor encontrado para dicha configuración es cercano a 0,5, lo cual indica que el orden particular en el que se producen los precios es importante. De ser verdaderamente aleatorios, no debería haber diferencia entre la serie ordenada y la desordenada. De esta forma se puede afirmar que el índice Merval es una serie con memoria que no sigue un camino aleatorio. Esto ya ha sido confirmado para otros índices bursátiles, aunque no se ha podido encontrar ningún estudio que analice al índice porteño. Es probable que este estudio sea uno de los primeros en aplicar dicha a técnica en el país y sería positivo si puede servir como puntapié para otros análisis de la misma naturaleza. Las consecuencias de este hecho son significativas, ya que

La variación de precios especulativos.

quedaría en duda la utilización de gran parte de las herramientas utilizadas por el ámbito financiero.

7.1 La variación de precios especulativos en el índice Merval.

En el ambiente de la música se acostumbra, a modo de tributo u homenaje del artista, interpretar una canción suya. Dicha práctica es conocida popularmente como *cover*. Es con tal espíritu que se buscará seguir los pasos de Benoit Mandelbrot en su *paper* de 1963 titulado *The variation of certain speculative prices* [Mandelbrot, 1997]. El trabajo original analizó los precios correspondientes al mercado del algodón en Estados Unidos en distintos períodos y, como se mencionó con anterioridad, dicho estudio representó la primera crítica al modelo Gaussiano propuesto originalmente por Bachelier. Análogamente, se presentará un estudio similar aplicado al índice Merval y, de esta forma, se le rendirá tributo al original matemático mientras que al mismo tiempo se le dará un aire porteño al trabajo. Asimismo se podrá revisar en detalle, por medio de un ejemplo concreto, varios de los conceptos expuestos en el Capítulo 2.

5.2.1 Marco Teórico.

El estudio realizado por Mandelbrot se enfoca principalmente en la distribución de la variación de precios especulativos. La teoría clásica sostiene que es aproximadamente Gaussiana, es decir, sigue una distribución normal. El argumento esgrimido se basa en que si las variaciones de precios de transacción a transacción son variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas con varianza finita y que, si dichas transacciones están distribuidas uniformemente en el tiempo, consecuentemente los cambios diarios, mensuales y anuales estarán normalmente distribuidos. Esto se debe a que estos últimos son simplemente la suma de las variaciones de transacción a transacción.

A pesar de que los datos empíricos sugieren que estos siguen *aproximadamente* a la distribución normal, Mandelbrot propone que las discrepancias encontradas en los extremos de la distribución son razón suficiente como para desafiar la teoría del paseo aleatorio. Su alternativa propone:

- Las varianzas de las distribuciones empíricas se comportan como si fueran infinitas.
- Las distribuciones empíricas se ajustan mejor a la familia de distribuciones conocidas como estables de Lévy (ver sección 4.1.3).

Dado que el conflicto entre la distribución de Gauss y la estable de Lévy radica básicamente en el valor del exponente α , la elección entre ambas hipótesis puede determinarse, en teoría, por medio de la estimación de dicho parámetro. Si bien no es posible probar hipótesis estadísticas acerca de estimadores de α , ya que no existen expresiones explícitas para la distribución de probabilidades para $\alpha \neq 1, 2, 0.5$, Lévy probó que sus distribuciones tienden en sus extremos a:

$$P(x > u) \rightarrow cte \cdot u^{-\alpha} \quad u \rightarrow \infty ; \quad P(x < u) \rightarrow cte \cdot |u|^{-\alpha} \quad u \rightarrow -\infty .$$

(5.9)

Tomando logaritmo en ambas expresiones tendremos:

$$\begin{aligned} \log P(x > u) &\rightarrow -\alpha \log u + cte & u > 0 \\ \log P(x < |u|) &\rightarrow -\alpha \log |u| + cte & u < 0 \end{aligned}$$

(5.10)

Esto significa que si se grafica en un gráfico logarítmico doble $P(x > u)$ y $P(x < u)$ frente a $|u|$, la pendiente de la curva tenderá a $-\alpha$ a medida que $|u|$ tienda a infinito.

5.2.2 Método y Resultados.

De manera similar al estudio realizado por Mandelbrot, se analizarán dos series de tiempos $S(t)$ correspondientes al índice Merval: una abarcará los datos diarios en el período 1996-2010 (a) y la otra los datos mensuales durante el período 1988-2009 (b). Cada uno de estos períodos abarcará la variaciones positivas (1) y las negativas (2).

De esta forma obtendremos cuatro curvas en el que las abcisas representarán $\log |u|$ y las ordenadas las siguientes frecuencias relativas:

$$\begin{aligned} (1a) \quad &\log Fr(\log S(t + un \text{ dia}) - \log S(t) > u) \\ (2a) \quad &\log Fr(\log S(t + un \text{ dia}) - \log S(t) < -u) \\ (1b) \quad &\log Fr(\log S(t + un \text{ mes}) - \log S(t) > u) \\ (2b) \quad &\log Fr(\log S(t + un \text{ mes}) - \log S(t) < -u) \end{aligned}$$

(5.11)

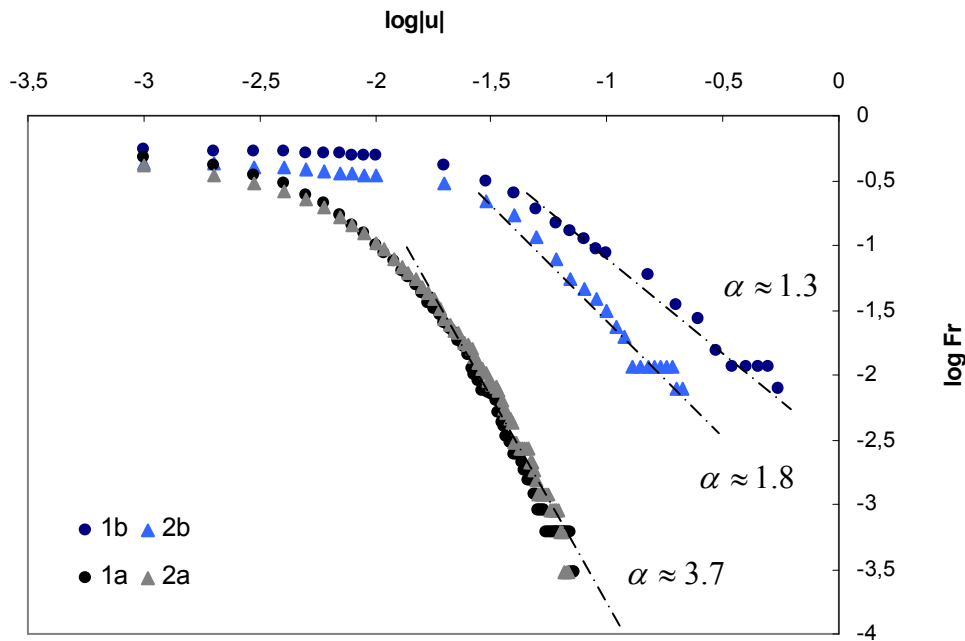


Figura 5.3

5.2.3 Conclusiones

Originalmente, el estudio referente al índice Merval procuraba ser un *cover* de la obra original publicada en 1963, es decir, a priori se esperaba que los datos revelen conclusiones similares a las alcanzadas por el original matemático y, por ende, refuercen su argumento. No obstante, frente a la luz de las curvas obtenidas, será necesario indagar profundamente en varios aspectos teóricos y buscar otros trabajos que hayan podido toparse con similar problemática. La principal desventaja con la que corría Benoit a principios de los años sesenta era una escasa base de datos junto con una capacidad computacional prácticamente nula, bajo los estándares de hoy en día. En la actualidad, con una planilla Excel y acceso a Yahoo Finance, se puede visualizar con mayor facilidad, practicidad y rapidez cualquier serie de datos que hubiese sido impensable hasta hace unas pocas décadas.

A primera vista se destacan dos discrepancias con la obra original: en primer lugar, las curvas no son paralelas entre sí y, en segundo lugar, las correspondientes a las variaciones diarias poseen un valor de α superior a 2. Estos dos hechos contradicen profundamente las bases sobre la cual Mandelbrot desarrolla su argumento.

El hecho que las curvas mensuales sean distintas a las diarias contradice la hipótesis de estabilidad de Lévy para la suma de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas. Esto se debe simplemente al hecho que los retornos para largos períodos de tiempo son la suma de varios retornos para cortos períodos de tiempo, y por ende, deberían tener el mismo exponente α .

El hecho que la pendiente de las curvas correspondientes a las variaciones diarias sea superior a 2 significa que se está por encima del límite de estabilidad de Lévy, lo cual

también contradice el trabajo de Mandelbrot, ya que su argumento se basa en el uso de dicha familia de distribuciones.

A pesar de todas las contradicciones encontradas con respecto al *paper* de 1963, dichas conclusiones se alinean con estudios posteriores hechos por Lux, Cont, Le Baron y Stanley en el que se encuentran valores de α superiores a 2 y diferencias para datos con distinta escala de tiempo. Asimismo, se han encontrados valores de α cercanos a 3 en índices tales como el S&P500, el Nikkei 225 y el Hong Kong Seng. Tales estudios parecen confirmar los resultados obtenidos y contradecir los de Mandelbrot [Voit, 2005] [Mantegna, Stanley, 2000]. Es por esto que se debe buscar algún marco teórico que permita explicar dichas “anomalías” ya que, por el momento, no parece existir una opinión única en el tema. A pesar de esto, todos los estudios parecen coincidir en el hecho de que la distribución de la variación de precios no es Gaussiana. El autor carece de las herramientas adecuadas para seguir indagando en el tema, aunque considera que los resultados alcanzados permiten sumar evidencia para continuar con dicha investigación.

5.3 Análisis de un modelo con agentes.

“Los hombres, se ha dicho, piensan como una manada; se verá que se vuelven locos como una manada, aunque solamente recuperan el sentido lentamente, y de a uno a la vez.”

- Charles Mackay.

Hasta aquí se ha estudiado por medio del análisis de series de tiempo el comportamiento de un mercado real bajo el marco teórico desarrollado por Benoit Mandelbrot. En dichos estudios se buscó proporcionar evidencias que apoyaran la hipótesis de una memoria de largo plazo en los mercados y rechazaran la hipótesis de un mercado eficiente que, como se comentó, implicaría una distribución normal de la variación de precios. Esta sección, por el contrario, se avocará a la exploración de un modelo computacional, con agentes racionalmente limitados interactuando entre sí, que permita proporcionar un entendimiento de cómo surgen algunos de los comportamientos encontrados en los ejemplos reales. Tal enfoque está íntimamente relacionado al modelo de Ising en dos dimensiones (Capítulo 3) y al estudio de influencias sociales. El método involucrará el análisis estadístico de los datos producidos artificialmente junto con una investigación detallada del código.

El modelo a estudiar fue proporcionado por Carlos Pedro Gonçalves a la biblioteca comunitaria de Netlogo bajo el título *Artificial Financial Market Model* (2003) [Gonçalves, 2003]. Si bien existen otros modelos de mayor complejidad, la elección por este estudio se debe al hecho que Netlogo presenta un código más intuitivo y adecuado para personas que se inician en este tipo de estudios, lo cual representa una enorme ventaja a la hora de utilizar el modelo e inferir conclusiones.

5.3.1 Influencias y marco teórico.

Las principales influencias del autor a la hora de construir el código fueron la hipótesis del mercado coherente, de Tonis Vaga, y el modelo propuesto por Johansen, Anders, Ledoit y Sornette en su *paper* titulado *Crashes as Critical Points* (2003). Este último analiza cómo la imitación masiva de agentes especuladores puede explicar endógenamente la aparición de burbujas y *crashes* en los mercados. No obstante, el autor aclara que su modelo rompe con las dicotomías clásicas tales como la diferenciación entre fundamentalistas y especuladores (Sección 4.4.3) o entre agentes informados y desinformados. Gonçalves asume que todos los agentes son racionales e informados, aunque sólo de manera parcial y, a diferencia de otros modelos, son heterogéneos. Asimismo, el uso de un parámetro de acoplamiento distinto para cada agente hace que la psicología individual, el comportamiento masivo y las noticias se relacionen de manera no trivial en la dinámica de la simulación. Los datos generados por el modelo poseen varias de las características propias de los mercados reales, tales como exceso y agrupación de volatilidad, junto con memoria a largo plazo.

Uno de los objetivos principales del modelo es, por medio del empleo de agentes heterogéneos, desafiar la hipótesis de la eficiencia en los mercados. Tal como se

comentó con anterioridad, dicha hipótesis sostiene que los precios reflejan toda la información concerniente al valor de su activo subyacente. Como consecuencia de esta suposición la teoría trae apareada una distribución normal para la variación de precios, hecho que, como se ha visto, subestima la ocurrencia de eventos extremos.

A diferencia de los agentes homogéneos y puramente racionales que utiliza la hipótesis de la eficiencia en los mercados, los de Gonçalves poseen un “sentimiento” el cual los lleva a comprar o vender. Dicho sentimiento es bueno o malo dependiendo no sólo del arribo de información, sino el de sus conexiones más cercanas junto con una variable idiosincrática, la cual permite “interpretar” ambos factores. La facilidad para ser “contagiado” por los sentimientos de los agentes inmediatos aumenta si las noticias coinciden con el movimiento del mercado. Tal estructura de influencias es análoga al modelo de Ising en dos dimensiones. Cabe aclarar que si los agentes fueran los correspondientes a la hipótesis de la eficiencia en los mercados, el sentimiento formado dependería únicamente del arribo de información. Sin embargo, se debe notar que los agentes correspondientes al modelo propuesto no son irracionales ya que el arribo de información se ve reflejado, al menos en parte, en el precio del activo.

El enfoque utilizado por Gonçalves se aproxima a la filosofía de la hipótesis de mercado coherente desarrollado por Vaga en 1990 y desarrollado en su libro *Profiting from Chaos* (1994) [Vaga, 1994]. Según el autor, el mercado, al igual que un fluido o un congestionamiento vehicular, puede ser explicado como un sistema fuera de equilibrio en donde ocurren cambios de fase. Este concepto es detallado en el *Financial Analyst Journal*:

“Desde el punto de vista de Vaga, el mercado puede existir en dos estados: aleatorio y eficiente u ordenado y con tendencia. El primero es el descrito en los libros de texto. Calcula los precios de los activos en base a toda la información disponible. La relación entre riesgo y retorno es descrita por el modelo CAPM de Sharpe. El segundo estado, llamado coherente por Vaga, es visto en los ‘bear and bull markets’, en donde el mercado se mueve con más fuerza en una determinada dirección, ignorando cualquier técnica convencional de valuación.”

Su obra ha sido influenciada en gran medida por un *paper* de 1975 del físico alemán Hermann Haken titulado *Cooperative Phenomena in Systems far away from Thermal Equilibrium and in Non Physical Systems*.

5.3.2 Descripción del modelo.

La primera suposición del modelo se basa en que el arribo de información se encuentra distribuido según una distribución normal de media 0 y desvío estándar 1.

$$I(t) \sim N(0,1) \quad (5.12)$$

La interpretación cualitativa de dicha información se comporta de forma binaria, en donde +1 significa un sentimiento positivo mientras -1 significa un sentimiento negativo. De esta forma, tendremos:

$$Q(t) = 1 \text{ si } I(t) > 0 \text{ y } Q(t) = -1 \text{ si } I(t) \leq 0 \quad (5.13)$$

Para construir la formación del sentimiento $S(t)$ de los agentes, se deben presentar cuatro supuestos:

- Los agentes poseen una racionalidad acotada.
- Los agentes son heterogéneos.
- Cada agente se encuentra influido por cuatro vecinos próximos.
- La red de influencias se ubica dentro de una grilla bidimensional, es decir, la topología de interacciones forma un toro.

El hecho de que los agentes estén racionalmente acotados conlleva como consecuencia límites en la interpretación de información. Estas limitaciones no vienen necesariamente del acceso a diferentes fuentes de información, ya que todos los agentes acceden a la misma información, sino de limitaciones consideradas intrínsecas del individuo. Esto se debe a que, a diferencia de los agentes neoclásicos, se asume que los agentes crean mapas mentales del mundo a su alrededor, y estos mapas varían de individuo a individuo. El sentimiento de cada agente esta compuesto de manera distinta y cada uno reacciona de manera distinta a la información. No obstante, el arribo de nueva información no es la única fuerza impulsando la variación de precios, sino que se debe tomar en consideración la comunicación social de sentimientos entre agentes. Tomando en cuenta las anteriores suposiciones se describirá la ecuación que determina el sentimiento de cada agente.

$$S_i(t) = \text{sign} \left(K_i(t) \sum_{\text{vecinos}} S_j(t) + \alpha_i Q(t) + \varepsilon_i(t) \right) \quad (5.14)$$

K_i Facilidad del agente i para ser contagiado por el sentimiento de sus vecinos j .

α_i Nivel de sensibilidad del agente frente al significado cualitativo de las noticias

$Q(t)$ Significado cualitativo de las noticias.

$\varepsilon_i(t)$ Término de ruido con media y desvío estándar a ser controlado por el usuario.
Dicho término corresponde la interpretación idiosincrática propia del agente.

La determinación del precio es sencillo ya que el logaritmo del mismo es simplemente la suma del último período con la suma del sentimiento de todos los agentes dividida el número total de agentes. El retorno logarítmico $R(t)$, consecuentemente, es la diferencia entre precios logarítmicos subsecuentes, es decir, la suma de los sentimientos dividido el número total de agentes.

$$\log p(t) = \log p(t-1) + \frac{\sum_i S_i(t)}{N} \quad (5.15)$$

$$R(t) = \frac{\sum_i S_i(t)}{N} \quad (5.16)$$

Ahora resta definir únicamente la regla que determine la facilidad de los agentes de ser “contagiados” por el sentimiento de sus vecinos. Si un movimiento de mercado positivo (o negativo) coincide con el significado cualitativo de la noticia $Q(t)$, la facilidad del agente a ser contagiado es llevada a su facilidad base a ser contagiado sumada a una cantidad equivalente al valor de los retornos. De lo contrario, la facilidad de ser contagiado es llevada a la facilidad base restada a una cantidad equivalente a los retornos. Es decir, hay una mayor probabilidad de burbujas o *crashes* de haber una coincidencia entre noticias y tendencia de precios aunque, de no ocurrir, el comportamiento en masa se ve reducido.

$$\begin{aligned} R(t) > 0 \wedge Q(t) > 0 &\Rightarrow K_i(t) = K_i^{BASE}(t) + R(t) \\ R(t) > 0 \wedge Q(t) < 0 &\Rightarrow K_i(t) = K_i^{BASE}(t) - R(t) \\ R(t) < 0 \wedge Q(t) < 0 &\Rightarrow K_i(t) = K_i^{BASE}(t) - R(t) \\ R(t) < 0 \wedge Q(t) > 0 &\Rightarrow K_i(t) = K_i^{BASE}(t) + R(t) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Tales coincidencias y discrepancias son las causantes, en gran medida, de la oscilación de estados calmos y desorganizados a estados de alta volatilidad y de comportamiento en masa.

5.3.3 Utilización y análisis del modelo.

El modelo diseñado en Netlogo (*Figura 5.4*) dispone de cuatro parámetros a ser usados por el usuario junto con tres gráficos correspondientes al logaritmo del precio, los retornos y la volatilidad. Asimismo, semejantemente al modelo de Ising en dos dimensiones (Capítulo 3), se presenta por medio de una grilla bidimensional el estado de cada agente: rojo si su sentimiento es negativo y verde si es positivo.

El objetivo principal del autor es replicar por medio del modelo la dinámica encontrada en mercados reales, es decir, exceso y agrupación de volatilidad junto con evidencia que desafíe la hipótesis de eventos independientes. Este estudio, consecuentemente, se realizó en el conjunto de parámetros que mejor asemejan dicho comportamiento. Para comprender la elección de los parámetros se realizará una explicación cualitativa de los mismos.

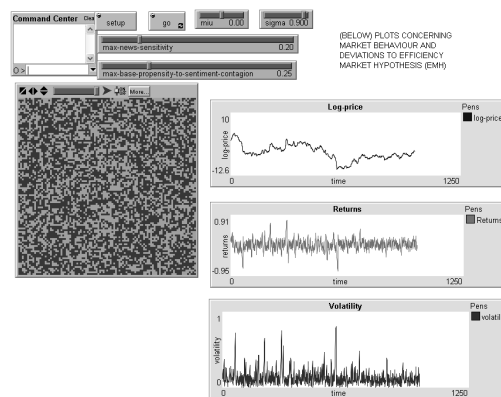


Figura 5.4: vista del tablero de comando del modelo. [Gonçalves, 2003]

La variable de ruido idiosincrático $\varepsilon_i(t)$ es controlada por la media y su desvío, las cuales son catalogadas como *miu* y *sigma* en el panel de control. Tal como se comentó en la sección anterior, dicho parámetro representa uno de los tres que controla el sentimiento $S(t)$ de los agentes. Dado que este término idiosincrático es propio de cada agente y no está relacionado a otra variable, el aumento de su desvío implicará que existirá un mayor ruido en el sistema. Esto puede ser entendido por medio de una analogía en donde los agentes representan partículas y dicho ruido la temperatura.

Siguiendo esta analogía, si se aumenta la “temperatura” habrá menor influencia de la interacción entre agentes, en este caso, el término de contagio $K_i(t) \sum_{\text{vecinos}} S_j(t)$, el cual a su vez puede ser visto como las “fuerzas intermoleculares”. El parámetro que se observa en el tablero de control llamado *max base propensity to sentiment contagion* representa el valor máximo que puede tomar el $K_i^{BASE}(t)$ de cada agente.

Por último, el término correspondiente a la sensibilidad a las noticias $\alpha_i Q(t)$, puede ser pensado como una influencia global externa al sistema. El parámetro presentado en el tablero de comando llamado *max news sensitivity* representa el valor máximo

que puede tomar el nivel de sensibilidad α_i de cada agente. Cabe destacar que dicho mapa mental sirve como ayuda a la interpretación y no debe tomarse en un sentido literal, no obstante, salvando las distancias, es extremadamente útil para imaginar el funcionamiento del sistema a un nivel global.

De acuerdo a esta explicación, para cada nivel de ruido $\varepsilon_i(t)$ existirá un conjunto de valores máximos de α_i y $K_i^{BASE}(t)$ en cada agente para los cuales se observará un comportamiento similar. De aquí en más, cuando se refiera a este conjunto de parámetros, se hará mediante el vector (*sigma - max news sensitivity - max base propensity to sentiment contagion*). El estudio realizado se situó en el conjunto de parámetros (0,90 – 0,15 – 0,35). Manteniendo el mismo nivel de ruido, este tipo de comportamiento es similar en un rango de 0,20 a 0,40 para las últimas dos variables.

Análisis del modelo (0,90 – 0,15 – 0,35)

Tal como se comentó con anterioridad, si el modelo replica el comportamiento real de los mercados debe demostrar evidencias de agrupamiento de volatilidad, exceso de variaciones extremas y evidencia contrarias a la hipótesis de eventos independientes. Cada uno de estos factores fue tomado bajo consideración y, tras un análisis detallado de los datos, se puede concluir que el modelo presenta todas estas características. De hecho, resulta sorprendente que un modelo de semejante sencillez replique el comportamiento de un sistema tan complejo como el de un mercado financiero. Dicha concordancia parece confirmar la visión propuesta por la pléctica, en el que partiendo de simples relaciones se puede llegar a observar una dinámica compleja.

Para proporcionar evidencia que demostrara un exceso de variaciones extremas se recurrió, semejante al análisis de Mandelbrot referente a la variación de precios especulativos, al uso de un gráfico logarítmico doble. A continuación se presenta la frecuencia relativa acumulada frente a las variaciones del precio logarítmico (*Figura 5.5*). Al igual que en la sección anterior, dicha frecuencia puede ser expresada mediante:

$$Fr(\log S(t) - \log S(t-1) > u) \quad (5.18)$$

Asimismo, en el mismo gráfico, se representa la distribución acumulada de la curva normal teórica obtenida a partir de la muestra del modelo. Si bien para variaciones pequeñas dicha curva teórica se ajusta a los datos observados, se observa que para las variaciones extremas la misma subestima la frecuencia relativa de dichos eventos. En secciones anteriores se comentó cómo los eventos críticos siguen, para distintas variables, leyes de potencia y como se encuentra una cantidad importante de este tipo de comportamiento en distintos procesos naturales.

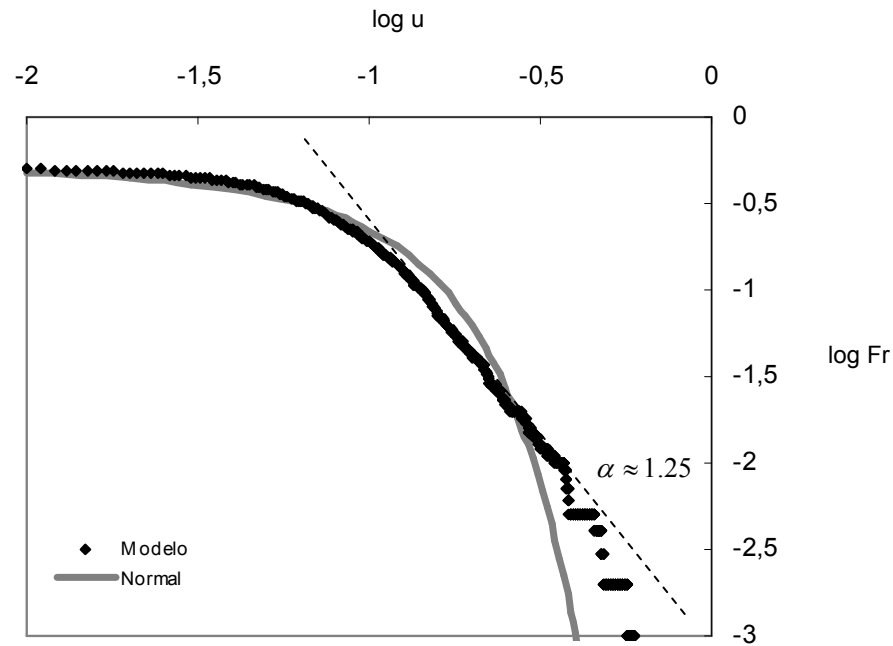


Figura 5.5

Estos hechos se alinean a su vez con el hecho de que las distribuciones de Lévy tienden a distribuciones de potencia (para $\alpha < 2$ ¹) en sus extremos. Si se observa el gráfico, se evidencia como los datos reales tienden a una recta con pendiente -1,25, la cual se ubica dentro del régimen de estabilidad de Lévy. No obstante, en sus extremos, los datos parecen ubicarse en una posición media: los eventos extremos ocurren con mayor frecuencia del que se esperaría de una distribución normal aunque con menor de lo que se esperaría de una ley de potencia. Este mismo comportamiento fue encontrado para el S&P500 por R. N Mantegna y publicado en la revista Nature en 1995 (Figura 5.6) [Mantegna, Stanely, 2000] [Voit, 2005].

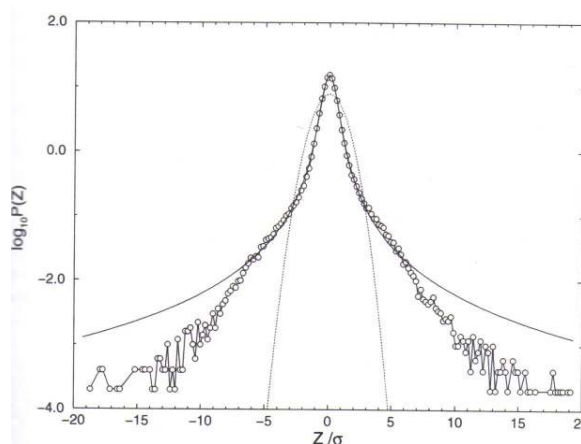


Figura 5.6. [Mantegna, Stanely, 2000]

¹ Recordar que α se refiere al proceso de Lévy visto con anterioridad en el Capítulo 3 y no a la variable del modelo, la cual representa la sensibilidad al arribo de noticias. La misma aclaración vale a la hora de referirse a la pendiente del gráfico logarítmico doble.

Para comprender la dimensión de la discrepancia para eventos extremos entre la curva normal teórica y los datos del modelo se proporcionará un ejemplo práctico. Mientras que la frecuencia relativa prevista por la curva teórica para eventos con $u > 0,57$ es de $5,8 \times 10^{-6}$, la encontrada para los datos reales es de 1×10^{-3} . Esto significa que, si cada período en el modelo equivale a un día, mientras la curva teórica predice que ocurrirá un cambio de precios de un factor mayor a 3.7 una vez cada poco menos que cinco siglos, en la realidad esto ocurrirá cada tres años. No es necesario aclarar que tal subestimación no es una que pueda obviarse fácilmente.

Otro hecho observado que contradice la hipótesis de mercado eficiente es la variación de los segundos momentos. En teoría, los mismos deberían estabilizarse en un valor fijo aunque, observando el comportamiento real, se observa que varían notablemente. El método consistió en calcular los segundos momentos para 33 intervalos j subsiguientes de 30 variaciones del logaritmo del precio. De esta forma, siendo $S(t)$ la serie de tiempo de los precios, los segundos momentos M_j^2 se calcularon de la siguiente forma:

$$M_j^2 = \frac{\sum_{t=30(j-1)+1}^{30j} (\log S(t+1) - \log S(t))^2}{30} \quad (5.19)$$

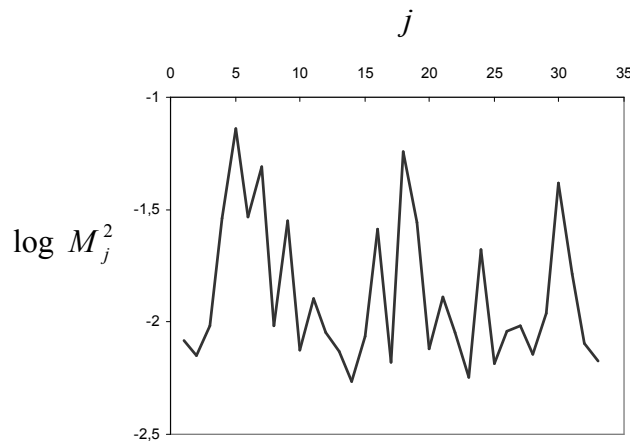


Figura 5.7

El mismo comportamiento fue encontrado para distintos precios especulativos por Mandelbrot en su *paper* titulado *The variation of the prices of cotton, wheat, railroad and some financial rates (1967)* [Mandelbrot, 1997]. El hecho de que exista variación en el segundo momento es razón suficiente para cuestionar la conveniencia de la utilización del desvío estándar en el análisis técnico.

Por último, al igual que el análisis de rango reescalado R/S hecho para el índice Merval, se buscó estimar el valor del exponente de Hurst para el modelo. De acuerdo a lo comentado en el Capítulo 2, para satisfacer la hipótesis de independencia el mismo debe poseer un valor cercano a 0,5. No obstante, al igual que la mayoría de mercados observados en la vida real, el valor encontrado para el modelo fue mayor a 0,5.

Además de refutar la hipótesis de independencia, dicho valor de $H \approx 0,8$ (Figura 5.8) confirma perfectamente el hecho teórico de que $\alpha = 1/H \approx 1,25$. Este mismo hecho fue encontrado para distintos mercados.

Habiendo confirmado la existencia de agrupamiento y exceso de volatilidad junto con evidencia que desafíe la suposición de eventos independientes, se puede afirmar que el modelo replica excelentemente muchas de las “anomalías” que presentan los mercados en la vida real. Muchas de las conclusiones alcanzadas para el conjunto de parámetros (0,90 – 0,15 – 0,35) son válidas para otras combinaciones. Estas otras posibilidades serán comentadas a continuación aunque sin la profundidad con la que se analizó en esta sección. El motivo de tal enfoque se debe a que se buscará interpretar el funcionamiento del modelo a un nivel más global y, en lo posible, tratar de proporcionar explicaciones para el comportamiento encontrado.

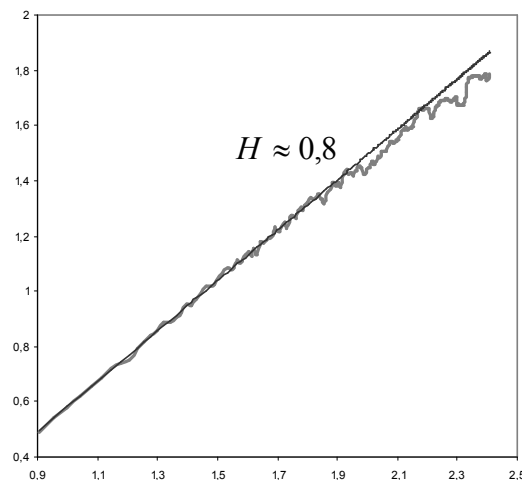


Figura 5.8

Fases

Si bien el análisis anterior se basó en las similitudes entre el modelo y la realidad, resultará interesante observar el comportamiento del mismo en sus extremos. Lógicamente se perderá realismo, no obstante se podrán observar ciertos procesos o dinámicas que no resultarían evidentes bajo la combinación de los parámetros anteriores. Partiendo de estos casos extremos, será posible entender de una manera

más intuitiva cómo es que puede surgir el comportamiento observado con anterioridad. En un caso extremo se eliminó el ruido idiosincrático, se redujo notablemente la sensibilidad a las noticias y se aumentó la interacción entre agentes ($0 - 0,03 - 1,00$). Tal cambio es equivalente a variar el “estado” del sistema. Esto se debe a que la diferencia de intensidad entre las distintas influencias externas e internas es lo suficientemente grande como para que cambie la estructura. Esto es análogo al hecho de que, al bajar la temperatura del agua, las fuerzas intermoleculares son lo suficientemente fuertes como para formar una estructura sólida tridimensional.

En este modelo, bajo los parámetros comentados, la influencia entre agentes pasa a ser lo suficientemente grande como para formar una estructura bidimensional. Dicha estructura no es sólida en un sentido literal, ya que fluctúa levemente; no obstante, la misma se mantiene por varios períodos. Cuando el modelo se encuentra en tales condiciones, presenta un comportamiento ordenado y de baja volatilidad. En ciertos instantes puntuales dicha estructura parece romperse para dar lugar a un comportamiento desorganizado y de alta volatilidad, es decir, se produce un cambio de fase. La diferencia entre el valor estimado de $H \approx 0,95$ para el estado organizado y de $H \approx 0,75$ para el desorganizado parece confirmar este hecho. En el modelo ($0 - 0,03 - 1,00$) se observa una fluctuación entre ambos estados hasta que finalmente se estabiliza en uno polarizado, estructurado y de baja volatilidad. Este proceso puede observarse en la *Figura 5.9*, en donde se grafica $R(t)$ junto con imágenes correspondientes a la grilla bidimensional para distintos períodos.

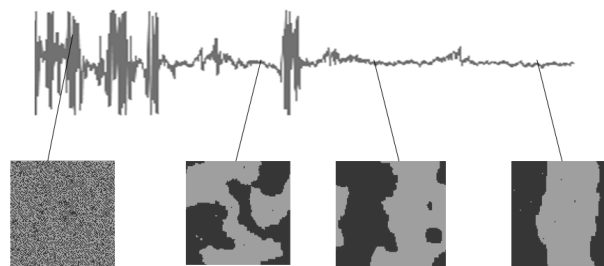


Figura 5.9

Si se aumenta levemente la sensibilidad a las noticias, el modelo ($0 - 0,05 - 1,00$) mostrará características similares al anterior aunque, a diferencia del mismo, los períodos estables serán más cortos y los inestables más largos. Esto ocurre hasta el punto en donde ya no se observan períodos organizados y de baja volatilidad. A partir del modelo ($0 - 0,09 - 1,00$) es donde ocurre dicha transición. La *Figura 5.10* muestra los retornos para valores del segundo parámetro en 0,05 0,07 y 0,09 respectivamente.

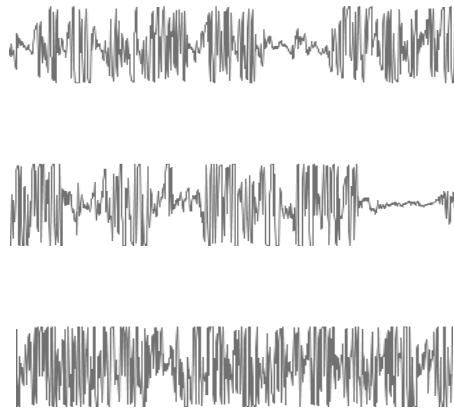


Figura 5.10

¿Qué ocurre entonces para que se produzcan semejantes transiciones de períodos organizados a desorganizados? La explicación a dicho fenómeno radica en el hecho que la influencia externa, el término correspondiente a la sensibilidad a las noticias, es lo suficientemente grande como para superar las influencias entre agentes y llevar el sistema hacia un extremo. Esto genera una pérdida de la estructura previa y produce que el sistema fluctúe de manera desorganizada y similar a la del conjunto de parámetros $(0 - 0,09 - 1,00)$. Esta fluctuación de alta volatilidad se detiene una vez que la influencia externa no ha sido lo suficientemente extrema como para permitir la formación de nuevas estructuras. La estructura polarizada final que se observa en la *Figura 5.9* es lo suficientemente estable como para que ninguna fluctuación externa sea capaz de alterarla. El equivalente en la vida real de dicha transición es el arribo de una noticia lo suficientemente importante como para que el comportamiento macro del mercado cambie.

Otra observación interesante es el hecho de que mientras el sistema se encuentra en su fase organizada, la dirección de cambio se mantiene relativamente constante. Es decir, dado que la balanza entre pesimistas y optimistas perdura en el tiempo, la tendencia del mercado se mantiene. Dicho comportamiento puede ser visto como una burbuja. La *Figura 5.11* muestra el precio logarítmico y los retornos para la corrida del modelo $(0,30 - 0,15 - 1,00)$.

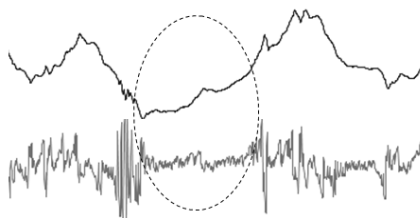


Figura 5.11

A medida que se aumenta el ruido idiosincrático comienza a volverse menos evidente la transición entre un estado y otro. Aunque siguen existiendo estructuras, las mismas son más difusas y cambiantes. Asimismo los períodos desorganizados no son tan bruscos. Esto es similar a lo que ocurre entre el vapor y el agua una vez que llegan al punto crítico (Capítulo 3). La *Figura 5.12* en la que se presenta la variación del precio logarítmico y una imagen del modelo (0,5 – 0,15 – 1,00) demuestra este hecho.

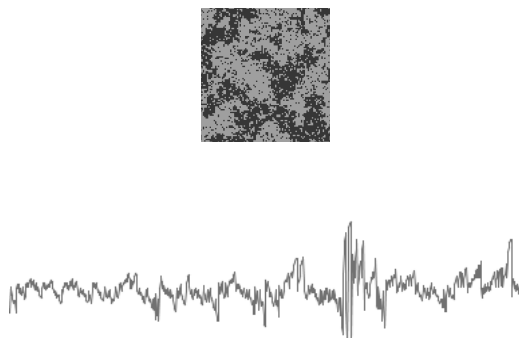


Figura 5.12

5.3.4 Conclusiones generales acerca del modelo

Tras el análisis exhaustivo para los parámetros (0,90 – 0,15 – 0,35) y las observaciones hechas para distintas combinaciones de variables, se puede afirmar que el modelo es extremadamente útil para entender el funcionamiento de los mercados. Esto se debe no sólo al hecho de que existe un conjunto de parámetros que reproducen varias de las características encontradas en los mercados reales, sino que, dada la simpleza de su armado, es posible comprender su funcionamiento con mayor profundidad. Resulta interesante el hecho de que a partir de unas cuantas simples reglas se pueda reproducir, con gran exactitud, el comportamiento de un mercado. Este hecho sugiere que la dinámica que observamos en el mundo real, después de todo, puede que no sea tan compleja como pensamos, sino que depende de tratar de descifrar su comportamiento a una menor escala. La hipótesis de un mercado eficiente es simplemente una hipótesis y existe una gran cantidad de pruebas empíricas que lo refutan. Sus suposiciones son dudosas, por no decir más, y se queda sin palabras a la hora de explicar los hechos reales.

En sus extremos, el modelo permite entender la proposición de la hipótesis del mercado coherente, en donde el mercado fluctúa entre distintos estados. A medida que se varían los parámetros esta dinámica comienza a reproducir varios hechos que vemos en la vida real. El marco teórico sobre el cual se construyen los modelos basados en agentes permite proporcionar explicaciones endógenas a muchos factores que de otra manera quedarían como simples anomalías o justificaciones *a posteriori*. Es evidente que uno no puede contentarse con modelos como el recién visto ya que restan varias “vueltas de tuerca” hasta producir modelos teóricos que puedan ser aceptados por la comunidad científica y profesional. Sin embargo, se considera que el

enfoque aplicado, a pesar de ser cualitativo por momentos y no ofrecer métodos prácticos a ser usados en el ámbito profesional, se encuentra bien encaminado ya que no se contenta con simples suposiciones.

El enfoque aplicado en este modelo puede ser extendido a otros más complejos que empiecen a replicar a un nivel más detallado aspectos tales como la estructura de conexiones (redes libres de escala y mundos pequeños), psicología ante la toma de decisiones (*behavioural economics*), dinámica de la difusión de noticias y rumores, evolución de estrategias y otros aspectos que exijan el relevamiento de varios datos empíricos a un nuevo nivel.

La variación de precios especulativos.

CAPITULO 6

CODA

Hasta aquí se ha recorrido un largo camino desde que se plantearon las primeras preguntas en el Capítulo introductorio: olvidadas teorías expuestas a principios de siglo, paseos aleatorios, copos de nieve, precios del algodón, distribuciones de riqueza, ríos, diques, terremotos, imanes, fluidos, viejas teorías termodinámicas, pilas de arena, leyes de potencia, cambios de fase, redes sociales, turbulencia, autómatas celulares, sociedades artificiales, evolución, programación, agentes, sistemas de partículas y otros tantos conceptos, ideas y analogías.

De la misma forma en que una persona puede pasearse por un museo, el lector fue encontrándose con teorías novedosas y hasta extrañas, construyendo así, a medida que avanzaba en el texto, un mapa mental de lo que representa un mercado y cómo este funciona. Es probable que se hayan destruidos conceptos anteriores, prejuicios y hasta un sentimiento de seguridad con el marco teórico establecido. Sobre estas ruinas, el edificio que comienza a edificarse no posee el mismo grado de certeza absoluta, ya que todavía se encuentra en construcción. Debido a esto, lo que alguna vez fueron respuestas en un mundo acotado, ahora pasarán a ser dudas, en otro mucho más amplio y con una infinidad de posibilidades. Si a esta altura, éste es el sentimiento que prevalece, se considera que la presente tesis habrá cumplido su objetivo. No ha sido la intención buscar desorientar al lector, sino todo lo contrario: se ha buscado crear una sensación de asombro y misterio frente a este organismo creado por el ser humano. Es precisamente este asombro el que nos obligará a buscar las respuestas. Tal como dice Einstein:

“Lo más bello que podemos experimentar es el lado misterioso de la vida. Es el sentimiento profundo que se encuentra en la cuna del arte y de la ciencia verdadera. Aquel a quién esta sensación le es ajena, quien ya no pueda detenerse para maravillarse y permanecer en total admiración, está muerto: sus ojos se cerraron.”

Muchas preguntas que pudieron haber ido surgiendo a lo largo del trabajo, ya sea acerca de la teoría aceptada (Anexos A y B) como de la planteada a lo largo de la tesis, se han intentado responder en el Anexo D.

6.1 Una visión *aproximadamente correcta*.

El nuevo edificio teórico que emerge no presenta el mismo grado de certeza del antiguo. Lo que alguna vez fue una visión de mercados eficientes, agentes racionales y equilibrios económicos, con una descripción de la variación de sus precios

especulativos claramente estipulada, hoy día es una conjunción de teorías y observaciones empíricas sin un único hilo conductor. Esto no debe ser visto como una desventaja, sino todo lo contrario: nos encontramos en un punto histórico en el estudio de las ciencias sociales, en donde está todo dispuesto como para que se produzca lo que se conoce como un *cambio de paradigma*.

En el pasado, dichos cambios eran producidos, por lo general, por una nueva posibilidad tecnológica que permitía la observación de fenómenos hasta entonces desconocidos. Al igual que el telescopio permitió por primera vez la observación precisa de los cuerpos celestes, posibilitando así el desarrollo de teorías por Galileo, Kepler y Newton, entre otros, hoy día contamos con una nueva herramienta: la cantidad de datos proporcionada por Internet, en dónde es posible observar en tiempo real el comportamiento agregado de millones de personas, es el equivalente al telescopio del siglo XVII. Este mar de datos, junto con una capacidad de procesamiento y simulación impensada hace unos pocos años, permitirá medir el comportamiento del ser humano con una precisión jamás vista. Es sólo cuestión de tiempo hasta que emerja un campo teórico sólido que permita describir y explicar el comportamiento agregado del ser humano. El análisis de la variación de precios especulativos estará incluida dentro de este campo teórico más amplio. Es posible que el mismo, junto con la economía, termine perteneciendo a un área de las “ciencias de la complejidad”. Por el momento, hasta que aparezca una disciplina establecida, se buscará proporcionar explicaciones *aproximadamente correctas* a la dinámica encontrada en la variación de los precios especulativos.

Un mercado representa un sistema adaptativo complejo en el que agentes financieros compiten, aprenden y se adaptan en la búsqueda de un recurso escaso: mayores retornos. Este sistema está íntimamente relacionado a otro, el de las noticias, el cual a su vez es un sistema adaptativo complejo en el que agentes compiten por otro recurso escaso: la información. El sistema económico, para fines prácticos, puede considerarse externo a estos dos. Al igual que las redes sociales y otros ejemplos de redes libres de escala, tanto el sistema financiero como el de noticias pueden incluirse en este tipo de estructuras. Como se ha visto, dichas estructuras producen leyes de potencia para distintas variables tales como conexiones por nodo. De esta forma, no sería extraño que la dinámica producida por la interacción entre ambos sistemas produjera, para distintas variables, distribuciones que se comportaran en sus extremos como leyes de potencia. La agregación de las mismas, según la teoría del límite propuesta por Gnedenko y Kolmogorov debería tender a una distribución estable de Lévy. No obstante, debido a que se trata de sistemas reales, en el que existen limitaciones físicas, las estructuras libres de escala encontradas en la vida real dejan de producir leyes de potencia a partir de cierta magnitud. Esto genera consecuentemente que la dinámica exhibida por los precios posea la misma limitación. Asimismo estas estructuras cambian con el tiempo, lo cual impediría la suposición de distribuciones idénticamente distribuidas, y el manejo de varias aplicaciones estadísticas. Esto podría llegar a explicar tanto el truncamiento de las distribuciones de la variación de precios a partir de cierta escala, como su inestabilidad.

El modelo estudiado en el Capítulo 5 presentaba varias de estas características, aunque de manera simplificada. La red social de influencias entre agentes financieros

no representaba una topología libre de escala, sino un toro. Similarmente, la influencia de las noticias estaba representada por un ruido Gaussiano externo al sistema. No obstante, debido a su comportamiento crítico, y al hecho de que poseía limitaciones físicas tales como la dimensión del toro, se pudo observar varias de las características observadas en los mercados reales. El estudio de estos modelos es esencial para comenzar a entender de manera realista el comportamiento de los mercados. El entrecruzamiento entre observación y modelación permitirá ir perfeccionando un marco teórico que permita la predicción del comportamiento del sistema a un nivel *macro*. De la misma manera que aunque no se puede predecir la posición de una partícula, es posible medir la entropía del sistema. Este marco teórico no podrá predecir la suba o baja de una acción, pero podrá medir variables tales como polarización, presencia de rumores, etc. Si bien es un ideal que no se sabe si es factible realizar, es uno que vale la pena seguir, ya que, como dijo Keynes: “es preferible estar aproximadamente correcto, que exactamente equivocado”.

6.2 El camino por delante.

Jure Leskovec, uno de los jóvenes más prometedores en el estudio de la dinámica de redes, nacido en 1980, obtuvo su B.Sc en Computer Science de la Universidad de Liubliana en 2004 y en 2008 su Ph.D. en Computational and Statistical Learning de Carnegie Mellon. Sus intereses principales de investigación son la minería de datos (*data mining*) a gran escala y la modelización de redes de información, su evolución y la difusión de la información, influencias y virus a través de las mismas. Actualmente trabaja como profesor adjunto en el departamento de Computer science en la Universidad de Stanford.

Se considera que la metodología novedosa, creativa y práctica con la que ataca ciertos temas es la que se necesita en las ciencias sociales, la economía y las finanzas. Como puede observarse de su descripción, el investigador no es ni físico, ni economista, ni sociólogo; no obstante parece estar abordando temas de neto interés social. Su trabajo titulado *Meme-tracking and the detection of the News Cycle (2009)* [Leskovec, 2009] analiza el ciclo de las noticias por medio de la aplicación de la dinámica de redes a la minería de datos de los principales blogs y canales de noticias durante las elecciones presidenciales de los Estados Unidos en 2008.

La metodología empleada en su estudio se basa en seguir la aparición de citas textuales en la blogosfera de la red. Dichas citas representan los *memes*, lo cuales representan la fusión entre *theme* (tema) y *gene* (gen) en inglés, en referencia a la mutación y difusión de ideas. La blogosfera contiene a medios reconocidos, tales como The New York Times y CNN, junto con otros pequeños blogs irrelevantes. Del primero de Agosto al treintiuno de Octubre de 2008 el científico esloveno obtuvo 90 millones de documentos de 1.65 millones de sitios, representando 390 GB de información. Su análisis se basa en modelar la dinámica de la difusión de estas noticias con el objetivo de poder cubrir la mayor cantidad de noticias con el mínimo número de páginas. Incluso puede medir por dónde es que aparecen las primeras noticias, ya sea en blogs o periódicos. En la *Figura 6.1* se ve cómo inicialmente algunos blogs individuales captan las noticias, después son seguidos por los medios

principales y finalmente el resto de los blogs termina el ciclo de las noticias. La Figura 6.2 representa el resultado final, en donde el ciclo de las noticias es representado en un gráfico con los distintos *memes* en diferentes colores.

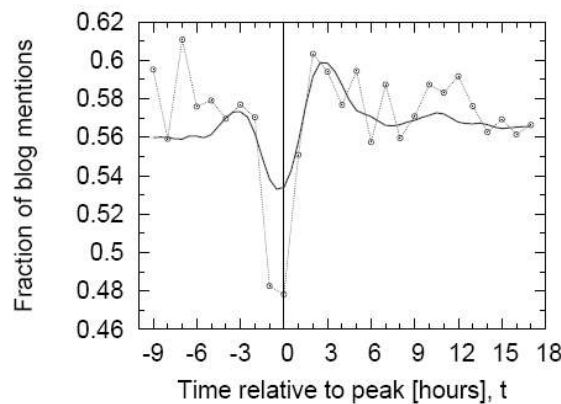


Figura 6.1. [Leskovec, 2009]

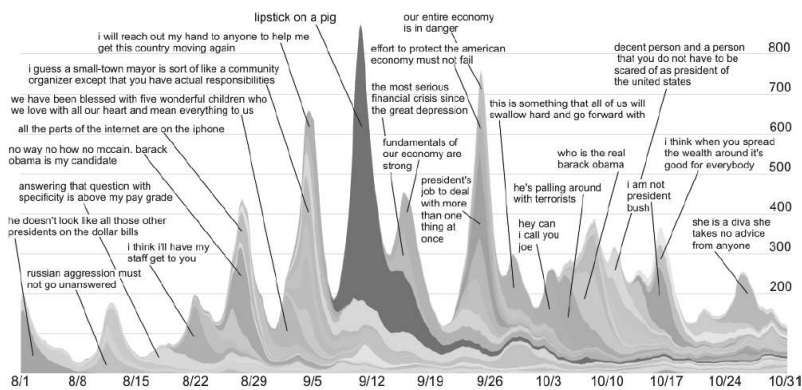


Figura 6.2. [Leskovec, 2009]

La relación con el sector financiero es obvia: por primera vez se posee datos en tiempo real de cómo se transmite la información y se difunde en el sector de las noticias. Sería muy interesante aplicar la misma metodología a un mercado o acción en particular y comparar el ciclo de las noticias junto con la variación de los precios del activo en cuestión. A esta altura, no debería sorprendernos el hecho de que la distribución de frecuencias acumuladas de ocurrencia de estos *memes* siga una ley de potencias. En la Figura 6.3 se muestran tres curvas: ocurrencias de frases, ocurrencia de frases sin repetición o variación y la ocurrencia de la frase “lipstick on a pig”, la frase más popular durante todo el muestreo. Se puede observar que mientras las primeras dos se encuentran próximas al régimen de estabilidad $\alpha < 2$, en donde se empieza a observar varianza finita, es decir, las colas no son tan pesadas, la tercera se ubica en el régimen en donde la esperanza tanto como la varianza son infinitas. Esto significa que ciertas frases populares son mucho más pegadizas de la que esperaríamos de observar la distribución agregada. Asimismo se puede confirmar la

idea de que la influencia de las noticias se comporta, al igual que los mercados, hasta cierta dimensión de variaciones, según una ley de potencias.

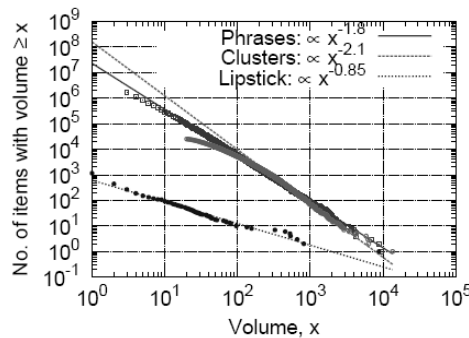


Figura 6.2. [Leskovec, 2009]

6.3 Ideas para nuevos estudios.

El presente estudio introdujo una variedad de temas novedosos, tanto en lo referente a la variación de los precios especulativos como en los sistemas adaptativos complejos. A medida que se iba avanzando en la tesis era posible encontrar ideas interesantes y creativas, aunque no eran siempre factibles de aplicar debido a la necesidad de seguir un hilo conductor y a la limitación de tiempo. La mayor parte de la tesis está dedicada a la necesidad de establecer un nuevo marco teórico que permite explicar el comportamiento de los mercados. Debido a esto, sería muy provechoso que se utilizara esta tesis como disparador de nuevas ideas. A continuación se presentan temas posibles investigaciones a ser desarrolladas.

- El número $\varphi = 1.61803\dots$, también conocido como *la sección dorada*, y su relación a la psicología (Lefebvre, Adams-Webber, Benjafield) y los mercados. Resulta lógico que si los mercados demuestran este número, la psicología de los agentes que forman esta dinámica también lo hagan.
- Medición de la entropía en un autómata celular. Posibilidad de extenderlo a modelos con agentes y descripciones sistemas reales.
- Mundos pequeños. Construcción y simulación.
- Dinámica de redes. Propagación y detección de rumores y virus.
- Mecánica estadística. Aplicación a sistemas sociales, económicos y financieros.
- Algoritmos genéticos. Aplicaciones prácticas.
- Modelización basada en agentes. Utilización de programas tales como Netlogo o Swarm para modelizar un sistema real.
- Teoría del caos en los mercados. Medición del exponente de Lyapunov para distintos índices.

- Equilibrios económicos: realidad y ficción.
- Distribución truncada de Lévy. Ajuste a distintos índices.
- Behavioural economics. Relación a los mercados.
- Complejidad de una economía. Aplicación de redes a la relación entre distintos sectores de una economía y la posibilidad de crecimiento futuro. Explicación posible para el desarrollo o no de ciertas economías y la necesidad de la apertura de mercados. (Ricardo Hausman-The building blocks of economic complexity)
- Entropía de Shannon. El flujo de la información en los mercados.
- Leyes de potencia en la naturaleza.
- Cambios de fase en los mercados. Análisis del 11 de Septiembre de 2001 en distintos mercados mundiales.
- Mundos pequeños. Utilización de Facebook para realizar mediciones empíricas.
- Densidad espectral de una serie de tiempo.

ANEXO A

HISTORIA DE LA ESPECULACIÓN

"Los precios de las acciones parecen haber alcanzado un nivel permanentemente alto."

- Irving Fisher, 17 de Octubre de 1929.

"Puedo calcular el movimiento de las estrellas, pero no la locura del hombre."

- Sir Isaac Newton, 1720.

La especulación, a diferencia de que se cree popularmente, no es una invención reciente del capitalismo, sino que representa una cualidad propia del ser humano, o por lo menos a partir de que este empezó a congregarse en grandes ciudades. El mercado, con sus períodos de euforia y depresión, burbujas y crashes, constituye un pilar básico de cualquier civilización, canalizando el comercio de bienes, servicios e información entre distantes regiones y culturas. Crisis financieras recientes, tal como la de 2008 o el lunes negro de 1987, no fueron consecuencia de la sofisticación y el uso de la PC, de la misma manera que las guerras no son consecuencia de la invención del tanque y la pólvora. Dichos fenómenos son intrínsecos de la naturaleza humana y, si bien pueden cambiar las formas y los métodos, el fondo permanece igual que hace siglos.

A.1 Historia de burbujas, manías y crisis especulativas.

A.1.1 La especulación en la Antigüedad, la Edad Media y comienzos de la Era Moderna.

Uno de las primeras evidencias de la existencia de mercados especulativos se encuentra en el período antiguo [Chancellor, 1999]. Durante la existencia de la República Romana en el segundo siglo a.c. el sistema financiero había desarrollado varias de las características modernas: los mercados florecían, gracias a la posibilidad de transferir propiedad otorgada por la ley romana, existían los préstamos con interés, el intercambio con monedas extranjeras, y eran posibles pagos entre regiones distantes por medio de cheques emitidos por los bancos. El concepto de créditos se había desarrollado junto con formas primitivas de seguros para naves del comercio

marítimo. Roma, al igual que Amsterdam, Londres y New York en siglos subsiguientes, se caracterizó por una acumulación de capital sin precedentes.

En latín, la palabra *speculator* describía la labor de un centinela, el cual debía estar atento (*speculare*) al peligro. No obstante, el especulador financiero, en la antigüedad, era llamado *quaestor*, que significa buscador. Colectivamente, el grupo de especuladores financieros, los cuales se reunían en el foro, eran llamados *graeki* o griegos, debido a su mayoría de origen helénico y sentido discriminativo de la palabra.

El estado romano terciarizaba varias de sus funciones, desde la recolección de impuestos a la construcción de templos, a unas sociedades capitalistas llamadas *publicani*. Al igual que las corporaciones modernas, los *publicani* eran personas jurídicas separadas de sus integrantes y su propiedad era dividida por medio de *partes*, o acciones. Las mismas poseían administradores, presentaban resultados (*tabulae*) y llevaban a cabo reuniones esporádicas con sus accionistas. Las acciones eran divididas en dos tipos: las de mayor relevancia obtenida por grandes mercaderes, llamadas *socii*, y otras más pequeñas, llamadas *particulae*. Lamentablemente hoy día no existen registros de los precios de estas *partes*, no obstante se sabe que las mismas variaban en valor. Asimismo este tipo de comercio estaba impregnado profundamente en la sociedad de aquella época. La siguiente cita de Polybius ratifica dicha noción:

Alrededor de Italia, una inmensa cantidad de contratos, muy numerosos para especificar, son otorgados por los censores para la construcción, la reparación de edificios públicos y para la recaudación de ganancias en ríos navegables, puertos, minas y campos; en definitiva, cada transacción bajo el control del Imperio Romano es entregada a estos contratistas. Todas estas actividades son llevadas a cabo por la gente, y no existe un alma, podría decirse, que no posea algún tipo de interés en estos contratos y las ganancias obtenidas a partir de los mismos.

Otro hecho que presenta similitudes entre el mundo antiguo y el moderno fue la introducción de una moneda sin valor intrínseco más allá del aval del estado. Tras su aparición en el tercer siglo d.c. las crisis cambiarias pasaron a ser moneda común.

Con la caída del Imperio Romano, durante la Edad Media, la especulación se vio reducida tanto por razones prácticas como ideológicas. El sistema feudal reemplazó varias de las herramientas financieras del Imperio, tales como el uso de una moneda por el pago en especias. Por otra parte, la ideología eclesiástica del momento, siguiendo las ideas Santo Tomas de Aquino y reviviendo la noción Aristotélica de “un precio justo”, mantenía una postura contraria a la usura y a la búsqueda de ganancias por medio del comercio. Estas ideas perduran hoy en día, y son usadas por políticos, muchas veces sin darse cuenta, para condenar las acciones de los especuladores.

Con el crecimiento del comercio entre Oriente y Occidente hacia fines de la Edad Media, comenzó a gestarse un nuevo período en el que ciudades estratégicas, tales como Venecia, pasaron a acumular, de manera similar con la que Roma lo hizo en la antigüedad, grandes cantidades de riqueza. Fue en este mismo período del quattrociento en que el arte, la ciencia, la arquitectura, el comercio y la especulación florecieron. Si bien la gente cristiana no podía practicar la usura por razones religiosas, no existía tal impedimento para los judíos, tal como retrata Shakespeare en

El mercader de Venecia por medio del personaje Shylock. En las ciudades-estado de Venecia, Florencia, Pisa, Verona y Genova se comerciaban las deudas emitidas por el Estado y, al igual que en el Imperio Romano, la recolección de impuestos era realizada por sociedades de personas llamadas monti, compañías cuyo capital era dividido en acciones comerciables (loughi).

Muchas de las ciudades de Europa del Norte gozaban de una excepción de muchas de las restricciones impuestas al comercio y la especulación. En ferias realizadas en ciudades tales como Leipzig, Paris, Lent y Antwerp todo tipo de activos eran comerciados en una suerte de proto-mercados de los que estamos familiarizados hoy en día. Con el descubrimiento de America, muchas de las ciudades nórdicas tomaron mayor preponderancia y desplazaron a Venecia, Florencia y otras ciudades Mediterráneas del epicentro del comercio Europeo. A mediados del siglo XVI la ciudad de Antwerp estableció la primera bourse, nombre proveniente de la congregación de comerciantes en el Hôtel des Bourses en la ciudad próxima de Brujas. A partir de este período comienzan a haber más registros acerca de la variación de los activos y distintas crisis, tales como la suspensión de pagos de la deuda en 1557 por el Rey Enrique II de Francia.

A.1.2 La manía de los tulipanes.

De especial interés resulta el estudio de lo que se conoció en Holanda, en un período que abarca de 1585 a 1650, como la manía de los tulipanes [Sornette, 2003]. El tulipán, como flor cultivada, fue importado desde Turquía a Europa Occidental y es mencionado por primera vez alrededor de 1554. La *Figura A.1* es una pintura de la variedad *Semper Augustus* corresponde al catálogo conocido como *The Great Tulip Book*. Debido a su exclusividad y riqueza de colores, rápidamente se transformó en un símbolo de status para la alta sociedad. Durante el crecimiento del mercado, los participantes no generaban ganancias en el proceso específico de producción de esta flor de origen oriental. Los tulipanes actuaban como medio de especulación y su precio quedaba determinado por la riqueza de los participantes en el mercado.

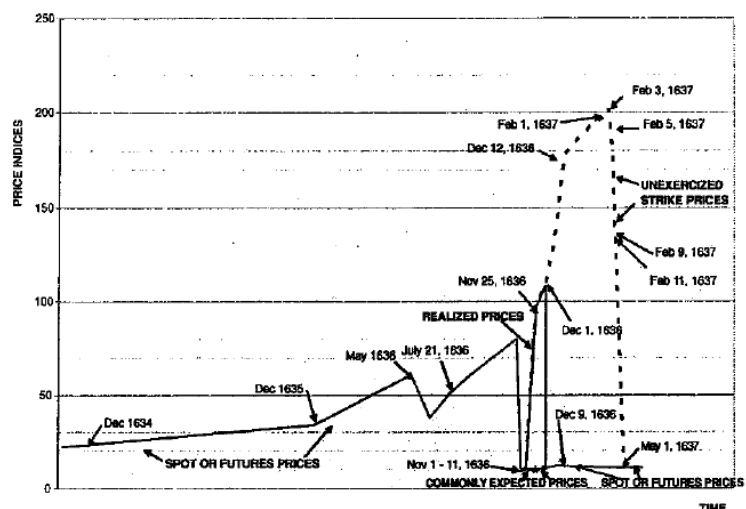


Figura A.1 (izq.): la variedad de tulipán conocida como *Semper Augustus*.

Figura A.2 (der.): la variación de los precios comerciados en el período 1634-1637.

No queda claro si su crecimiento trajo nuevas inversiones o si las inversiones dispararon su crecimiento, aunque lo que es seguro es que a medida que la burbuja crecía, más y más gente fue atraída al negocio. Eventualmente, el precio del tulipán perdió medida con cualquier otro tipo de bienes y servicios. Algunos bulbos de una extraña variedad eran comerciados a un valor equivalente a decenas de miles de dólares de hoy en día. Previo al *crash*, el comercio de tulipanes era visto como el negocio de la época y cualquier opinión acerca de que su precio estaba sobrevaluado era recibida con escepticismo.

Finalmente, el 4 de Febrero de 1637 la posibilidad de que los tulipanes se tornaran invendibles se volvió realidad. Un grupo de floristas y productores, en una decisión que fue ratificada más tarde por la legislación holandesa, anunciaron que todos los contratos establecidos posteriormente al 30 de Noviembre de 1636 y antes de la reapertura del mercado en la primavera, poseían provisiones que no se encontraban en los contratos originales. Las nuevas provisiones establecían que los compradores no estaban obligados a comprar los tulipanes al precio contractual, aunque debían compensar a los productores mediante un porcentaje fijo de dicho valor. Es decir, el contrato, que podía ser descripto como un futuro moderno, pasaría a ser una opción de compra con una prima a determinar por el Gobierno. Debido a este hecho no debe sobreexagerarse la magnitud del crash, ya que existió una notable diferencia entre los precios ejercidos y los contractuales (*Figura A.2* [Thompson, 2006]). De todas formas, tras un año de negociaciones, el precio final establecido por la legislatura de Haarlem terminó siendo el 3.5% del precio contractual establecido entre el 30 de Noviembre de 1636 y la primavera de 1637. Muchos historiadores consideran este episodio como la primera crisis financiera de la era moderna.

A.1.3 La burbuja de South Sea.

Otro crash histórico es conocido como *The South Sea Bubble* [Sornette, 2003]. Londres, a principios del siglo XVIII, al igual que Amsterdam durante el siglo XVII, era el centro político, económico y social de un nuevo imperio en rápida expansión. En 1711 la empresa marítima *South Sea* obtuvo el monopolio de todo el comercio con los nuevos mercados de America del Sur. A cambio, la compañía debía asumir parte de la deuda nacional en la que Inglaterra había incurrido durante la guerra de la sucesión española. Cuando Inglaterra y España reanudaron las hostilidades en 1718, cualquier posibilidad de ganancia a corto plazo fue eliminada por completo. Sin embargo, lo que realmente interesaba a los especuladores eran las posibilidades de ganancias futuras, las cuales, podía ser argumentado, presentaban oportunidades increíbles una vez finalizado el conflicto.

El período de principios del siglo XVIII, gracias al crecimiento del mercantilismo y el comercio a nivel global, es recordado también por el desarrollo y sofisticación de las finanzas internacionales. En 1719 los directores de la *South Sea Company* pretendían imitar la manipulación del crédito público desarrollada por John Law en Francia mediante *The Missisipi Company*, a la cual había sido entregada el monopolio del comercio con Norte America. Law había sido cómplice en la manipulación del precio de sus acciones, y los directores de la *South Sea Company* pretendían seguir sus

pasos. En 1719 los directores presentaron la propuesta de asumir la totalidad de la deuda pública del gobierno Británico. El 12 de Abril de 1720 la oferta fue aceptada. Inmediatamente, la compañía comenzó, por medio de nuevas suscripciones combinadas con noticias favorables a la reanudación del comercio con España, a inflar sus acciones de manera artificial. Esto no solo atrajo a inversores de todo el país sino incluso de países como Holanda, aumentando así las presiones inflacionarias.

Las acciones aumentaron de Enero a la primavera de ese año y, dado el éxito financiero de esta empresa de comercio marítimo, otras compañías similares aparecieron repentinamente aprovechando el clima especulativo del momento. Muchas eran legítimas, no obstante, hubo una cantidad de sociedades fraudulentas, las cuales no poseían ningún negocio que soportara su capitalización más que el de aprovecharse de la credulidad de la gente. Muchas empresas crearon burbujas, grandes y chicas, mediante alguna forma de comercio marítimo o emprendimiento con el nuevo mundo. Además de las compañías de *South Sea* y *Missisipi*, existían otras cuyo negocio principal, por ejemplo, era el desarrollo de la pesca en Groenlandia o la importación de nogales desde Virginia. Quizá, más allá de los mencionados proyectos, que si bien existían en papel, eran de dudosa aplicabilidad práctica, había otros aún más intangibles. Por ejemplo, una empresa que cotizaba en bolsa, anunciaba que era “una compañía para llevar a cabo un proyecto de grandes beneficios, aunque nadie ha de saber lo que es”. Si bien hoy día tal empresa podría parecer irrisoria, el lector debe recordar que durante la burbuja .com de fines del milenio existían proyectos que, salvando las distancias, poseían prácticamente la misma filosofía etérea. De manera similar, el otorgamiento de hipotecas a personas sin crédito y sin necesidad de anticipos durante el armado de la crisis hipotecaria posee la misma cualidad irracional.

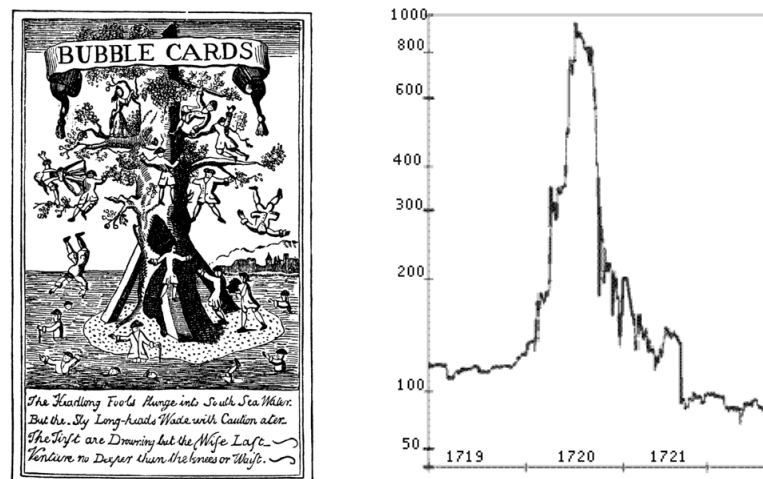


Figura A.3 (izq): una de las cartas publicadas por Thomas Bowles en 1720 [Bowles, 1720]
Figura A.4 (der): la variación del precio de la acción de *South Sea* entre 1719 y 1722.

Debido a la proliferación de todo tipo de compañías fraudulentas que dañaban la reputación de *South Sea*, el 11 de Julio de 1720 el gobierno Británico, bajo presión de sus directores, redactó una ley que exigía que toda empresa que cotizara en bolsa

debía tener un estatuto real. Una vez implementada, gracias a la confianza inyectada al mercado, las acciones de *South Sea* se dispararon. Mientras a fines de febrero del mismo año la acción cotizaba en £175, a fines de marzo había subido a £380 y a fines de abril a £520. Con la implementación de la nueva ley, la acción escaló a valores de alrededor de £1000, una barrera psicológica para el mercado (*Figura A.2*).

Con el nivel de confianza estirado al máximo, junto con rumores de venta, la burbuja explotó en unos pocos meses. Miles de libras, obtenidas con mucho sudor y hasta endeudamiento, habían sido evaporadas. Los directores intentaron crear una nueva burbuja pero fracasaron: para septiembre la acción había retrocedido a £135. En la *Figura A.3* se presenta uno de los naipes, en metáfora de la proximidad entre la especulación financiera y las apuestas, de la caricatura satírica publicada por Thomas Bowles en 1720. En la imagen se observan hombres de negocio trepando a un árbol de la especulación, y de ahí zambulléndose al agua. La inundación representa los excesos de la especulación y cómo aquellos hombres incautos se ahogan en ella.

A.1.4 El *crash* del '29.

El *crash* más presente en el inconciencia colectivo es el de 1929, ya que todavía quedan unas pocas personas que vivieron la burbuja de los años locos y existe mucha documentación con respecto a este período. Tras la Gran Guerra y la pérdida de poderío del Imperio Británico, Estados Unidos comenzó a posicionarse como la próxima potencia mundial. Si bien ya no existían nuevos mundos por conquistar, la maquinaria capitalista de un país que se había mantenido mayormente ajeno a la guerra tuvo la oportunidad única de invadir al viejo mundo mediante sus productos, servicios y crédito. Tal como retratan Hemingway y Fitzgerald por medio de sus novelas, esta fue la época en la que los americanos, con sus dólares y cultura del consumo, desembarcaron en las grandes ciudades europeas. La era del jazz, el cine, los automóviles, la radio y otros tantos productos de consumo masivo caracterizaron a este período.

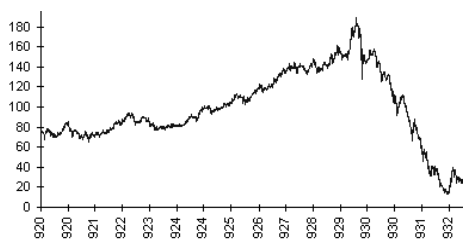


Figura A.5 (izq.): la variación del índice Dow Jones entre 1920 y 1932.



Figura A.6 (der): Fotografía de Wall Street durante el día conocido como "jueves negro".

Otro fenómeno con el que se identifican los años locos fue la especulación financiera. La bolsa, sobre todo en Wall Street, pasó a formar parte de la vida diaria de la mayoría de los estadounidenses, ya que muchos se endeudaban para no perderse de formar parte en este éxito seguro que auspiciaba la modernidad. El panorama de endeudamiento interno, por parte de los estadounidenses, externo, por parte de las naciones europeas, y de sobreproducción mundial, se mantuvo durante toda la década del veinte. En los últimos cinco años previos al desplome bursátil, el promedio Industrial Dow Jones había incrementado cinco veces su valor original. Previo al *crash*, existía un sentimiento de confianza generalizado en el porvenir de la economía mundial, y ninguno de los expertos previó un colapso de semejante magnitud. Famosos economistas, tales como Irving Fischer (cita introductoria) realizaron comentarios que marcarían sus carreras.

Finalmente, sin previo aviso, un jueves 24 de Octubre de 1929 la bolsa perdió en un solo día el 9% de su valor original. Mientras la bolsa comerciaba alrededor de cuatro millones de acciones diarias, el día del desplome dicha cantidad se triplicó. El volumen de negociaciones fue tan grande que los teletipos de aquel momento corrieron con hasta noventa minutos de atraso. Este día es recordado como el jueves negro. Sin embargo, lo peor no había pasado ya que, durante la semana siguiente, el lunes y martes negro no tardaron en llegar: hubieron caídas del 12% y 13% respectivamente. La tendencia negativa continuo hasta julio de 1932, punto en que el mercado se ubicó 90% por debajo de su nivel máximo en septiembre de 1929 (*Figura A.5*). Sin embargo, aquel jueves negro de 1929 es recordado en todo el mundo como el comienzo de la Gran Depresión.

A.1.5 Otros episodios y consideraciones generales.

No hay escasez de este tipo de crisis financieras en la era moderna [Galbraith, 1990]. La Revolución norteamericana se pagó con billetes, conocidos popularmente como Continentales, emitidos por el Congreso de las trece colonias. Dicha moneda no poseía ninguna garantía visible, de ahí la expresión "*not worth a continental*". En la década de 1830 llegaron las reformas internas, las cuales comprendían básicamente las inversiones en canales de regadío y en carreteras. Este proceso estuvo acompañado por la emisión de vales bancarios que no tenían como garantía valor alguno. Este proceso terminó súbitamente en 1837. Mas tarde, en 1850, el Banco de Nueva Inglaterra se vio obligado a cerrar sus puertas, ya que poseía una deuda de medio millón de dólares y, como garantía, un activo de ¡87 dólares!

Con el fin de la Guerra Civil norteamericana llegó la prosperidad del ferrocarril, y un desplome subsiguiente en el año 1873. En 1907, con la ayuda del flujo de capitales británicos, ocurrió un evento similar, aunque esta vez las grandes entidades bancarias de New York pudieron evitar los daños y prejuicios. De manera similar a lo ocurrido con la compañía de South Sea en el siglo XVIII, los Hermanos Baring debieron ser asistidos por el Banco de Inglaterra para evitar una quiebra ocasionada por sus préstamos a la Argentina.

Mas recientemente se recuerda la insensatez de los fondos depositados en paraísos fiscales durante la década de 1970, el lunes negro de 1987, la crisis inmobiliaria en

Japón y los países nórdicos, el efecto tequila, el *default* ruso, la crisis asiática, la burbuja .com, un nuevo *default* argentino, y finalmente, la crisis hipotecaria y financiera de los Estados Unidos en 2008.

El sistema económico en el que vivimos es complejo y turbulento por naturaleza. La innovación y el progreso tecnológico, económico y social, el moral puede argumentarse, traen apareados, como consecuencia inevitable, la volatilidad. Desde la Revolución Agrícola, pasando por la Industrial y la Informática, han existido todo tipo de crisis causadas por la especulación y el comercio. No es una cuestión de si ocurrirá otra crisis, burbuja o manía; sino simplemente dónde, cuándo y durante cuanto tiempo ocurrirá. Ya sea mediante alguna tecnología novedosa, tal como las energías renovables, la nano-tecnología o la genética, un mercado prometedor y en crecimiento, tal como China, India o Brasil, o incluso algún *commodity*, como el petróleo o el oro, una burbuja se estará formando.

En los casos comentados con anterioridad parecen surgir ciertos rasgos comunes, los cuales se ven repetidos una y otra vez [Galbraith, 1990]. Por lo general, algún proyecto o producto novedoso, ya sean tulipanes en Holanda, oro en Louisiana o bienes inmobiliarios en Florida, llama la atención de algunos inversores y, consecuentemente, el precio del bien especulativo en cuestión aumenta su valor. Los bonos, terrenos, obras de arte o acciones, comprados en el presente valdrán aún más en el futuro. A medida que los precios aumentan, nuevos inversores son atraídos al negocio, asegurando así un nuevo incremento del activo comercializado. Cuanto más personas se ven atraídas, más aumenta el precio, generando así una especulación que se alimenta de sí misma. Este proceso, una vez reconocido, se torna evidente, sobre todo una vez que finalizó.

Por lo general existen dos tipos de actitudes que se observan en el período de auge. Por un lado se encuentran aquellos convencidos de que existe una nueva dinámica que garantiza que su inversión continuará aumentando en valor y esperan que se mantenga dicha tendencia, quizá indefinidamente. Por otro lado se encuentra otro grupo, más reducido en tamaño, que percibe o cree percibir el clima especulativo del momento. Entra para beneficiarse de la ola especulativa, y está convencido que su intuición particular le permitirá salirse antes de que el proceso termine.

Esta dinámica trae apareada, inevitablemente, una finalización. Asimismo, este desenlace no puede producirse suavemente sino que debe terminar de una manera abrupta. La gente que estaba navegando la ola decide que es momento de salir. Aquellas personas que esperaban que la tendencia se mantuviera indefinidamente ven sus ilusiones destruidas y deciden vender. De esta forma, el clima que una vez fue de optimismo generalizado, se torna en uno de pánico e histeria masiva: todos quieren vender. Esta caída trae la ruina para gran parte de la gente que participó en ella.

Visto a posteriori este proceso parece trivial, aunque durante la formación de la burbuja parecen haber sólidas evidencias que ratifiquen la dinámica especulativa. Las personas beneficiadas por el clima especulativo creen que sus ganancias son justificadas por su visión, y su entendimiento del mercado. Aquellos escépticos son tildados de pesimistas, de no entender la nueva situación, o incluso de estrechez de imaginación.

El comportamiento descrito es lo que se conoce como comportamiento en masa, y no existen escasez de ejemplos en la historia. La cita de Friedrich von Schiller [Galbraith, 1990] retrata este fenómeno a la perfección:

“Cualquier persona que toma como un individuo es bastante sensato y razonable. Como miembro de una multitud, inmediatamente se convierte en un tonto.”

A.2 El estudio de la variación de precios especulativos.

A pesar de la existencia de comportamientos en masa, burbujas y manías en los mercados, por lo general, este organismo creado por el hombre parece hacer un trabajo bastante bueno a la hora de colocar recursos en el sistema económico. Millones de transacciones son realizadas diariamente en el que grandes sumas son invertidas eficientemente entre un sinfín de negocios, desde el sector tecnológico al de *commodities*. Es un sistema en el que humanos y computadoras están conectados constantemente compitiendo por un recurso escaso. El sistema financiero global representa las arterias por donde fluye el capital necesario para mantener al sistema económico internacional en funcionamiento. Sin él, tal como se temió a finales de 2008, la compleja red de productos y servicios que representa la economía mundial simplemente no podría existir.

De esta forma se plantea la dicotomía entre el sistema financiero visto como un organismo que demuestra lo que se denomina como *inteligencia colectiva*, o la visión que representa von Schiller, la de un organismo de *estupidez colectiva*. Para ser justos, la tasa de café que tengo a mi lado requirió de la coordinación de un gran número de transacciones: desde la sociedad que cosechó el grano, la que lo comercializó desde algún país tropical, la que lo ubicó en la góndola, etc. Existe una infinidad de transacciones necesarias para que disfrutemos de la comodidad de bienes y servicios disponibles en una economía moderna, y si bien podemos no estar de acuerdo con muchas cosas, este sistema funciona mejor que ningún otro en la historia de la humanidad a la hora de invertir y utilizar capital.

A pesar de esta sofisticación que parece emerger a un nivel macro, el estudio de este organismo financiero se encuentra algo rezagado con respecto al de muchos otros sistemas naturales. No parece haber respuestas para muchos de los hechos observados en la realidad, ni un marco teórico que permita explicar su comportamiento y dinámica. Eventos históricos tales como las burbujas y *crashes* presentados anteriormente no poseen una explicación, más allá de simples anomalías o racionalizaciones posteriores. Según la teoría aceptada, jamás deberían haber sucedido; sin embargo, sucedieron y es probable que sigan ocurriendo en el futuro.

ANEXO B

UN ORIGEN REMOTO

“Cualquier hombre que aflija a la raza humana con ideas, debe estar preparado para verse incomprendido”

- H.L. Mencken

B.1 Louis Bachelier

Louis Jean-Baptiste Bachelier fue un hombre adelantado a su tiempo, y lamentablemente pasó desapercibido durante toda su vida. Nació en la ciudad portuaria de Le Havre el 11 de Marzo de 1870. Su padre se dedicó al negocio del vino y fue vicecónsul de Venezuela en Le Havre, mientras que su abuelo fue un banquero local. Con la muerte de sus padres a la temprana edad de diecinueve años Bachelier tuvo un brusco cambio en su vida: se vio obligado a abandonar sus estudios para dedicarse al negocio familiar, y poco después fue reclutado para servir en el ejército. Esto significó para el joven Louis apartarse del tradicional camino para el éxito académico en Francia, ya que al no poder cursar en uno de los *grandes écoles*, sólo pudo retomar tardíamente sus estudios a la edad de veintidós en la menos prestigiosa *Université de Paris*. Sin la preparación adecuada nunca pudo alcanzar un rendimiento destacado.

El 29 de Marzo de 1900, en la *Ecole Normale Supérieure de Paris* y frente a un Comité que incluía a Henri Poincaré, Louis Bachelier defendió su Tesis doctoral.

Debía aprobar dos instancias. La primera de ellas consistía en presentar oralmente un tema estándar indicado con anterioridad probando así el conocimiento y la capacidad de oratoria esenciales para cualquier doctorado. La exposición consistía en la mecánica de fluidos, y a pesar de ser la especialidad de Joseph Boussinesq, miembro del Comité, según el panel el joven francés demostró gran fluidez y una comprensión profunda del tema en cuestión.

La segunda instancia consistía en defender su Tesis de investigación titulada *Théorie de la Spéculation*. Cabe destacar que en los ámbitos académicos parisinos de principios del siglo XX dicha área de estudio no estaba precisamente de moda, a diferencia de otras tales como números complejos, teoría de funciones o ecuaciones diferenciales. La especulación a la que se refería Louis no era una filosófica y profunda sobre la probabilidad, sino que se basaba en la banal especulación financiera que ocurría del otro lado del río, en la *Bourse de Paris*. Si bien se habían escrito algunos libros antes de 1900, su estudio no había llegado a considerarse académico, mucho menos el tema principal para conseguir el patrocinio de la gran *Faculté des Sciences de l'Université de Paris*.

Los profesores no fueron impresionados por su exposición, y remarcaron que el ámbito de estudio elegido por el aplicante se encontraba un tanto distante del de la mayoría de los candidatos. Si bien Poincaré remarcó que la Tesis era original, esto no bastó para alcanzar la mención *très honorable* y recibió meramente la aprobación bajo la nota de *mention honorable*, insuficiente para insertarse entre la elite intelectual del momento [Mandelbrot, 2006].

Bachelier pasó el resto de su carrera en una posición un tanto marginal y provincial apartada del epicentro académico, la cual era necesaria para desarrollar una prestigiosa carrera como matemático en Francia. Sin embargo, se mantuvo activo durante años y desarrolló la teoría de los procesos de difusión que fue publicada en revistas de prestigio. En 1909 se convirtió en profesor libre de la Sorbona. En 1914 publicó el libro *Le Jeu, la Chance, et le Hasard* del que vendió unas 6.000 copias. Gracias al apoyo de la Universidad de París, Bachelier obtuvo un puesto permanente de profesor en la Sorbona, pero al iniciarse la Primera Guerra Mundial se unió al ejército. Después de la guerra encontró trabajo en Besançon cubriendo una vacante y en 1922 reemplazó a otro profesor en Dijon. Se trasladó a Rennes en 1925 y finalmente consiguió un puesto fijo de profesor en Besançon en el que estuvo durante diez años.

Si bien Bachelier no tuvo mayor influencia sobre sus contemporáneos, la historia resultó juzgarlo mejor que sus profesores. Su Tesis fue traducida al inglés en 1964, y resultaría la fundación de las finanzas modernas, con discípulos como Markowitz, Sharpe, Black, Merton y Scholes, influyendo profundamente la ideología académica, financiera y empresarial de las próximas décadas.

En muchos sentidos Bachelier se encontraba adelantado a su época, ya que para entonces no había una comunidad económica que hubiera podido utilizar muchas de sus ideas referentes a martingalas, procesos estocásticos discretos y continuos, mercados eficientes y recorridos aleatorios. Asimismo su tesis estudiaba lo que más tarde pasaría a llamarse el proceso estocástico “Einstein - Wiener”, referente al movimiento Browniano escrito en 1905, el *Annus Mirabilis* del científico alemán [Voit, 2005].

B.2 Theorie de la speculation

La tesis doctoral del matemático francés sin duda es original y contiene una profundidad que será apreciada décadas más tarde por la matemática estadística, la física y la economía. Su obra comienza con una elegante descripción de futuros y opciones, sigue por descubrir martingalas a partir de principios, crea procesos de Markov (antes que Markov), ecuaciones de Chapman-Kolmogorov (décadas antes que extendiera ecuaciones Markov en cadena a tiempo continuo), arriba a la distribución de Gauss a partir de primeros principios en economía, fue la primera persona en Francia en asociar dicha distribución a la ecuación del calor y procesos de Markov a ecuaciones diferenciales e incluso describió el movimiento Browniano antes que Einstein [Voit, 2006].

La investigación se encuentra dividida en siete Capítulos: *Introduction, Les Operations de Bourse, Les Probabilités Dans les Operations de Bourse, Operations Fermes, Operations a Prime, Operations Complexes* y *Probabilité pour qu'un cours soit atteint dans un intervalle de temps donné*. La inclusión de la descripción de instrumentos financieros en el segundo Capítulo sin dudas resulta peculiar para una tesis matemática de principios de siglo, sobre todo si se tiene en cuenta que la teoría de la probabilidad no fue aceptada como un área de estudio hasta mediados de la década del veinte.

Debido a la extensión de la investigación no se profundizará en muchos temas debido a su extensión y complejidad. Sin embargo, se describirán las suposiciones propuestas por el autor, su descripción de futuros, la distribución de probabilidades para la variación de precios, una mención al empleo del camino aleatorio y a sus verificaciones empíricas.

B.2.1 Supuestos

En el comienzo de *Les Operations de Bourse* las suposiciones estipuladas por Bachelier acerca del comportamiento de los mercados serán posteriormente utilizadas comúnmente en la teoría estándar de los mercados financieros a partir de la década del setenta. Estos pueden sintetizarse en los siguientes puntos:

- Los movimientos de precios son independientes.
- En un mercado toda la información disponible del pasado se ve reflejada en el precio presente. Esto es equivalente a afirmar que es un proceso que sigue las hipótesis de una martingala.
- En un mercado eficiente existen compradores tanto como vendedores para cualquier precio de transacción. Necesariamente poseen visiones diametralmente opuestas sobre futuros movimientos de precios, sin embargo, en promedio el mercado no cree en un movimiento neto.

Algunos de estos supuestos pueden observarse en las siguientes frases en la Tesis de Bachelier:

1. *"Le marché ne croit, à un instant donné, ni à la hausse, ni à la baisse du cours vrai."*¹
2. *"L'espérance mathématique du spéculateur est nulle."*²
3. *"...la probabilité de un écart à partir du cours vrai est indépendante de la valeur absolue de ce cours."*³

1 El mercado no cree en un momento dado al alza o a la baja.

2 La esperanza matemática del especulador es nula.

3 La probabilidad de una desviación del rumbo verdadero es independiente del valor absoluto de este curso.

B.2.2 Futuros de Bachelier y valor fundamental en los mercados.

Bachelier describe un futuro, un tanto diferente de los que se utilizan hoy en día, en donde es posible extender el contrato por medio de una prima de prolongación K , la cual debe pagarse al término de cada mes. El ejemplo específico que nos presenta tiene como activo subyacente a un bono de FF 100 con un cupón de $Z=75c$ el cual se cobra cada tres meses. El valor del futuro dependerá exclusivamente de este activo.

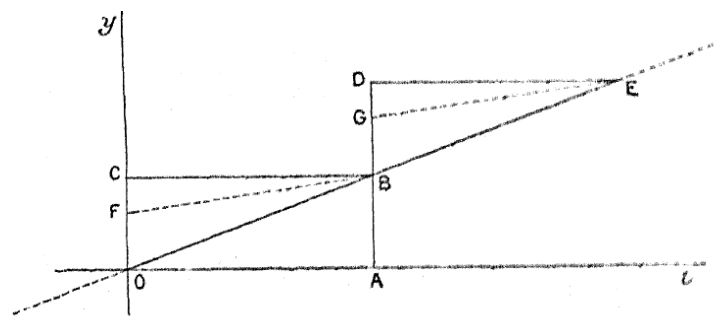


Figura B.1: gráfico utilizado por Bachelier para describir la variación del futuro. [Bachelier, 1909]

En la Figura B.1 podemos observar la evolución del valor del futuro. El segmento $\overline{OBE}$ representa el precio del futuro sin una prima de prolongación, es decir, al término de un mes ($\overline{OA}$) el valor del futuro será equivalente a la tercera parte del cupón ($\overline{AB} = Z/3$). En el caso de que haya una prima de prolongación K , el futuro valdrá el costo de la prima al iniciar el mes y $Z/3$ al finalizar. Al comienzo del segundo mes el valor del futuro será de $2K$ mientras que al finalizar valdrá $2Z/3$, ocurrirá algo equivalente en el tercer mes, y el comienzo del cuarto será igual al primero debido a que ya se ha cobrado la totalidad del valor del cupón (Z). $\overline{OF}$ representa el caso en que $K < Z/3$, mientras que $\overline{OC}$ representa el caso extremo en que $K = Z/3$.

La afirmación de suma importancia que realiza Bachelier es que todos los precios sobre las líneas son equivalentes entre sí, presentando así la idea de un valor *fundamental* en los mercados. Mientras la evolución del precio sea determinística, el retorno del inversor obtenido de comprar el futuro (o bono) en cualquier momento es el mismo. Dichos retornos son equivalentes debido a que la pendiente es independiente del tiempo. Si $S(t)$ representa el precio del bono, $F(t)$ el precio del futuro y Δt el tiempo correspondiente al pago del cupón, el cual en este ejemplo es de tres meses, dada una prima de prolongación K , la variación del precio del futuro será:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{dS(t)}{dt} - \frac{3K}{\Delta t} \quad (B.1)$$

El caso presentado se aplica a un movimiento netamente determinístico: existe una variación constante en el activo causado por el interés del bono. Las hipótesis de

mercado (1) y (2) establecen que el mercado, en un momento dado, no cree ni en la baja o la suba del activo subyacente, es decir, la expectativa del inversor es nula. A pesar de esto, si $y(t) = S(t) - S(0)$ representa una desviación de cierta amplitud que ocurre con probabilidad $p(y)$, la cual satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(y) dy = 1 \quad (\text{B.2})$$

para todo t , la esperanza de una inversión será consecuentemente:

$$E(y) = \int_{-\infty}^{\infty} yp(y) dy > 0 \quad \text{mientras} \quad \begin{cases} \frac{dS}{dt}, \frac{dF}{dt} > 0 \\ Z > 3K \end{cases}. \quad (\text{B.3})$$

Esto significa que la inversión esta sesgada positivamente, y por lo tanto no satisface la hipótesis presentada previamente (la condición de esperanza nula se satisface únicamente si $Z = 3K$, o si dS/dt o dF/dt equivalen a cero o se ven cancelados). Para corregir este sesgo que proviene de un hecho netamente determinístico, Bachelier modifica la variación de $y(t)$ de manera tal que:

$$x(t) = y(t) - \frac{dS(t)}{dt} \quad (\text{B.4})$$

Dicha modificación satisface la condición $E(x) = 0$, es decir, la esperanza del especulador es nula. De esta forma se realiza una separación entre el término determinístico y el proveniente de las fluctuaciones del activo en cuestión [Voit, 2006]. La variación de $x(t)$ puede ser descripta como una martingala, mientras que la de $y(t)$ puede ser descripta como una martingala equivalente. La hipótesis de una martingala es aproximadamente equivalente a la de un mercado eficiente.

B.2.3 Distribución de probabilidades

Debido a la influencia que tiene y ha tenido la obra, y especialmente la distribución de Gauss en las finanzas modernas, resulta conveniente presentar el elegante razonamiento del matemático francés para arribar a semejante conclusión. Dicho desarrollo representa, de alguna forma, lo que la ecuación $E = mc^2$ significa al mundo teórico de la física.

En la introducción Bachelier declara que el propósito de su estudio será buscar la ley de probabilidades que describa los movimientos de precio:

“...il est possible d'étudier mathématiquement l'état statique du marché à un instant donné, c'est-à-dire d'établir la loi de probabilité des variations...”⁴

Comienza aclarando que la variación del activo podrá variar entre su valor negativo y $+\infty$, pero sin embargo, este se toma entre $-\infty$ y $+\infty$ ya que se supone *a priori* como despreciable. Designando a $p_{x,t} dx$ como la probabilidad que haya un cambio de precio en el intervalo $x, x + dx$ en un tiempo t en el futuro, buscamos la probabilidad de que se produzca un cambio z en el transcurso de $t_1 + t_2$ habiéndose producido el cambio x en t_1 . Según el principio de probabilidad compuesta, esto es equivalente a la probabilidad de $p_{x,t_1} dx$ multiplicada por $p_{z-x,t_2} dz$. La probabilidad buscada es la siguiente:

$$p_{x,t_1} p_{z-x,t_2} dx dz \quad (B.5)$$

Debido a que el cambio x puede producirse en todo el intervalo de $-\infty$ a $+\infty$ obtenemos que la probabilidad de que se produzca la variación z en $t_1 + t_2$ es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{x,t_1} p_{z-x,t_2} dx dz . \quad (B.6)$$

Es decir,

$$p_{z,t_1+t_2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{x,t_1} p_{z-x,t_2} dx dz \quad (B.7)$$

la cual es conocida en la física y la matemática como la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Simplificando tenemos:

$$p_{z,t_1+t_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{x,t_1} p_{z-x,t_2} dx . \quad (B.8)$$

4 Es posible estudiar matemáticamente el estado estático del mercado en un momento dado, es decir, para establecer la probabilidad de variaciones.

Dicha ecuación es la que debe satisfacer la función p . Como se verá a continuación, es verificada por:

$$p = Ae^{-B^2x^2}. \quad (\text{B.9})$$

Debe destacarse que si bien dicha función satisface la ecuación, no es la única ya que existe una familia llamadas distribuciones de Lévy que la cumplen. Bachelier no realiza dicha aclaración, y será un tema central en Capítulos subsiguientes.

Dicha función deberá estar sujeta a la siguiente condición:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p \, dx = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-B^2x^2} \, dx = 1. \quad (\text{B.10})$$

La integral indefinida del primer término tiene como valor $\sqrt{\pi}/B$, y por ende $B = A\sqrt{\pi}$, haciendo:

$$p = Ae^{-\pi A^2x^2}. \quad (\text{B.11})$$

En $x = 0$, $A = p_0$, y se debe entonces hacer que la función $p = p_0 e^{-\pi p_0^2 x^2}$ en donde p_0 depende del tiempo satisfaga la ecuación establecida previamente.

Sean p_1 y p_2 las cantidades relativas a p_0 y que dependen de t_1 y t_2 , se debe demostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_1 e^{-\pi p_1^2 x^2} \times p_2 e^{-\pi p_2^2 (z-x)^2} \, dx \quad (\text{B.12})$$

tiene como solución la forma $Ae^{-B^2x^2}$, donde A y B dependen únicamente del tiempo.

Resolviendo:

$$p_1 p_2 e^{-\pi p_2^2 z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(p_1^2 + p_2^2)x^2 + 2\pi p_2^2 zx} \, dx. \quad (\text{B.13})$$

De la misma manera, si se toman diferencia de cuadrados en el exponente de la integral tenemos

$$p_1 p_2 e^{-\pi \cdot p_2^2 z + \frac{\pi p_2^4 z^2}{p_1^2 + p_2^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2} x - \frac{p_2^2 z}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \right)^2} dx . \quad (\text{B.14})$$

Haciendo el reemplazo

$$u = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} x - \frac{p_2^2 z}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}$$

$$dx = \frac{du}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \quad (\text{B.15})$$

tenemos:

$$\frac{p_1 p_2 e^{-\pi \cdot p_2^2 z + \frac{\pi p_2^4 z^2}{p_1^2 + p_2^2}}}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2} du . \quad (\text{B.16})$$

Dado que el valor de la integral es 1 y tomando factor común en el exponente tenemos

$$\frac{p_1 p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} e^{-\pi \cdot \frac{p_1^2 p_2^2}{p_1^2 + p_2^2} z^2} \quad (\text{B.17})$$

demostrando así que el resultado posee la forma $p = p_0 e^{-\pi p_0^2 x^2}$, en donde p_0 depende del tiempo.

Observando la ecuación precedente vemos que p_0 depende del tiempo siguiendo la siguiente función:

$$f^2(t_1 + t_2) = \frac{f^2(t_1) f^2(t_2)}{f^2(t_1) + f^2(t_2)} . \quad (\text{B.18})$$

Diferenciando con respecto a t_1 , luego con respecto a t_2 e igualando obtenemos

$$\frac{f'(t_1)}{f^3(t_1)} = \frac{f'(t_2)}{f^3(t_2)} \quad (\text{B.19})$$

ecuación que tiene como solución:

$$f(t) = p_0 = \frac{H}{\sqrt{t}}. \quad (\text{B.20})$$

Obtenemos finalmente la expresión para la distribución de probabilidades

$$p = \frac{H}{\sqrt{t}} e^{-\pi \frac{H^2}{t} x^2} \quad (\text{B.21})$$

la cual tiene como esperanza $\sigma = \frac{\sqrt{t}}{2\pi H}$. Esto es de suma importancia, ya que arriba a la distribución de Gauss por primeros principios y demuestra que su desvío es proporcional a la raíz del tiempo transcurrido.

B.2.4 Paseo Aleatorio

Bachelier arriba a la misma distribución a partir de la descripción de un paseo aleatorio con tiempo y movimientos discretos, lo cual es equivalente a la teoría del movimiento Browniano, también conocida como el proceso estocástico de Einstein – Wiener.

El proceso discreto descrito por Bachelier considera dos procesos mutuamente excluyentes con probabilidades de ocurrencia de p para A y de $q = 1 - p$ para B. Estos eventos pueden ser pensados como variaciones de precio de $\pm x_0$ en un determinado período de tiempo. De esta forma la probabilidad de observar en m eventos α ocurrencias de A y $m - \alpha$ ocurrencias de B esta dada por la distribución binomial [Voit, 2006]:

$$p_{A,B}(\alpha, m - \alpha) = \frac{m!}{\alpha!(m - \alpha)!} p^\alpha (1 - p)^{m - \alpha}. \quad (\text{B.22})$$

Siendo mp el valor de α que maximiza $p_{A,B}(\alpha, m - \alpha)$, Bachelier arriba a la función de distribución de cambios de precios generalizada para p, m y α . Esta expresión es simplificada para $m \rightarrow \infty$ y $\alpha \rightarrow \infty$ con $\alpha = mp + h$ a:

$$p(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{h^2}{2mpq}}. \quad (\text{B.23})$$

Para $p = q = 1/2$ con $h \rightarrow x$ y $m = t / \Delta t$ siendo Δt un período de tiempo discreto, y $H = \sqrt{2\Delta t / \pi}$, obtenemos la función de distribución de Gauss arribada anteriormente:

$$p = \frac{H}{\sqrt{t}} e^{-\pi \frac{H^2}{t} x^2}. \quad (\text{B.24})$$

B.2.5 Primeras grietas.

Resulta irónico que la persona que comenzó el estudio de las finanzas modernas, a su vez, haya presentado evidencia de las primeras grietas en un edificio teórico que sería expandido medio siglo más tarde.

Bachelier estimó los parámetros correspondientes a la media y el desvío estandar para la variación de precios de un bono francés y su futuro asociado en el período 1894-1898. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{dF}{dt} = 0,264 && \text{centavos / día} \\ \sigma &= 5 && \text{centavos} / \sqrt{\text{día}} \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Tras corregir los resultados de acuerdo a los días efectivos de mercado en el año (365/307), el matemático francés calculó el intervalo α_t , para distintos períodos de tiempo t , en donde se encontraba teóricamente el 50% de los datos.

$$\int_{-\alpha_t}^{\alpha_t} p(x, t) dx = \frac{1}{2} \quad (\text{B.26})$$

Para $t = 30d$, existen 60 datos disponibles, de los cuales 33 son menores a $\alpha_t = 46c$ y 27 son mayores. El 50% de la variación de precios ocurre en el rango $-38c \leq x \leq 54c$. Para $t = 1d$, existen 1452 datos disponibles, de los cuales 815 son menores a α_t y 637 son mayores. Este hecho debería ocasionar cierta duda ya que el valor esperado es de 776, pero Bachelier no comenta en la discrepancia entre su

teoría y los hechos observados. De hecho, el análisis moderno de bonos encuentra que las variaciones extremas son menos frecuentes que las predichas por Bachelier. Por el contrario, activos tales como acciones, divisas o mercados de *commodities*, poseen una cantidad significativamente mayor de variaciones extremas. Dicho tema será central en el Capítulo 2.

ANEXO C

EL TEMPLO DE WALL STREET

“El mercado puede permanecer irracional por más tiempo del que tú puedes permanecer solvente.”

- John Maynard Keynes

A diferencia de Bachelier, William F. Sharpe, Harry M. Markowitz, Fischer Black y Myron Scholes disfrutaron de un gran prestigio profesional durante sus vidas. A partir de la década del setenta sus teorías llegaron a ser mundialmente usadas en el ámbito empresarial y financiero. En la década del noventa obtuvieron el Premio Nobel en Economía, el mayor reconocimiento que alguien pueda recibir en tal disciplina, siendo las primeras personas en ser reconocidas por investigaciones en el ámbito de las finanzas. Los modelos CAPM (Capital Asset Pricing Model), MPT (Modern Portfolio Theory) y Black-Scholes, tomando en gran parte ideas propuestas por el matemático francés, figuran en el plan de clases de cualquier MBA o CEO con conceptos como “el Beta” globalmente difundidos.

Este Capítulo repasará estos tres modelos y en gran parte presentará algunos conceptos de la teoría de cálculo estocástico utilizados por el modelo Black-Scholes.

C.1 Cómo fabricar una cartera eficiente

“No, creedme; gracias a mi fortuna, todas mis especulaciones no van confiadas a un solo buque, ni las dirijo a un solo sitio; ni el total de mi riqueza depende tampoco de los percances del año presente; no es, por tanto, la suerte de mis mercancías lo que me entristece.”

-El Mercader de Venecia, Acto I, Escena I

C.1.1 Harry Markowitz

Harry M. Markowitz nació el 24 de Agosto de 1924 en la ciudad de Chicago. Si bien sus orígenes fueron humildes, la depresión de los años treinta no lo afectó en gran medida. Durante la escuela secundaria desarrolló un interés por la física y la filosofía, el cual continuó durante su paso por la Universidad de Chicago, centro intelectual con personalidades como Milton Friedman, para fomentar el desarrollo de lo que hoy se conoce como las finanzas modernas.

A principios de la década del cincuenta, Harry decidió aplicar la matemática a la bolsa como su tema de disertación para su doctorado. No había tomado cursos en finanzas ni poseía inversiones en la bolsa de Chicago, pero una tarde de 1950, en la biblioteca,

al leer *Theory of Investment Value* de John Burr Williams, el joven economista se percató de que su análisis no examinaba el impacto del riesgo. Tras repasar un libro de Teoría de la Probabilidad, Markowitz aplicó conceptos tales como esperanza, varianza y correlación a los mercados financieros, desarrollando así una teoría de la cartera, publicada en 1952 en *The Journal of Finance*. En 1955 tras presentar su novedosa disertación, Milton Friedman remarcó que no podían otorgarle un doctorado en economía a una disertación que no era de economía, sin embargo, a diferencia de Bachelier, Harry obtuvo su doctorado sin problemas.

Su trabajo tuvo una gran influencia sobre sus contemporáneos, y fue rápidamente aceptada por el sector financiero y académico, permitiendo el desarrollo de otras teorías tales como CAPM a principios de la década del sesenta.

En la actualidad Markowitz pasa su tiempo como profesor adjunto en la Universidad de San Diego, dando video-conferencias, practicando la consultoría y una variedad de proyectos [Markowitz, 1990].

C.1.2 Selección de Carteras

El *paper* publicado en Marzo de 1952 en *Journal of Finance* por Harry Markowitz puede ser considerado el nacimiento de las finanzas modernas, ya que muchas de las ideas propuestas por el economista estadounidense con respecto al tratamiento del riesgo son sin lugar a dudas novedosas para esa época y serán el punto de partida para el desarrollo de otras teorías. La genialidad de su disertación radica en la noción de que el riesgo debe ser tomado como un conjunto y que debido a la correlación de los distintos activos existe un riesgo intrínseco que no puede ser eliminado. Él es el primero en presentar el concepto que un inversor debe buscar maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo y en formalizar las matemáticas de la diversificación.

Anteriormente, como puede observarse en el libro de John Burr Williams, no existía un adecuado tratamiento del riesgo:

“En un sentido estricto, sin embargo, no existe ningún riesgo en la compra del bono en cuestión, si su precio es correcto. Teniendo en cuenta la diversificación adecuada, las ganancias de estas compras compensaran las pérdidas, y se obtendrá un retorno al tipo de interés puro. Así, el riesgo neto resulta ser cero.”

- The Theory of Investment Value

La original tesis presenta de una manera gráfica y analítica el tratamiento de una cartera con tres y cuatro activos, presentando finalmente la famosa curva de carteras eficientes. Si bien incluye un análisis detallado, no profundiza en las demostraciones, ni presenta pasos intermedios. Una monografía escrita para la Universidad de Yale en 1959 clarifica muchos de estos puntos.

Al comenzar su escrito Markowitz propone como máxima o hipótesis que el inversor debe considerar el retorno como algo deseable y al riesgo como algo indeseable, a

diferencia de la noción de que el inversor debe buscar únicamente maximizar su retorno descontado. Señala que la diversificación es algo que se observa en la práctica, y demuestra matemáticamente como la maximización falla en explicarla, sin importar las variantes que se elijan.

Aclara que la noción popularizada de que el inversor debe diversificar entre aquellos activos que maximicen su rendimiento, es falsa. Explica que esto se debe a que la ley de los grandes números no asegurará que el rendimiento será igual al esperado, ya que los retornos de los activos se encuentran demasiado correlacionados.

A continuación presenta la definición de esperanza, varianza y sus valores para la suma ponderada de variables correlacionadas. Si la suma ponderada de variables aleatorias es:

$$R = a_1 R_1 + a_2 R_2 + \dots + a_n R_n \quad (\text{C.1})$$

siendo σ_{ij} la covarianza entre la variable i y la j , la esperanza y la varianza serán,

$$E(R) = \sum_{i=1}^n a_i E(R_i) \quad (\text{C.2})$$

$$Var(R) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \sigma_{ij} \quad (\text{C.3})$$

Una vez establecido, esto Markowitz pasa a explicar el análisis geométrico para el caso de tres activos. Siendo μ_i la esperanza y X_i la fracción que se invierte en el activo i , obtendremos las siguientes ecuaciones:

$$E = \sum_{i=1}^3 X_i \mu_i \quad (\text{C.4})$$

$$V = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 X_i X_j \sigma_{ij} \quad (\text{C.5})$$

$$\sum_{i=1}^3 X_i = 1 \quad (\text{C.6})$$

$$X_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{C.7})$$

Reemplazando X_3 en términos de X_1 y X_2 por medio de $X_3 = 1 - X_1 - X_2$ obtendremos tres ecuaciones que pueden representarse en el plano (X_1, X_2) : una recta correspondiente a la esperanza, una elipse correspondiente a la varianza y el área de un triángulo correspondiente a las tres desigualdades. A continuación se presenta el gráfico con las figuras geométricas utilizado por Markowitz y sus fórmulas correspondientes.

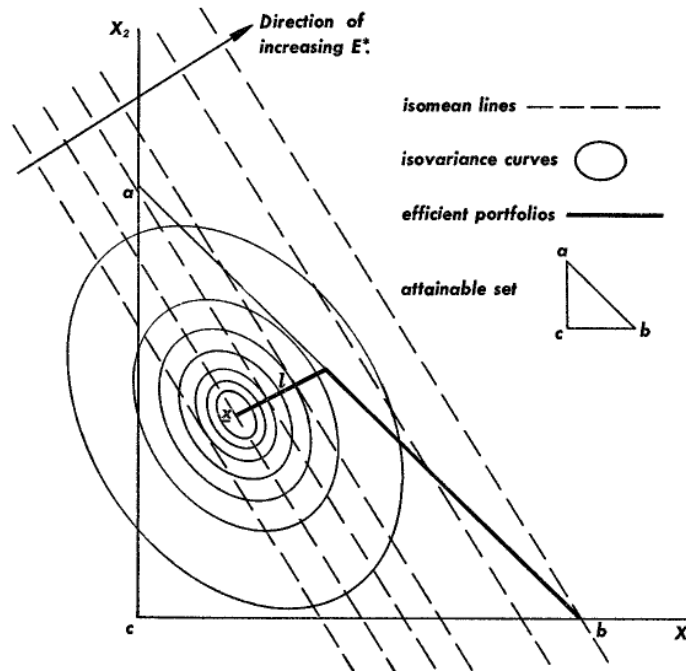


Figura C.1

$$(C.8) \quad E = \mu_3 + X_1(\mu_1 - \mu_3) + X_2(\mu_2 - \mu_3)$$

$$(C.9) \quad V = X_1^2(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + X_2^2(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2X_1X_2(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2X_1(\sigma_{13} - \sigma_{33}) + 2X_2(\sigma_{23} - \sigma_{33}) + \sigma_{33}$$

$$(C.10) \quad X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0 \quad 1 - X_1 - X_2 \geq 0$$

Las elipses concéntricas representan las líneas de iso-varianza, siendo el centro (x) el punto mínimo. Para cada recta de iso-esperanza hay un punto (X_1, X_2) que minimiza la varianza. Este conjunto de puntos está representado por el segmento l y constituye el conjunto de carteras eficientes (de acuerdo a la restricción de las desigualdades

este conjunto continua a lo largo del segmento a-b). El gráfico E - V tan popular utilizado hoy en día resultará del recorrido a lo largo de este conjunto de carteras eficientes. Presentamos la primera representación utilizada por Markowitz para ejemplificar dicho concepto:

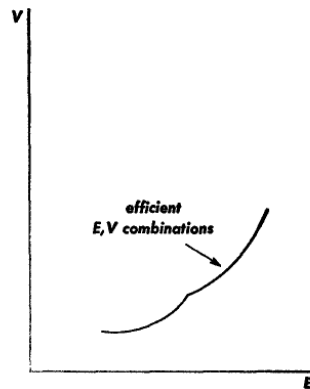


Figura C.2

Aunque no expande su explicación, Markowitz aclara que este tipo de parábolas aparecerán para los casos de cuatro o más activos en la cartera. Hacia el final de su tesis explica como estos conceptos concuerdan con la intuición de que es razonable invertir en distintos tipos de industrias ya que al tener poca correlación, o incluso una correlación negativa, la varianza total de la cartera se verá reducida. Asimismo nos presenta un ejemplo gráfico de como la suma de dos carteras pueden producir menor varianza de la que cada una produciría por separado. Finalmente reflexiona:

“Creo que lo que se necesita es esencialmente una reformulación probabilística del análisis de títulos y activos. No voy a seguir este tema aquí, para esto es ‘otra historia. Es una historia que he leído sólo la primera página del primer Capítulo.”

Sin lugar a dudas, se trataba de la primera hoja bastante original. Es probable que no haya estado familiarizado con la obra de Bachelier, ya que esta reformulación probabilística a la cual se refiere se encontraba olvidada en una tesis escrita hace medio siglo en París, sin embargo Harry Markowitz había prendido una llama que no tardaría en expandirse.

C.2 ¿Y si todos hicieran lo mismo?

C.2.1 William Sharpe

En el culto de las finanzas modernas, Wall Street es el templo y William F. Sharpe es sin lugar a dudas uno de sus más venerados apóstoles: según una encuesta hecha en 1999 por dos economistas de Duke University a cientos de CFO de las principales multinacionales americanas las siglas CAPM aparecieron en mas del 70% de los casos a la hora de ser preguntados cómo decidían sus inversiones [Mandelbrot, 2006].

El famoso economista americano nació el 16 de Junio de 1934 en Boston, Massachusetts. Con el comienzo de la Segunda Guerra Mundial, su padre se vio obligado a mudarse al norte de California y William realizó su educación en una escuela pública de Riverside en California, un ámbito estimulante y con profesores de buen nivel.

En 1951 Sharpe ingresó en Berkeley con planes de seguir medicina, pero al poco tiempo se percató de que sus preferencias se encontraban en otras áreas y se trasladó a Los Angeles para estudiar Negocios en UCLA. Dos de sus primeros cursos fueron Microeconomía y Contabilidad, los cuales ayudaron a definir su interés hacia un enfoque más teórico y menos “tedioso y liviano en lo intelectual”, permitiendo así su elección final por las ciencias económicas. Recibió su diploma de B.A. y M.A. en 1955 y 1956 respectivamente.

Tras un breve período en las Fuerzas Armadas, Sharpe encontró trabajo como economista en la RAND Corporation, un lugar apasionante para quienquiera que tuviese interés en investigar áreas tales como teoría de juegos, programación lineal, programación dinámica, economía aplicada y muchas otras novedosas teorías de la posguerra. Fue durante esta etapa, en 1960, mientras buscaba un tema para su disertación doctoral, que J. Fred Weston, previo profesor de finanzas, le recomendó que hablara con Harry Markowitz, el cual también se encontraba en la RAND Corporation. Fue así como encontró la idea que permitiría desarrollar su tesis y recibir su doctorado. A pesar de que Markowitz no estaba en el comité evaluador, él actuó como virtual mentor e influyó profundamente en el joven William [Sharpe, 1990].

En 1961 se mudó a Seattle a cubrir una posición en finanzas en la Universidad de Washington. Una vez instalado, en el otoño de ese mismo año Sharpe desarrolló la idea de su disertación al relajar ciertas suposiciones asumidas en su modelo previo. En Enero de 1962 presentó esta propuesta a la Universidad de Chicago y al poco tiempo envió su *paper* a *The Journal of Finance*. Debido a una devolución un tanto negativa, seguida de un cambio de directores, la publicación de su original idea se vio retrasada hasta 1964. El contenido y título de este artículo sería la base de lo que el mundo conocería como Capital Asset Pricing Model (C.A.P.M.), teoría que recibiría en 1990 el Premio Nobel en Economía.

En 1968 tras estar dos años en la Universidad de California en Irvine, Sharpe se trasladó a la Universidad de Stanford, lugar donde permanecerá hasta 1989. Durante estos años continuó con sus investigaciones en inversiones, ingeniería de carteras y entre otras cosas realizó trabajos de consultoría para Merrill Lynch y Wells Fargo.

C.2.2 Los precios de los activos de capital: una teoría del equilibrio de los mercados en condiciones de riesgo. (1962)

Si bien Markowitz había determinado cómo hacer más eficiente una cartera de acciones, habían ciertos aspectos que no quedaban muy claros. En primer lugar, uno necesita de pronósticos de rendimiento de varias acciones, lo cual depende del análisis fundamental de cada una de ellas. En segundo lugar, asumiendo que se pronostica adecuadamente, todavía resta calcular la covarianza entre cada una de las acciones, lo cual significa para una cartera de 20 acciones, 190 cálculos, y para 1000, poco menos de 500.000. Hoy podría llegar a realizarse con una computadora, sin embargo, para principios de los años sesenta, sin una capacidad computacional adecuada significaba una tarea fuera del alcance de un simple corredor de bolsa.

La idea de Sharpe consistió en arribar a un equilibrio microeconómico, en un mercado el que todos aplicaran la lógica dispuesta por Markowitz una década atrás. Resultó que su solución fue algo más simple, y es lo que hoy se conoce como CAPM (Capital Asset Pricing Model).

Introducción

El famoso *paper* publicado en 1964 comienza con una descripción de la teoría difundida en aquel entonces en la determinación de los activos de capital. Sharpe comenta cómo se considera que el inversor debe elegir entre el precio del tiempo, es decir la tasa libre de riesgo, y el precio del riesgo, el incremento de retorno esperado sobre la unidad de riesgo. Sin embargo, declara que no existe un adecuado tratamiento en la determinación del precio del riesgo mediante las preferencias de los inversores, y que sin tal marco teórico, es difícil otorgarle algún significado real al valor de una acción en relación a su variabilidad.

Sharpe prosigue la introducción mencionando aquellos economistas que han presentado modelos normativos en la elección de activos bajo condiciones de riesgo, nombrando así a Markowitz, Tobin y Hicks, entre otros. Si bien aclara que todos usan virtualmente el mismo modelo de comportamiento del inversor, indica que ninguno ha avanzado para crear una teoría del equilibrio del mercado bajo condiciones de riesgo.

La política de inversión óptima para el individuo

El segundo Capítulo del escrito presenta el modelo de comportamiento de un individuo bajo condiciones de riesgo. Aplicando una metodología utilizada frecuentemente en la microeconomía, Sharpe presenta la función de utilidad del individuo, la cual depende de únicamente dos variables: el valor esperado y el riesgo. Esto puede ser representado mediante,

$$U = f(E_w, \sigma_w) \quad (C.11)$$

en donde E_W representa la riqueza esperada en el futuro y σ_W su desvío. Asimismo debido a que los inversores prefieren una mayor expectativa de riqueza y poseen aversión al riesgo *ceteribus paribus*, la función de utilidad deberá satisfacer:

$$\frac{\partial U}{\partial E_W} > 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \sigma_W} < 0 \quad (C.12)$$

éstas condiciones establecen que las curvas de indiferencia serán ascendentes. Dado que $R = (W_f - W_i)/W_i$ podemos expresar la función de utilidad en términos del retorno, ya que la riqueza final está directamente relacionada con ella:

$$U = g(E_R, \sigma_R) \quad (C.13)$$

Una vez establecida la función de utilidad en términos del retorno, Sharpe bosqueja el gráfico de retorno y riesgo junto con la curvas de indiferencia y distintas oportunidades de inversión. Aclara que una oportunidad de inversión será eficiente si y solo si no se encuentra con respecto a otros activos en el cuadrante superior izquierdo. Esto ocurre con el punto z con respecto a B, C y D como se indica en el gráfico. También aclara que habrá un punto F que tendrá una posición que maximice la utilidad.

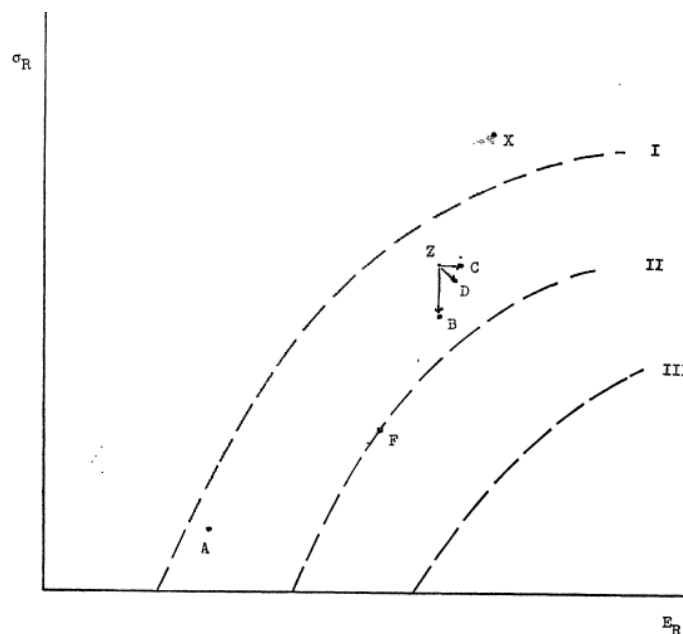


Figura C.3

A continuación presenta la frontera eficiente para dos activos cualesquiera y especifica que su forma será una línea recta entre ambos puntos en el caso de una correlación

perfecta y tendrá forma de U para los casos de correlación nula o incluso negativa. Dicho desarrollo no es más que el caso propuesto por Markowitz para dos activos.

Finalmente, para concluir el Capítulo, Sharpe extiende su explicación al incluir activos libres de riesgo y especifica que la combinación de tal activo junto a uno riesgoso será indefectiblemente una línea recta.

Siendo α el porcentaje que se invierte en el activo libre de riesgo P y $1-\alpha$ el porcentaje que se invierte en una combinación A, la esperanza y desvío de la combinación resultante será:

$$E_{RC} = \alpha E_{RP} + (1-\alpha)E_{RA} \quad (C.14)$$

$$\sigma_{RC} = \sqrt{\alpha^2 \sigma_{RP}^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_{RA}^2 + 2\rho_{PA}(1-\alpha)\alpha\sigma_{RP}\sigma_{RA}} \quad (C.15)$$

Dado que $\sigma_{RP} = 0$,

$$\sigma_{RC} = (1-\alpha)\sigma_{RA} \quad (C.16)$$

De esta forma uno podrá obtener un conjunto de inversiones a lo largo de una línea recta entre un activo libre de riesgo P y una combinación riesgosa A, si invierte parte de su dinero en el primero y el resto en la segunda. Sin embargo habrá una inversión que domine al resto: aquella que esté ubicada en el punto de tangencia entre la frontera eficiente y el punto P. Esto se ejemplifica en el siguiente gráfico, en donde una combinación de ϕ y P domina cualquier otra alternativa (cabe destacar que dicha recta puede ser extendida si se toma dinero prestado a la tasa libre de riesgo, lo cual es equivalente a desinvertir en P, es decir, α puede tomar valores negativos).

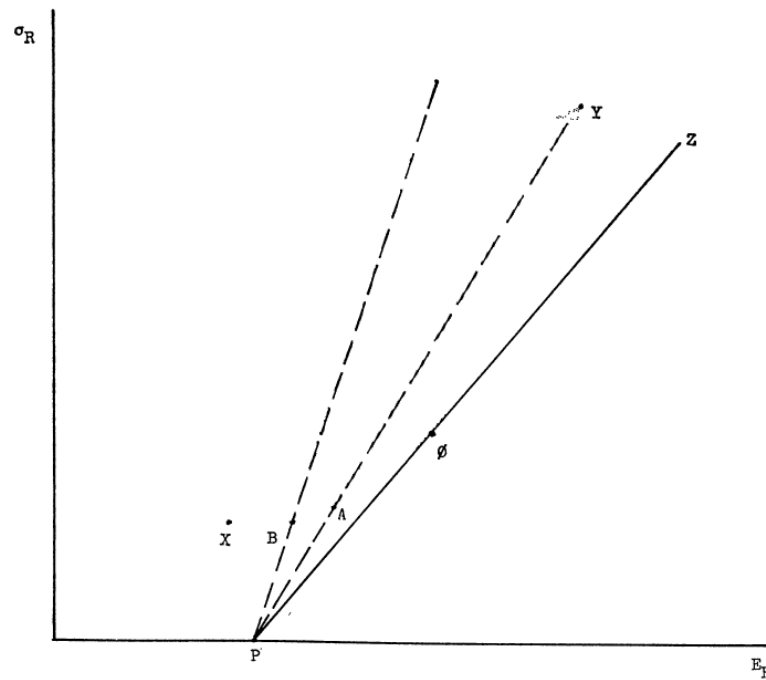


Figura C.4

Mediante este análisis podemos ver como un inversor, de acuerdo a su aversión al riesgo, elegirá el punto a lo largo de $P\phi$ que maximice su utilidad.

Equilibrio en el mercado de valores

Para extender el razonamiento hecho para un individuo a un equilibrio de mercado, deben formularse dos suposiciones: En primer lugar se establece una tasa de interés libre de riesgo común a todos, y en segundo lugar se asume la homogeneidad de expectativas de los inversores, es decir, que los retornos esperados, desvíos y correlaciones son iguales a todos. Sharpe es conciente de que dichas suposiciones no son del todo realistas, empero las justifica de acuerdo a la aceptabilidad de sus implicaciones.

Siguiendo la lógica establecida para un único inversor, en el gráfico anterior aparecerán tantos puntos a lo largo de $P\phi$ como funciones de utilidad que tenga cada inversor. Algunos serán buscadores de riesgo tomando prestado a la tasa libre de riesgo P para invertir en ϕ y otros con aversión al riesgo invertirán parte de su capital en P y otra parte en ϕ .

Sharpe razona que debido a una mayor demanda para invertir en aquellos activos que componen ϕ , sus precios subirán, sus retornos esperados bajaran y consecuentemente desplazarán al punto ϕ hacia la izquierda. Por el contrario aquellos activos que componen puntos como A verán bajar sus precios, aumentar sus retornos esperados, y por ende se desplazarán hacia la derecha.

Esta dinámica continuará hasta que todos estos puntos queden sobre la misma recta, haciendo que haya varias alternativas de combinaciones eficientes. Asimismo esto implicará que todos estos puntos estarán perfectamente correlacionados, consecuencia que será de suma importancia para arribar a la solución final.

El precio de bienes de capital

La última parte de la disertación comienza recalcando que si bien se ha analizado la relación entre riesgo y retorno para combinaciones eficientes de activos, no se ha tratado dicha relación para activos individuales. Dado que por lo general son puntos ineficientes, estos quedarán por encima de la línea de mercado, y estarán dispersos sin una clara relación entre riesgo y retorno. Empero, Sharpe recalca que existe una clara relación entre el retorno y su riesgo sistemático.

Para explicar dicho concepto, el economista americano utiliza dos inversiones: una compuesta por un único activo i y otra por una combinación eficiente de activos, denominada g , la cual contiene entre otros al activo i . Siendo α el porcentaje que se invierte en i , $\alpha = 1$ significará una inversión total en i , $\alpha = 0$ representará una colocación total a la combinación eficiente g , mientras que para no invertir en i , α deberá tomar valores negativos debido al hecho que g contiene a i (este caso en el que no se invierte en i es representado por g'). Asimismo, debido a que g pertenece a una combinación eficiente, dicho punto será tangente a la línea de mercado. Si no fuera este el caso, significaría que existe otro punto más eficiente a su derecha, lo cual sería imposible ya que g pertenece al conjunto de inversiones eficientes. Habiendo definido este concepto, se presenta el gráfico utilizado por Sharpe.

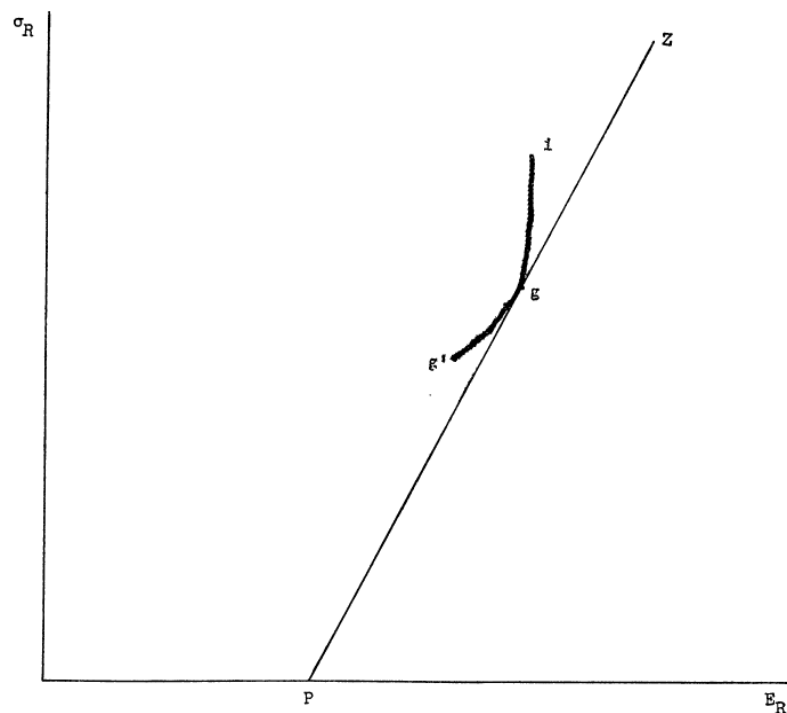


Figura C.5

La condición que este tipo de curvas sea tangente a la línea de mercado lleva a la famosa ecuación. Para hacer esto debemos definir primero el desvío y la esperanza a lo largo de la curva, obtener la tangente de la curva en g y finalmente igualarla a la ecuación de la recta de mercado. Definimos el desvío y la esperanza:

$$\sigma = \sqrt{\alpha^2 \sigma_{Ri}^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_{Rg}^2 + 2\rho_{ig}(1-\alpha)\alpha\sigma_{Rg}\sigma_{Ri}} \quad (C.17)$$

$$E = \alpha E_{Ri} + (1-\alpha)E_{Rg}. \quad (C.18)$$

Obtenemos la tangente en g ,

En $\alpha = 0$ (punto g)

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{-1}{\sigma} (\sigma_{Rg}^2 - \rho_{ig}\sigma_{Ri}\sigma_{Rg}) \quad \text{y} \quad \frac{dE}{d\alpha} = - (E_{Rg} - E_{Ri}) \quad (C.19)$$

Pero en g , $\sigma = \sigma_{Rg}$

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = - (\sigma_{Rg} - \rho_{ig}\sigma_{Ri}) \quad (C.20)$$

$$\frac{d\sigma}{dE} = \frac{d\sigma}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dE} = \frac{\sigma_{Rg} - \rho_{ig}\sigma_{Ri}}{E_{Rg} - E_{Ri}} \quad (C.21)$$

La pendiente de la línea de mercado es simplemente $\sigma_{Rg}/(E_{Rg} - P)$, por lo tanto

$$\frac{d\sigma}{dE} = \frac{\sigma_{Rg} - \rho_{ig}\sigma_{Ri}}{E_{Rg} - E_{Ri}} = \frac{\sigma_{Rg}}{E_{Rg} - P}. \quad (C.22)$$

Reordenando, obtenemos la ecuación en una forma más familiar:

$$E_{Ri} = P + \frac{\rho_{ig}\sigma_{Ri}}{\sigma_{Rg}} (E_{Rg} - P) = P + \beta_{ig} (E_{Rg} - P). \quad (C.23)$$

Esta relación se mantendrá para cualquier combinación eficiente debido al hecho que el conjunto de todas estas inversiones estará perfectamente correlacionado. Incluso, sugiere Sharpe, podemos elegir cualquier variable correlacionada con el retorno de tales combinaciones. Aclara que si bien la teoría sólo indica que las combinaciones eficientes estarán perfectamente correlacionadas, indica que esto podría deberse a su dependencia común al nivel de actividad económica. De acuerdo a esto, el inversor no podrá librarse mediante una diversificación del riesgo sistemático del mercado. Es por esto que únicamente la respuesta de un activo a este riesgo sistemático será de relevancia a la hora de invertir.

C.3 Los discípulos de Bachelier

Fischer Black, Myron Scholes y Robert C. Merton representan la sofisticación definitiva que permitiría a las finanzas modernas tomar vuelo hacia principios de la década del setenta. Su modelo fue utilizado para estimar el valor de compra de una opción europea, lo cual aconteció hacia fines de 1973 una explosión en el mercado de derivados financieros en Chicago. Las opciones fueron instrumentos financieros utilizados informalmente durante décadas (la disertación de Bachelier trataba en definitiva con un tipo de opción), sin embargo la publicación del famoso *paper* coincidió prácticamente con la apertura del Chicago Board Options Exchange (CBOE). Tal fue el éxito de este modelo que a los pocos meses de su publicación se vendían calculadoras capaces de computar la famosa ecuación. Hoy día este auge continúa a tal punto que dicho modelo aparece en el programa de cualquier MBA, y es utilizada diariamente por *traders* en todo el mundo. Myron Scholes y Robert Merton fueron premiados en 1997 con el premio Nobel de Economía, sin embargo debido a que la academia no otorga premios póstumos, Fischer Black fue mencionado como el principal contribuidor en el desarrollo de la teoría.

C.3.1 El nacimiento de una fórmula

Fischer Black, al igual que Bachelier, se acercó al mundo de las finanzas desde un ámbito un tanto más académico y exacto: se graduó en Harvard de físico y obtuvo su doctorado en matemáticas aplicadas. En 1965 con el objetivo de buscar problemas prácticos de un beneficio más inmediato, dejó Harvard y se unió a una consultora en Cambridge. Fue aquí dónde conoció a Jack Treynor, el cual había estudiado aunque no publicado un modelo de los precios de los activos al igual que Sharpe. Fue a partir de este punto que el joven físico y matemático quedó definitivamente encantado con la estética y aplicabilidad de la modelización de activos financieros, y así fue como se topó con el problema de cómo valorar una opción.

Cabe destacar que semejante tarea ya había sido abordada por gente brillante como Bachelier y Paul Samuelson, el economista de MIT, aunque sin éxito. El razonamiento que permitió evitar algunos de los problemas encontrados anteriormente, fue que uno no necesitaría saber el valor final de la acción para determinar el valor actual, sino que el uso de cálculo estocástico aplicado a esta idea facilitaría el arribo a una solución. Fue así como llegó a una ecuación diferencial, pero debido a que dicha área no era su fuerte, la dejó de lado y siguió con otras investigaciones.

Alrededor de esta época, tras obtener un doctorado en economía en la Universidad de Chicago en 1968, Myron S. Scholes llegó a MIT con el fin de enseñar finanzas. Fue en este período, en un ambiente rodeado de figuras como Paul Samuelson, Franco Modigliani y Paul Cootner que conoció a Black en un taller de finanzas. Fue así como crearon esta peculiar pareja, y retomaron la idea desarrollada previamente por el hombre de Harvard. Scholes sin dudas era un excelente oyente y pensador abstracto, ya que una complicación con su cornea durante su juventud lo había obligado a adquirir tales características.

Al mismo tiempo, Robert C. Merton, graduado de ingeniería en Columbia, master de matemática en Caltech y economista en MIT, compartía la misma curiosidad que la pareja académica y comenzó a discutir algunos de los problemas presentes en la modelización. Fue así como les sugirió algunos enfoques matemáticos. No obstante, debido al hecho de ser rivales tanto como colegas académicos, su colaboración no fue completa.

Tras desarrollar el modelo con algunas de las ideas propuestas por Merton y probarlas en el mercado, Black y Scholes presentaron su disertación a *The Journal of Political Economy* en Octubre de 1970, pero fueron rechazados debido a un contenido demasiado especializado. Sin embargo gracias a la influencia de algunos de los prestigiosos colegas de Black de la Universidad de Chicago, tales como los economistas Miller y Fama, el artículo apareció publicado finalmente en 1973 [Scholes, 1997].

C.3.2 Los precios de opciones y pasivos corporativos. (1973)

Se analizará el revolucionario artículo escrito por Black y Scholes, publicado en *The Journal of Political Economy* en 1973. Es necesario destacar que a diferencia del análisis realizado sobre los otros dos autores en este Capítulo, este trabajo presenta un contenido matemático bastante complejo y específico que para entender adecuadamente es probable que se necesite como mínimo un curso introductorio en cálculo estocástico. No obstante, es posible presentar el razonamiento principal sin detenerse en los detalles matemáticos y proporcionar una idea de la lógica empleada para arribar al resultado. Para aquellos interesados en el origen de la teoría y otros detalles pueden leer el Anexo A.

Para comenzar el desarrollo se presentará una opción, la cual es básicamente un derecho a comprar o vender cierto activo subyacente a un determinado precio (precio de ejercicio) hasta una fecha concreta. En las opciones europeas el derecho sólo puede ser ejercido en su vencimiento mientras que en las americanas este puede ser ejercido en cualquier momento anterior al mismo. El tipo más simple de opción es un *call* europeo, el cual es un derecho a comprar una acción. El *paper* se concentra principalmente en este derivado financiero para realizar el análisis.

Límites

A modo de introducción Black y Scholes presentan los límites superiores e inferiores que un *call* puede tomar a la fecha de vencimiento. Si bien no discuten el análisis posterior con profundidad, sí comentan el comportamiento de los precios a medida que transcurre el tiempo. El razonamiento para su desplazamiento se puede observar al analizar los límites inferior y superior del valor de la opción de compra [Voit, 2005]. Dado que un *call* no puede valer nunca más que su activo subyacente tenemos,

$$C(t) < S(t) \tag{C.24}$$

Para obtener el límite inferior construiremos dos carteras: una A, que contiene un *call* con un activo subyacente $S(t)$ al precio C y $Xe^{-r(T-t)}$ en billetes (significa que sus billetes a la fecha del vencimiento valdrán X , el precio del ejercicio) y otra B, que contiene únicamente al activo $S(t)$. De esta forma al vencimiento B valdrá $S(T)$. Si al vencimiento $S(T) > X$, el derecho de opción de compra en A es ejercido, se compra con X el activo y la cartera A obtiene así un valor de $S(T)$. Si por el contrario $S(T) < X$, no se ejercerá el derecho y la cartera A valdrá el valor de los billetes X . De esta forma el valor de A será $\max[S(T); X]$, el cual es siempre mayor a $S(T)$, el valor de B.

Este razonamiento es valido para todo el tiempo ya que el valor de ambas carteras depende de la misma fuente de incertidumbre: la evolución del activo $S(t)$. Así, teniendo en cuenta que la opción de compra no puede tener un precio negativo obtenemos:

$$\begin{aligned} A(t) &> B(t) \\ C(t) + Xe^{-r(T-t)} &> S(t) \\ C(t) &> \max[S(t) - Xe^{-r(T-t)}; 0] \end{aligned} \quad (C.25)$$

A continuación se presentan los límites superiores e inferiores utilizados en el artículo original (Figura C.6) y otro gráfico representando el concepto desarrollado con anterioridad (Figura C.7).

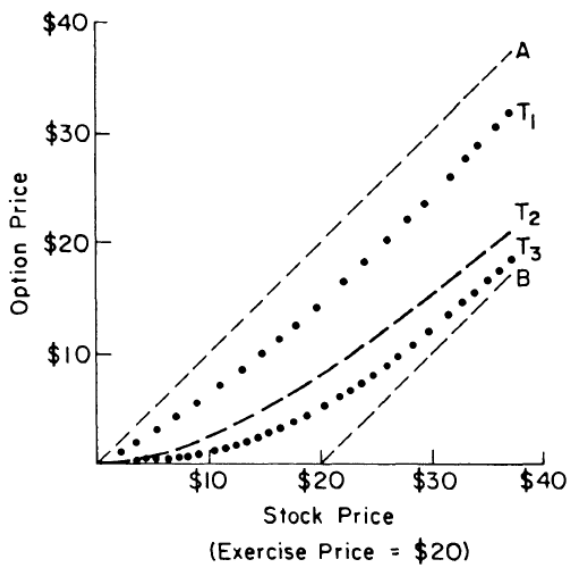


Figura C.6

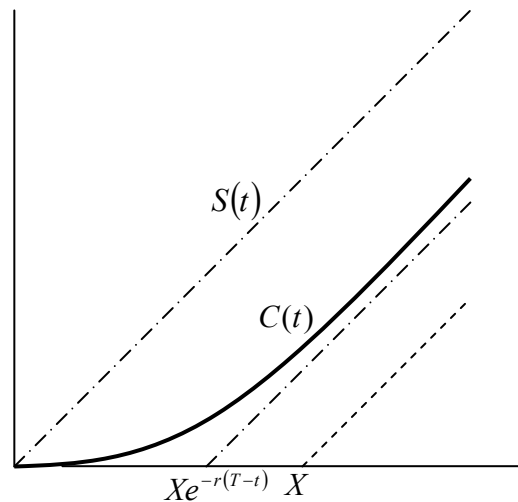


Figura C.7

Suposiciones

- La tasa de interés es conocida y constante a lo largo del tiempo.
- El precio del activo subyacente sigue un paseo aleatorio denominado movimiento Browniano geométrico, lo cual significa que la distribución de precios en un intervalo tiene una distribución lognormal. La volatilidad se mantiene constante.
- La acción subyacente no paga dividendos.
- La opción es europea.
- No hay costos de transacción tanto para la compra como para la venta.
- Es posible pedir prestado cualquier fracción del precio del activo a la tasa libre de riesgo.
- No hay penalidad por *shortear*.

Desarrollo

A pesar de que una opción posee menor volatilidad que el activo subyacente con respecto a los precios, esta posee una mayor volatilidad con respecto a su retorno. Esto significa que el emisor de la opción cede una libertad de acción al comprometerse a una obligación, mientras el comprador de la misma obtiene una mayor libertad de acción y por ende se ve resguardado. Las preguntas que Black y Scholes se hicieron hacia fines de la década del sesenta fueron: ¿Cuál es la prima de riesgo para el emisor de la opción, asociada al compromiso asumido? ¿O cuál es el precio del contrato, la libertad adicional ganado por el comprador? En definitiva: ¿Cuál es el valor producido por la asimetría inherente en el contrato?

Sorprendentemente, mediante el desarrollo que presentaremos a continuación, resulta que no hay una prima de riesgo para el emisor de la opción. Es posible eliminar al mismo completamente aplicando una estrategia dinámica la cual involucra únicamente al activo subyacente. De esta forma, el precio de la opción de compra quedará determinado simplemente por el movimiento del activo subyacente, es decir su volatilidad, y los términos del contrato.

La idea principal que se desarrolla radica en el hecho de que es posible construir una cartera libre de riesgo compuesta por la opción y el activo subyacente, la cual al carecer del mismo tendrá la tasa libre de riesgo r . Esta cartera es factible debido al hecho de que hay una perfecta correlación entre el *call* y el activo subyacente, lo cual permite crear una combinación adecuada utilizando ambos valores. En otras palabras, tanto la opción como el activo dependen de la misma fuente de riesgo: la del proceso estocástico seguido por la acción. La relación entre el precio de la opción y su activo subyacente estará dada por $\partial f / \partial S$, la cual es función del tiempo [Voit, 2005].

Continuando con la explicación crearemos la cartera: estará compuesta de una posición corta de una opción de compra y una posición larga en $\Delta = \partial f / \partial S$ unidades del activo subyacente. Dicha estrategia es dinámica, ya que Δ dependerá del tiempo, y exigirá una constante actualización de la inversión.

De esta forma el valor de la cartera será,

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (\text{C.26})$$

y sigue el proceso estocástico,

$$d\Pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS. \quad (\text{C.27})$$

Para poder continuar debemos presentar dos elementos teóricos: el proceso estocástico Browniano geométrico y el lema de Ito, perteneciente al cálculo estocástico. Una adecuada presentación de ambos temas puede seguirse en el Anexo A, aunque se exhibirán ambas ecuaciones para continuar con el concepto.

El proceso Browniano geométrico se describe mediante,

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (\text{C.28})$$

y la ecuación para el lema de Ito es,

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz. \quad (\text{C.29})$$

Reemplazando estas dos últimas ecuaciones en la correspondiente a $d\Pi$ obtenemos,

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt. \quad (\text{C.30})$$

Es interesante notar que han desaparecido los términos correspondientes a la incertidumbre dz junto con la deriva producida por μ . Dicha consecuencia es lógica ya que la eliminación de la incertidumbre tendrá apareada con ella una eliminación de la deriva de prima de riesgo.

Por otra parte se razona que la cartera al ser libre de riesgo debe tener una tasa r , es decir,

$$d\Pi = r \Pi dt = r \left(-f + \frac{\partial f}{\partial S} S \right) dt. \quad (\text{C.31})$$

Igualando esta con la última ecuación obtendremos la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0. \quad (\text{C.32})$$

Para arribar a la solución Black, al ser un graduado de física, la redujo a una ecuación de difusión (Anexo D) en una dimensión con la siguiente restricción:

$$f = C = \max[S - X; 0] \text{ cuando } t = T.$$

La solución es la siguiente:

$$C(S, t) = f(S, t) = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (\text{C.33})$$

siendo $N(d)$ la función normal de distribución acumulada, la cual depende de

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (\text{C.34})$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Viendo la fórmula se puede ver el atractivo que trajo esta solución cerrada. Es decir, sabiendo solamente el precio del ejercicio, el precio del activo subyacente, la volatilidad y la tasa libre de riesgo es posible determinar el precio esperado de una opción. Una nueva era de paseos aleatorios había comenzado en Wall Street.

ANEXO D

BUENAS PREGUNTAS

A continuación se hará un repaso de los conceptos principales con el objetivo de clarificar algunas dudas que puedan haber quedado en el camino. En algunos casos se repasará lo visto, y en otros se describirá con más claridad y profundidad lo que fue presentado originalmente. Dado que se utilizaron varios conceptos matemáticos y teóricos, es importante que los mismos queden detallados con precisión. No obstante, más allá de las definiciones particulares, lo más importante a tener en cuenta es la magnitud y profundidad con la que se han expandido las preguntas planteadas en la introducción.

Repaso de conceptos.▪ **¿Qué es una martingala?**

En la teoría de la probabilidad, una martingala es un proceso estocástico en donde la esperanza condicional de una observación, dadas todas las anteriores, es igual a su último valor. Es decir, dada una secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$:

$$E(X_{n+1} | X_1, X_2, \dots, X_n) = X_n \quad (\text{D.1})$$

Por ejemplo, un juego en donde la ganancia del participante aumentara o decreciera en un dólar de acuerdo a una moneda podría interpretarse como una martingala. Esto se debe a que la ganancia esperada, dadas todas sus jugadas, es la actual.

▪ **¿Qué es un paseo aleatorio? ¿En qué se diferencia de una martingala?**

Un paseo aleatorio sin deriva, es un caso especial de una martingala, aunque lo contrario no es cierto. En un paseo aleatorio, los incrementos son independientes e idénticamente distribuidos mientras que, en una martingala, los incrementos son independientes pero no necesariamente idénticamente distribuidos.

▪ **¿Qué es un proceso de Markov?**

Un proceso de Markov es un proceso en donde el conjunto de variables aleatorias $\{X_t\}$, dado el presente, es condicionalmente independiente del pasado. Es decir:

$$P(X_t = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}) = P(X_t = j \mid X_{t-1} = i_{t-1}) \quad (D.2)$$

Los procesos de Markov satisfacen la ecuación de Chapman-Kolmogorov presentada en el Capítulo 2. En las finanzas, los procesos de Markov son consistentes con un mercado eficiente.

▪ **¿En qué se diferencia una martingala de un proceso de Markov?**

Un proceso de Markov es uno proceso aleatorio sin memoria, mientras que una martingala tiene su valor esperado sujeto a una condición. Un proceso de Markov no es necesariamente una martingala, y una martingala no es necesariamente un proceso de Markov.

Por ejemplo, una moneda sesgada (sumando +1 si es cara, -1 si es seca) es un ejemplo de un proceso de Markov, aunque no califica como una martingala ya que no esperamos que el siguiente valor sea el mismo que el último.

Por otro lado, un ejemplo en donde, si previamente sale seca, se aplica la regla 1 (+1 si es cara, -1 si es seca) y, si previamente sale cara, se aplica la regla 2 (+2 si es cara, -2 si es seca) califica como una martingala, aunque deja de ser una cadena de Markov. Esto se debe a que el puntaje depende del historial de tiradas.

▪ **¿Qué es el movimiento Browniano?**

El movimiento Browniano, también descrito como un proceso de Wiener $W(t)$, es un proceso estocástico continuo para $t \geq 0$ en donde el incremento $W(t) - W(s)$ sigue una distribución normal con media 0 y varianza $t - s$, para cualquier $0 \leq s < t$ con incrementos independientes para intervalos que no se superponen. Como se puede observar de las definiciones, un proceso de Wiener califica tanto como un paseo aleatorio, una martingala y un proceso de Markov. Matemáticamente la variación de $W(t)$ puede describirse, en el límite, como:

$$dW = \varepsilon \sqrt{dt} \quad \text{en donde} \quad p(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2}\right) \quad (D.3)$$

▪ **¿Un paseo aleatorio es equivalente al movimiento browniano?**

No. Un movimiento Browniano puede ser descripto como un paseo aleatorio particular en donde los incrementos sucesivos se distribuyen según una distribución normal. En el límite, un paseo aleatorio de dimensión 1 tiende a un proceso de Wiener.

▪ **¿Qué es y cómo se aplica el teorema central del límite a los mercados?**

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ es una secuencia de n variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas teniendo valores finitos de esperanza μ y varianza $\sigma^2 > 0$. El teorema central del límite establece que a medida que el tamaño muestral n aumenta, el *promedio* muestral se aproxima a una distribución normal con media μ y varianza σ^2/n . Este proceso es independiente de la forma particular de las distribuciones individuales de las variables. Expresado matemáticamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right) = \Phi(z) \quad \text{siendo} \quad \bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad (\text{D.4})$$

La distribución de Gauss aparece en una gran cantidad de ejemplos en la naturaleza, razón por la cual se la denomina *normal*. En los mercados una infinidad de procesos independientes, aleatorios e idénticamente distribuidos pueden llegar a formar la distribución mencionada. El límite de un paseo aleatorio es precisamente un proceso de Wiener, lo cual se deriva de este mismo teorema. No obstante, existe una variedad de ejemplos en la naturaleza que no siguen la distribución de Gauss. La turbulencia, los terremotos, los latidos del corazón, y las propiedades estadísticas de la variación de precios especulativos no son descriptos por dicha distribución.

▪ **¿Qué implica la hipótesis de la eficiencia en los mercados? ¿Por qué es necesaria?**

La hipótesis de la eficiencia en los mercados, propuesta por Eugene Fama en los años sesenta, establece que toda la información disponible es procesada instantáneamente para ser reflejada en los precios. Este concepto se relaciona directamente a la de un proceso de Markov, es decir no podemos inferir ninguna información de la observación de las series de tiempo.

Asimismo, la noción de que uno no puede vencer al mercado está dada por la definición de una martingala. Dicho concepto fue introducido, a partir del uso de agentes racionales y eficiencia de la información, por Paul Samuelson. La

necesidad de la hipótesis se debe a que sin ella, no podrían utilizarse la mayoría de las herramientas provenientes del cálculo estocástico, tales como las usadas por Bachellier, Black y Scholes.

▪ **¿En que se diferencia el modelo de Bachellier con el de Black y Scholes?**

Si bien ambos estudios utilizan al movimiento Browniano como generador del proceso estocástico, la principal diferencia radica en su armado. El trabajo de Bachellier utiliza para modelar la variación de precios especulativos lo que se denomina como un movimiento Browniano con deriva lineal. Siendo $W(t)$ un proceso estocástico de Wiener, el proceso

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t) \quad (D.5)$$

con constantes $\sigma > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$, representa un proceso Gaussiano con la esperanza y la covarianza descrita por $\mu(t) = \mu t$ y $Cov(t, s) = \sigma^2 \min(t, s)$ respectivamente, para $s, t \geq 0$. El problema con este uso radica en el hecho de que el proceso puede tomar valores negativos y que considera variaciones absolutas en vez de porcentuales.

El modelo propuesto por Black y Scholes toma en cuenta estos factores y utiliza el siguiente proceso:

$$\ln X(t) = \mu t + \sigma W(t) \quad (D.6)$$

Este modelo es conocido como un proceso estocástico denominado movimiento Browniano geométrico. La distribución de probabilidades que describe este proceso es la log-normal, la cual se ajusta mejor a los datos reales. No obstante debe realizarse la siguiente aclaración: mientras la variación de los precios (medidos en dólares, pesos, etc) se encuentran distribuidos según una distribución log-normal, los cambios porcentuales se encuentran distribuidos según una normal.

▪ **¿Qué es el lema de Ito?**

Si bien la demostración matemáticamente correcta esta claramente fuera del alcance de la tesis, es posible proporcionar una explicación que no es complicada de entender. El método consiste en utilizar la conocida expansión de Taylor y aplicar algunas propiedades del cálculo estocástico.

Si se expande $f(x, t)$ en una serie de Taylor en x y t , tendremos:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \dots \quad (D.7)$$

Si el proceso estocástico dx puede ser descripto mediante $dx = adt + bdB$ representando B a un movimiento Browniano, o proceso de Wiener, la última ecuación se modificará a:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} (adt + bdB) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (adt + bdB)^2 + \dots \quad (D.8)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} (adt + bdB) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (a^2 dt^2 + 2abdt dB + b^2 dB^2) + \dots \quad (D.10)$$

En el límite, a medida que dt tiende a 0, los términos dt^2 y $dt dB$ se vuelven despreciables, pero el término dB^2 no, ya que

$$dB^2 \rightarrow E[dB^2] = dt \quad (D.9)$$

De esta forma quitamos los términos despreciables

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} (adt + bdB) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\overset{0}{a^2 dt^2} + 2ab \overset{0}{dt dB} + b^2 \overset{dt}{dB^2} \right) + \dots \quad (D.10)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} (adt + bdB) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (b^2 dt) + \dots \quad (D.11)$$

$$= \left(a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + b \frac{\partial f}{\partial x} dB \quad (D.12)$$

Y arribamos al lema de Ito. La propiedad $dB^2 = dt$ no es trivial y requiere de una demostración formal, pero no se la presentará por razones prácticas.

- ¿En que se relaciona la ecuación del calor a la de Black y Scholes?

La ecuación de Black y Scholes puede ser resuelta mediante su transformación a una ecuación del calor. Es decir, la ecuación de Black y Scholes es un caso especial de la ecuación de calor.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (\text{D.13})$$

Si a la ecuación conocida

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0 \quad \text{con restricción } f = C = \max[S - X; 0]$$

cuando $t = T$. (D.14)

se le realiza el siguiente cambio de variables:

$$\tau = T - t \quad (\text{D.15})$$

$$u = Ce^{r\tau} \quad (\text{D.16})$$

$$x = \ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \quad (\text{D.17})$$

Obtendremos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{con la restricción } u = X \max[e^x - 1; 0], \quad (\text{D.18})$$

la cual es una ecuación de calor.

- **¿La teoría clásica utiliza una distribución normal o log-normal? ¿En que se diferencian?**

Utiliza una log-normal debido a la ventaja de considerar cambios porcentuales, no absolutos. La distribución log-normal es una distribución de probabilidades de una variable aleatoria cuyo logaritmo se encuentra normalmente distribuido. Es decir, si $Y = \log_a X$ se encuentra normalmente distribuido, $X = a^Y$ posee una distribución log-normal para todo $a \neq 1$, y viceversa. La función de

densidad de probabilidades, la acumulada, la esperanza y la varianza de la distribución log-normal son:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (D.19)$$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \quad (D.20)$$

$$E[X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \quad V[X] = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2} \quad (D.21)$$

En el caso de la normal recordamos que la función de densidad de probabilidades es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (D.22)$$

En pos de la simplicidad, a la hora de analizar series de precio, es conveniente trabajar con el logaritmo del precio o con la variación del logaritmo del precio y utilizar la distribución normal como de costumbre.

▪ **¿Cómo se define un proceso estocástico libre de escala?**

Un proceso estocástico es *libre de escala-H* para algún $H > 0$ si satisface la condición

$$(X_{T_{t_1}}, X_{T_{t_2}}, \dots, X_{T_{t_n}}) \stackrel{d}{=} (T^H X_{t_1}, T^H X_{t_2}, \dots, T^H X_{t_n}) \quad (D.23)$$

para todo $H > 0$ y cualquier elección de $t_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $n \geq 1$. Notar que el símbolo de igualdad se refiere a una equivalencia distribucional y no del camino. Por ejemplo, si tomara datos semanales ($T = 7$) de un movimiento Browniano ($H = 0.5$) y los comparara con los datos diarios multiplicados por $7^{0.5}$, debería observar la misma distribución, la cual, en este caso, es la normal.

El hecho de que no sepamos diferenciar datos financieros diarios, mensuales y anuales entre sí sin mirar el eje temporal se debe a esta propiedad; es decir, son iguales en forma.

▪ **¿Como se define una distribución estable de Lévy?**

Las distribuciones estables son los puntos de atracción para la suma de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas. En el caso de que dichas variables tengan varianza finita, la distribución se aproximará a una normal (teorema central del límite); no obstante, para los casos en que no se satisfaga esta condición, la distribución será la conocida como estable de Lévy. El equivalente del teorema central del límite para variables con varianza infinita se debe a Gnedenko y Kolmogorov. Básicamente, el teorema sostiene que si se suman varias variables aleatorias e independientes que en sus extremos se comportan según una ley de potencias $p_i(x_i) \approx |x_i|^{-(1+\alpha)}$, con

$0 < \alpha < 2$, su suma estará distribuida según una distribución de Lévy $\hat{L}(x)_\alpha$. La función característica, en su forma simplificada, es la siguiente:

$$\hat{L}(x)_\alpha = \exp(-c |x|^\alpha) \quad (D.24)$$

Una descripción más detallada, junto con la función característica completa y otras definiciones puede verse en el Capítulo 2, Secciones 1.3 y 1.4.

▪ **¿En qué se diferencia una distribución estable de Lévy de una normal?**

La distribución normal representa un caso particular dentro de la familia de distribuciones de Lévy en el que $\alpha = 2$. La principal diferencia es que la distribución normal posee varianza finita, mientras que las de Lévy poseen varianza infinita. Por otro lado, la función de densidad de probabilidades normal posee una representación analítica, mientras que para la de Lévy debe recurrirse a su función característica.

▪ **¿Qué significa un desvío infinito con esperanza finita?**

Dado que $E(X)$ se encuentra acotado, significa que el segundo momento $E(X^2)$ no lo está. (Recuerde la definición $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$). Es decir, para todo $a > 0$ si

$$E(X^2) = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x^2 p(x) dx \leq a \quad (\text{D.25})$$

la varianza estará acotada. Por ejemplo, la distribución

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2/x^3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (\text{D.26})$$

posee $E(X) = 2$, pero su varianza tiende a infinito:

$$E(X^2) = \int_1^{\infty} x^2 \frac{2}{x^3} dx = \ln \infty - \ln 1 = \infty. \quad (\text{D.27})$$

Cuando se quiera calcular un estimador de la varianza para estos casos, la misma no será estable.

▪ **¿Que significa alfa menor, igual o mayor a 2 en la familia de distribuciones estables de Lévy?**

$\alpha < 1$: Distribución de Lévy con esperanza y varianza infinita.

$1 < \alpha < 2$: Distribución de Lévy con esperanza finita y varianza infinita.

$0 < \alpha < 2$ y $\alpha \neq 1$: distribuciones estables de Lévy (previamente descripta).

$\alpha = 1$: Distribución de Cauchy.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2} \quad (\text{D.28})$$

$\alpha = 2$: Distribución normal.

$\alpha > 2$: Fuera del régimen de estabilidad.

▪ **¿De qué utilidad es la medición del desvío estándar en los mercados?**

Existe una importante diferencia entre procesos con varianza finita e infinita. En el caso de que la hipótesis de la eficiencia en los mercados sea cierta y que la

varianza esté acotada, tiene diversas aplicaciones debido a la maleabilidad del paseo Browniano geométrico: desde calcular probabilidades acumuladas para variaciones de precios de cierto activo, a la valuación de opciones. En el caso de que la hipótesis de la eficiencia en los mercados sea falsa y de que la varianza no esté acotada, no parece ser un buen estimador para medir el comportamiento del mercado ya que el mismo varía constantemente.

- **¿En qué se relaciona una distribución de Lévy con una ley de potencia?**

En dos aspectos. Por un lado, en el sentido que es el punto de atracción para la suma de variables aleatorias e independientes que tienden en sus extremos a $p_i(x_i) \approx |x_i|^{-(1+\alpha)}$, con $0 < \alpha < 2$. Por otro lado, la misma tiende en sus extremos a una distribución de potencias con exponente $-(1+\alpha)$.

- **¿Por qué una ley de potencia define una recta en un gráfico logarítmico doble?**

$$f(x) = ax^b \quad \Rightarrow \quad \log f(x) = \log(a) + b \log(x) \quad (\text{D.29})$$

Es fácil ver que si trazamos $\log(x)$ frente a $\log f(x)$ obtendremos una recta.

- **¿Qué ejemplos existen de sistemas que exhiban leyes de potencia?**

Resulta sorprendente la cantidad de ejemplos de leyes de potencia que se encuentran en la naturaleza. Existe tal cantidad, que la única razón por la cual la distribución de Gauss se llama *normal* se debe al orden cronológico de su descubrimiento. Ejemplos incluyen: distribución de ingresos entre individuos, frecuencia de uso de palabras, magnitud y frecuencia de terremotos (escala de Richter), colaboración de actores en películas, redes sociales, redes de interacción entre proteínas, redes sexuales en humanos, epidemias virales, internet, referencias entre páginas web, citas de autores, descripción de ríos, población en ciudades, número de creyentes en distintas religiones, severidad de eventos violentos en guerras y terrorismo, el ruido rosa (también descrito como ruido $1/f$), nivel de participación en Internet (la regla de 90-9-1), dinámica del corazón, dinámica evolutiva, dinámica de los flúidos y, se espera que el lector posea la suficiente confianza como para sugerir... la variación de precios especulativos (al menos teniendo en cuenta ciertas consideraciones y detalles).

- **¿Los datos observados se ajustan una distribución de Gauss, a una estable de Lévy, a una de potencias o a qué exactamente?**

La respuesta a esta pregunta pareciera ser todas y ninguna a la misma vez. Como se vió en el Capítulo 5 (el estudio de Mantegna referente a la variación de precios en el índice S&P500) si bien la distribución de Lévy, la cual tiende a leyes de potencia en sus extremos, parece ajustarse a los datos bastante bien en cierto rango, a partir de cierto punto se observa que dicha distribución sobre-estima la ocurrencia de eventos extremos. Por el contrario, la distribución de Gauss, subestima la ocurrencia de eventos extremos. Esto sugiere que el proceso real se encuentra en algún punto intermedio.

Debido a esta incongruencia se creó una familia de distribuciones conocida como *truncadas de Lévy*, la cual, por el momento, parece ser la mejor candidata a la hora de ajustarse a los datos empíricos. La forma continua de dicha función fue propuesta por Koponen en 1995. Las distribuciones truncadas de Lévy poseen la particularidad que mientras tienden a una distribución de Lévy para la mayor parte de las variaciones, en sus extremos se aproximan a una distribución normal. Asimismo, para valores finitos de uno de sus parámetros, la varianza y todos sus momentos son finitos. Esto asegura que la suma de variables aleatorias distribuidas según dicha familia tienda a una normal, tal como asegura el teorema central del límite. No obstante, esta convergencia es extremadamente lenta, lo cual permite observar varias de las características de las distribuciones de Lévy, tales como leyes de potencia. Otra cualidad interesante es el hecho de que esta familia no es estable, es decir, es posible observar valores fuera del régimen de estabilidad $0 < \alpha < 2$. Por todas estas razones las distribuciones truncadas de Lévy parecen ser una de las mejores opciones a la hora de modelar los mercados. La función de densidad de probabilidades, al igual que la de Lévy, debe representarse mediante su función característica [Mantegna, Stanley, 2000]:

$$\hat{T}_{\alpha}(x) = \exp \left\{ -a \frac{(b^2 + x^2)^{\alpha/2} \cos \left(\alpha \arctan \frac{|x|}{b} \right) - b^{\alpha}}{\cos \left(\frac{\pi \alpha}{2} \right)} \right\} \quad (D.30)$$

▪ **¿Por qué los datos observados presentan, para diversos intervalos, distintos alfas?**

Si una distribución es estable debería presentar el mismo valor de $\alpha < 2$ para distintos frecuencia de datos. Tal como quería demostrar Mandelbrot en sus estudios, los datos diarios, mensuales y anuales deberían tener la misma “forma”. No obstante, los mismos parecen sugerir que no se cumple la condición de estabilidad, ya que en muchos casos se observan valores de $\alpha > 2$ y una diferencia entre los datos de distinta frecuencia temporal. Todos estos aspectos pueden ser reproducidos por la distribución truncada de Lévy.

▪ **¿En qué se relacionan los fractales a la distribución estable de Lévy?**

Los trayectos producidos por la dinámica de precios no son auto-similares, sino auto-afines. Esto se debe al hecho de que el trayecto generado no posee una dimensión ya que en las abscisas figuran unidades de tiempo y en las ordenadas unidades de precio. La dimensión fractal producida por esta trayectoria es $D_G = 1.5 = 2 - H$. Asimismo, el exponente de Hurst se relacione a las distribuciones de Lévy por medio del exponente $\alpha = 1/H$.

▪ **¿Qué mide H exactamente? ¿Por qué se dice que posee memoria?**

El exponente de Hurst mide como varía el rango reescalado con respecto al número de mediciones. El rango reescalado es simplemente la diferencia máxima entre los desvíos acumulados dividida por su desvío. El Capítulo 5 describe con detalle este proceso.

$$\frac{R}{S} = (c\tau)^H \quad (D.31)$$

Debe recordarse que el mismo no se calcula, sino que es estimado. Si un proceso posee eventos independientes, entonces el valor encontrado será 0.5. Por ejemplo, un paseo aleatorio, el cual está compuesto por eventos independientes, posee un valor de 0.5. Encontrar un valor de 0.5 significa que estamos ante un proceso de eventos independientes, aunque no implica necesariamente que el mismo se encuentre distribuido según una distribución de Gauss. No obstante una distribución de Gauss exige que estemos ante eventos independientes, y por ende, un valor de 0.5 para el exponente de Hurst. La necesidad de la hipótesis de la eficiencia en los mercados se deriva en gran parte de este hecho.

Si se observa un valor distinto de 0.5, significa que no nos encontramos ante un proceso de Markov, es decir, la serie posee memoria. Esto significa que cada valor está influenciado por eventos anteriores. Un valor mayor a 0.5 significa que es un proceso persistente o con tendencia, mientras que un valor menor a 0.5 significa que es un proceso anti-persistente. Los precios especulativos demuestran tendencia, es decir, poseen memoria. La ventaja de este exponente es que es robusto y no incluye suposiciones acerca de la naturaleza de los datos analizados.

▪ **¿Cómo se define un punto crítico? ¿Qué ejemplos existen?**

En la termodinámica, un punto crítico se define como las condiciones bajo las cuales deja de existir un cambio de fase. En este punto pueden observarse distintos comportamientos comunes: divergencias al infinito, propiedades que

se comportan según una ley de potencia a medida que se acercan al punto crítico (exponentes críticos), fractales y estructuras libres de escala. Ejemplos incluyen la transición ferromagnética, transiciones continuas en distintos fluidos, transición a superconductores, el modelo de Ising y la transición a superfluidos. Este paralelismo entre distintos procesos es conocido como universalidad.

▪ **¿Qué es la criticalidad autoorganizada? ¿Qué comportamientos exhibe?**

La criticalidad autoorganizada es una propiedad de algunos sistemas dinámicos que poseen un punto crítico como atractor. Exhiben el mismo comportamiento que el encontrado para sistemas atravesando un punto crítico, aunque con la diferencia que dicho estado es estable, es decir, no hay necesidad de calibrar al mismo. Los sistemas críticos autoorganizados poseen la característica de no poseer una escala de tiempo o espacio determinado. El efecto temporal se relaciona a lo que se conoce como ruido rosa o ruido $1/f$, y el espacial a las estructuras fractales.

▪ **¿Qué es el ruido rosa?**

El ruido rosa se define como una señal en el que su densidad espectral de potencia es inversamente proporcional a su frecuencia. En la comunidad científica se suele referir más libremente como ruido $1/f$ a cualquier señal en donde

$$S(f) \propto \frac{1}{f^\alpha} \quad (\text{D.32})$$

con $0 < \alpha < 2$. El ruido rosa se encuentra en una gran cantidad de ejemplos naturales.

▪ **¿Qué es la densidad espectral de potencias?**

La densidad espectral de potencias es una función real positiva de una variable de frecuencia asociada a un proceso estocástico estacionario o una función determinística del tiempo. Básicamente, a través del mismo es posible identificar periodicidades en una señal.

A diferencia de la densidad espectral de energías, la cual, si es cuadráticamente integrable, puede ser representada mediante el cuadrado de su transformada de Fourier, la densidad espectral de potencias debe ser calculada por medio de la utilización de la función de autocorrelación $R(t)$.

Esto es conocido como el teorema de Wiener-Khinchin y es aplicable si la señal

puede ser considerada un proceso aleatorio estacionario. A continuación se presenta la densidad espectral de energías y potencias respectivamente.

$$S(f) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ift} dt \right)^2 \quad (D.33)$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{if\tau} d\tau \quad (D.34)$$

Se recuerda que la autocorrelación se define como :

$$R(\tau) = \frac{E[(X_t - \mu)(X_{t+\tau} - \mu)]}{\sigma^2} \quad (D.35)$$

▪ **¿Qué es una función característica? ¿En qué se relaciona a la transformada de Fourier?**

Para una variable aleatoria escalar X con una función de densidad de probabilidades $f_X(x)$, la función característica $\varphi_X(t)$ se define como el valor esperado de e^{itX} . Expresado matemáticamente:

$$\varphi_X(t) : R \rightarrow C ; \quad \varphi_X(t) = E[e^{itx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx \quad (D.36)$$

Si $F_X(t)$ representa la transformada de Fourier de $f_X(x)$, entonces la función característica será el conjugado de la misma y viceversa.

$$\varphi_X(t) = \overline{F_X(t)} \quad (D.37)$$

Podemos recuperar $f_X(x)$ simplemente por medio de aplicar la transformada de Fourier a $\varphi_X(t)$.

▪ **¿Qué es un sistema adaptativo complejo? ¿Qué comportamiento exhibe?**

Un sistema adaptativo complejo puede ser definido como una colección macroscópica de unidades simples que interaccionan entre sí con la capacidad

de evolucionar y adaptarse al ambiente. El orden y la estructura no se encuentran predeterminados, emergen del comportamiento del sistema; asimismo, la historia del sistema es irreversible y su futuro impredecible.

▪ **¿En que se diferencia un sistema crítico autoorganizado de un sistema adaptativo complejo?**

Si bien ambos son utilizados para describir sistemas con comportamientos no triviales, no existe una clara distinción que pueda ser usada para decir que tal sistema es uno crítico autoorganizado y tal sistema es uno adaptativo complejo. No obstante, la criticalidad autoorganizada puede ser descripta como un área, dentro del estudio de los sistemas adaptativos complejos, enfocada en ciertas propiedades utilizadas por la mecánica estadística, y no viceversa; es decir, un sistema adaptativo complejo es más amplio desde el punto de vista teórico.

▪ **¿En que se diferencia la simulación basada en agentes de un autómata celular?**

En una simulación basada en agentes existe una clara distinción entre el agente y su entorno mientras que un autómata celular es básicamente una grilla con un conjunto específico de reglas. El autómata celular es más simple y abstracto, mientras que una simulación con agentes puede tener tantos aspectos que se asemejen a la vida real como quiera su diseñador.

▪ **¿En que se relaciona una red social con una ley de potencia? ¿Y con un fractal?**

Las redes sociales forman estructuras conocidas como libres de escala (también califican como mundos pequeños). Este tipo de redes posee la cualidad que la cantidad de conexiones por nodo sigue una ley de potencias. El exponente de la misma por lo general se encuentra entre 2 y 3.

La estructura compleja formada por estas redes puede ser descripta por su dimensión fractal.

▪ **¿Que tienen en común las leyes de potencia con los fractales?**

La dimensión fractal puede ser estimada al calcular como varía cierta longitud del fractal, tal como la circunferencia, a medida que decrece la escala de medición. Para fractales bidimensionales la formula es:

$$N(2r)^D = 1 \quad (D.38)$$

ANEXO E

OTRAS TEORÍAS

Existe una infinidad de estudios novedosos, muchos de los cuales si no fueron mencionados, fueron hechos de forma parcial. Esto se debe obviamente al hecho de que una tesis, por más abarcativa que pretenda ser, no puede recorrer todos los aspectos que quisiera, ya que en ciertos momentos es preferible la profundidad a la cantidad. Los dos grandes temas que se dejaron de lado fueron la teoría del caos y lo que se conoce como procesos ARCH y GARCH. Se dará una breve descripción de ambos, lo suficiente como para quién esté interesado pueda saber medianamente de qué se tratan.

Teoría del caos.

La teoría del caos se define como un campo de estudio de la física, la matemática y la biología entre otros, que estudia el comportamiento de sistemas dinámicos altamente sensibles a sus condiciones iniciales. Ciertos modelos matemáticos demuestran esta propiedad, ya que a pesar de ser completamente determinísticos es imposible predecir su estado futuro a partir de los datos iniciales. El ejemplo más conocido de una ecuación caótica es la se conoce como la ecuación logística:

$$X_{t+1} = aX_t(1 - X_t) \quad \text{en donde} \quad 0 < X \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 < a \leq 4 \quad (\text{E.1})$$

Variando el parámetro a se podrá observar que la serie de tiempo X_t para $a = 2$ tiende a un valor estable. A partir de $a = 3$ el sistema no tiende a un sólo valor, sino que pasa a oscilar entre dos valores. A partir de $a = 3.48$ el mismo pasará a fluctuar entre cuatro valores. Estos valores críticos empiezan a amontonarse ya que se observan una fluctuación entre ocho valores para $a = 3.54$ y dieciséis para $a = 3.564$. Finalmente, a partir de $a = 3.6$ el sistema pierde estabilidad: el número de soluciones es infinita. Este proceso puede representarse mediante un diagrama de bifurcaciones (*Figura 8.4*).

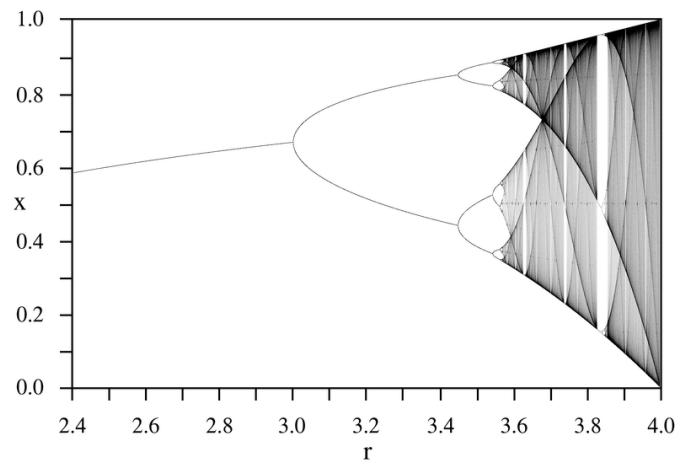


Figura 8.4

Este diagrama presenta dos hechos sumamente interesantes. Por un lado, la división de la distancia entre puntos críticos consecutivos produce el mismo número $F = 4.6692011\dots$, conocido como la constante de Feigenbaum. Por otro lado la figura formada en el diagrama de bifurcaciones es fractal: a medida que achicamos la escala podremos ver una y otra vez la misma figura.

Existen muchos estudios que intentan modelar el comportamiento de un mercado mediante una ecuación semejante a la logística. La teoría del caos se relaciona al estudio de los sistemas complejos adaptativos.

Otros temas para incursionar: mapa de Henon, exponentes de Lyapunov.

Procesos ARCH y GARCH

Los procesos ARCH y GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) son modelos utilizados para describir procesos estocásticos que son localmente no-estacionarios pero asintóticamente estacionarios. Esto significa que los parámetros controlando la función de densidad de probabilidades fluctúan. Los procesos ARCH(q) y GARCH(p,q) quedan definidos respectivamente por las ecuaciones:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q x_{t-q}^2 \quad (\text{E.2})$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q x_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2 \quad (\text{E.3})$$

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \beta_p$ son variables positivas y x_t es una variable aleatoria con media cero y varianza σ_t^2 , caracterizada por una función de densidad de probabilidades $f_t(x)$.

Más allá de su funcionamiento, se debe prevenir al lector de la filosofía inherente en dicha metodología. Como advierte Mandelbrot en su libro *The (mis)Behaviour of Markets* [Mandelbrot, 2004]:

“Muchos, con nombres poco atractivos tales como GARCH y FIGARCH, simplemente emparchan los antiguos modelos.”

“Pero tales arreglos ad hoc son medievales. Trabajan alrededor, en vez de dar forma y explicar la evidencia contradictoria. Son análogos a los innumerables ajustes realizados por el antiguo sistema Ptolomérico para acomodar las molestas nuevas observaciones.”

ANEXO F

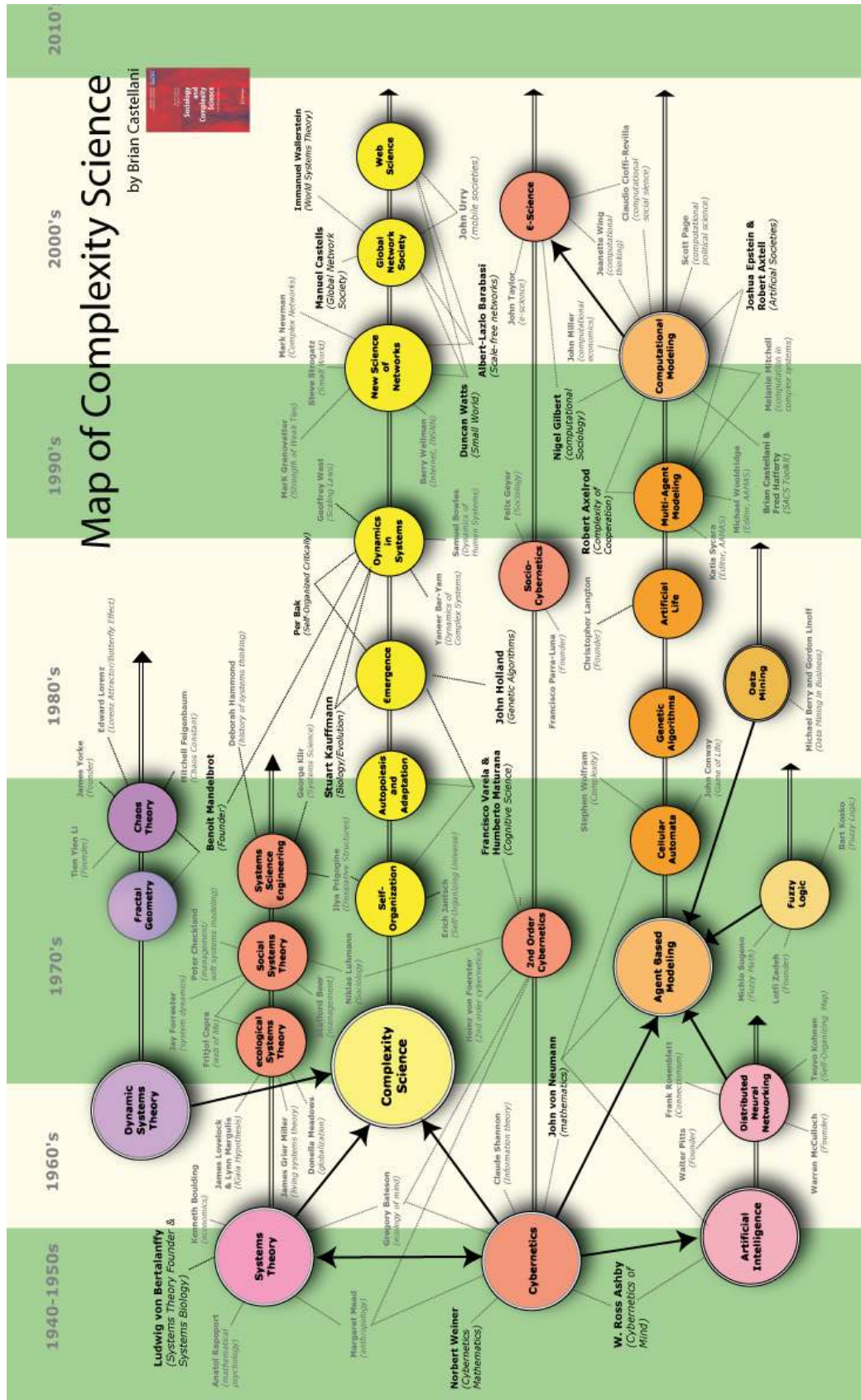


Figura F.1: [Castellani, 2009]

ANEXO G

EXPONENTE DE HURST

```

Public serie(1000)
Public Sub Cargar()

'Cargo los datos de la columna E. a representa la fila inicial de E.

a = 4
j = 1

Do Until IsEmpty(Sheets("Sheet1").Range("E" & a, "E1000"))
    serie(j) = Sheets("Sheet1").Range("E" & a).Value
    j = j + 1
    a = a + 1
Loop

End Sub

Function Promedio(a, b)
'Función para calcular el promedio entre la posición a y la b del vector serie.
Suma = 0
n = 0
j = a
Do While j <= b
    Suma = Suma + serie(j)
    j = j + 1
    n = n + 1
Loop

Promedio = Suma / n

End Function

Function MaxX(a, b)
'Calcula el desvío acumulado máximo del promedio entre las posiciones a y b del vector serie.
j = a
Prom = Promedio(a, b)

Do While j <= b
    Suma = Suma + (serie(j) - Prom)

    If Suma > Max Then
        Max = Suma
    End If

    j = j + 1
Loop

MaxX = Max

End Function

Function MinX(a, b)
'Calcula el desvío acumulado mínimo del promedio entre las posiciones a y b del vector serie.
j = a
Prom = Promedio(a, b)

Do While j <= b
    Suma = Suma + (serie(j) - Prom)

    If Suma < Min Then
        Min = Suma
    End If

    j = j + 1
Loop

MinX = Min

End Function

Function RS(a, b)
'Calcula R/S entre las posiciones a y b del vector serie.
Min = MinX(a, b)
Max = MaxX(a, b)
desv = Desvio(a, b)
RS = (Max - Min) / desv

End Function

Function Desvio(a, b)
'Calcula S entre las posiciones a y b del vector serie.
j = a
Prom = Promedio(a, b)

Do While j <= b
    Suma = Suma + (serie(j) - Prom) ^ 2

    n = n + 1
    j = j + 1
Loop

Desvio = ((1 / n) * (Suma)) ^ (1 / 2)

End Function

Sub PromRS()
'Carga el vector serie
Cargar

```

```
'Comienza con un intervalo de 8 datos, y la cantidad de divisiones correspondientes.
Intervalo = 8
Divisiones = Datos \ Intervalo

Dim VectorRS(2, 1000)

'Calcula el promedio de R/S para todas los intervalos (tau).
j = 1
Do While Divisiones >= 1
    n = 0
    Suma = 0
    For i = 1 To Divisiones * Intervalo Step Intervalo
        Suma = Suma + RS(i, i + Intervalo - 1)
        n = n + 1
    Next
    'Graba el valor R/S correspondiente al intervalo (tau)
    PromedioRS = Suma / n
    VectorRS(1, j) = Intervalo
    VectorRS(2, j) = PromedioRS

    'Aumenta el intervalo en uno
    Intervalo = Intervalo + 1
    Divisiones = Datos \ Intervalo

    j = j + 1
Loop
'Escribe los resultados en las columnas G y H.
j = 1
a = 4
Do Until VectorRS(1, j) >= Datos
    Sheets("Sheet1").Range("G" & a) = VectorRS(1, j)
    Sheets("Sheet1").Range("H" & a) = VectorRS(2, j)
    j = j + 1
    a = a + 1
Loop
End Sub
```

Figura G.1: programa en Visual Basic para calcular el exponente de Hurst de una serie de tiempo

BIBLIOGRAFÍA

Bachelier, Louis. 1900. Théorie de la spéculation. Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e serie, tome 17. p 21-86.

Bak, P., Tang, C., Wiesenfeld, K. 1987. Self organized criticality. Physical review letters. 59:381.

Ball, Phillip. 2004. Critical mass: how one thing leads to another. 644 páginas. Arrow Books. ISBN 9780099457862.

Beinhocker, Eric D. 2006. The origin of wealth: evolution, complexity, and the radical remaking of economics. 527 páginas. McKinsey & Company. ISBN 1-57851-777-X

Black, Fischer; Myron Scholes. 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81 (3): 637–654.

Bowles, Thomas. 1720. The South Sea Bubbles Playing Cards.
http://en.wikipedia.org/wiki/File:South_Sea_Bubble_Cards-Tree.png

Castellani, Brian. 2009. Map of Complexity Science.
http://www.art-sciencefactory.com/complexity-map_feb09.html

Chancellor, Edward. 1999. Devil take the hindmost: a history of financial speculation. 386 páginas. Penguin Books. ISBN 0-374-13858-3.

Epstein, Joshua M. 1996. Growing artificial societies: social science from the bottom up. 208 páginas. The Brookings Institution. ISBN 0-262-05053-6.

Farmer, Doyne J. 2004. The predictive power of zero intelligence in financial markets. Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America.
<http://www.aakkozzll.com/pdf/farmer.pdf>

Galbraith, John Kenneth. 1990. A short history of financial euphoria. 111 páginas. Penguin Books. ISBN 0-670-85028-4

Gilbert, Nigel. 2008. Agent-based models. Quantitative applications in the social sciences. 97 páginas. Sage publications. ISBN 978-1-4129-4964-4.

Gonçalves, Carlos Pedro. 2003. Artificial Financial Market. Netlogo User Community Models.
<http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/community/Artificial%20Financial%20Market>

Jensen, Henrik Heldtoft. 1998. Self-organized criticality. 153 páginas. Cambridge university press. ISBN 0-521-48371-9.

Leskovek, Jure. 2009. Meme-tracking and the dynamics of the news cycle.
<http://memetracker.org/quotes-kdd09.pdf>

Lindgren, K. 1991. "Evolutionary Phenomena in Simple Dynamics." In: *Artificial Life II*. Langton et al (Eds). Addison-wesley, pp. 295-312.

Lux, Thomas y Marchesi, Michele. 1999. Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model on financial markets. *Nature*. Vol 397, páginas 498-500.

Mackay, Charles. 1841. Extraordinary popular delusions and the madness of crowds. ISBN 1586635581

Madame Curie Bioscience Database, Power Law Correlations in DNA Sequences. <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/bookshelf/br.fcgi?book=eurekah&part=A66065&rendertype=figure&id=A66100>

Mandelbrot, Benoit B. 2002. A maverick's apprenticeship. The wolf's prizes for physics, Imperial College press.

Mandelbrot, Benoit B. 2004. The (mis)behaviour of markets: a fractal view of financial turbulence. 328 páginas. Basic Books. ISBN-13978-0-465-04357.

Mandelbrot, Benoit B. 1997. Fractals and scaling in finance: discontinuity, concentration, risk. 549 páginas. Springer Science. ISBN 978-0-387-98363-9.

Markowitz, H.M. 1952. Portfolio Selection. *The Journal of Finance* 7 (1): 77–91.

Markowitz, H.M. 1990. Autobiography. The Nobel Prizes 1990, Editor Tore Frängsmyr, [Nobel Foundation], Stockholm, 1991. http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1990/markowitz-autobio.html

McCauley, Joseph L. 2004. Dynamics of markets: econophysics and finance. 209 páginas. Cambridge University press. ISBN 978-0-521-03628-3.

Mantegna, Rosario N. y Stanley, Eugene H. 2000. An introduction to econophysics: correlations and complexity in finance. 148 páginas. Cambridge University press. ISBN 978-0-521-03987-1.

Mikosch, Thomas. 1998. Elementary stochastic calculus with finance in view. 212 páginas. World Scientific publishing. ISBN-13 978-981-02-3543-7.

Mitchell, Melanie. 2009. Complexity: a guided tour. 349 páginas. Oxford University press. ISBN 978-0-19-512441-5.

North, Michael J. 2007. Managing business complexity: discovering strategic solutions with agent-based modeling and simulation. 313 páginas. Oxford University press. ISBN-13 978-0-19-517211-9.

Pareto, Vilfredo. 1909. Manuel d'economie politique.

Peters, Edgar E. 1996. Chaos and order in the capital markets: a new view of cycles, prices, and market volatility. 274 páginas. Wiley Finance editions. ISBN 0-471-13938-6.

Peters, Edgar E. 1994. Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics. 315 páginas. Wiley Finance editions. ISBN 0-471-58524-6.

Scholes, Myron S. 1997. Autobiography. From Les Prix Nobel. The Nobel Prizes 1997, Editor Tore Frängsmyr, [Nobel Foundation], Stockholm.

Sharpe, William F. 1964. *Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk*, Journal of Finance, 19 (3), 425-442.

Sharpe, William F. 1990. Autobiography. The Nobel Prizes 1990, Editor Tore Frängsmyr, [Nobel Foundation], Stockholm, 1991.
http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1990/sharpe-autobio.html

Sornette, Didier. 2003. Why stock markets crash: critical events in complex financial systems. 421 páginas. Princeton University press. ISBN 0-691-11850-7.

Norton Simon Art Foundation. 2010. The Great Tulip Book. Artista anónimo.
<http://www.nortonsimon.org/collections/highlights.php?period=17H&resultnum=13>

Thompson, Earl A. 2006. The tulip mania: fact or artifact? Springer Science.
<http://www.econ.ucla.edu/thompson/document97.pdf>

van der Waals, Johannes. 1910. The equation of state for gases and liquids. Nobel Lecture. http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1910/waals-lecture.pdf

Vaga, Tonis. 1994. Profiting from chaos: using chaos theory for market timing, stock selection, and option valuation. 248 páginas. McGraw-Hill. ISBN 0-07-066786-1.

Voit, Johannes. 2005. The statistical mechanics of financial markets. 3rd Edition. 378 páginas. Springer-Verlag. ISBN 103-540-26285-7.