

**OBSERVADORES PARA SISTEMAS LIPSCHITZ
CONTINUOS**

por
Santiago M. Hernandez

EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS
REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERÍA

DEL

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES
BUENOS AIRES, ARGENTINA
6 DE AGOSTO, 2012

© Copyright Santiago M. Hernandez, 2012

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES

DEPARTAMENTO DE DOCTORADO

Los aquí suscriptos certifican que han asistido a la presentación oral de la Tesis “**Observadores para Sistemas Lipschitz Continuos**” cuyo autor es **Santiago M. Hernandez** completando parcialmente, los requerimientos exigidos para la obtención del Título de **Doctor en Ingeniería**.

Fecha: 6 de Agosto, 2012

Director:

Dr. Rafael A. García

Tribunal de Tesis:

Dra. Elena Fernández Berdaguer

Dr. Aníbal Zanini

Dr. José Luis Mancilla-Aguilar

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES

Fecha: **6 de Agosto, 2012**

Autor: **Santiago M. Hernandez**

Título: **Observadores para Sistemas Lipschitz Continuos**

Departamento: **Doctorado**

Título Académico: **Doctor en Ingeniería** Convocatoria: **Mes** Año: **Año**

Por la presente se otorga permiso al Instituto Tecnológico de Buenos Aires (ITBA) para: (i) realizar copias de la presente Tesis y para almacenarla y/o conservarla en el formato, soporte o medio que la Universidad considere conveniente a su discreción y con propósitos no-comerciales; y, (ii) a brindar acceso público a la Tesis para fines académicos no lucrativos a los individuos e Instituciones que así lo soliciten (incluyendo, pero no limitado a la reproducción y comunicación al público no comercial de toda o parte de la Tesis, a través de su sitios o páginas Web o medios análogos que en el futuro se desarrollen).

A excepción de lo autorizado expresamente en el párrafo precedente, me reservo los demás derechos de publicación y, en consecuencia, ni la Tesis ni extractos de la misma podrán ser impresos o reproducidos de otro modo sin mi previo consentimiento otorgado por escrito.

Declaro que he obtenido la autorización para el uso de cualquier material protegido por las leyes de propiedad intelectual mencionado o incluido en la tesis (excepto pasajes cortos, transcripciones, citas o extractos que solo requieran ser referenciados o citados por escrito) y que el uso que se ha hecho de estos está expresamente reconocido por las leyes aplicables en la materia.

Finalmente, manifiesto que la presente autorización se firma en pleno conocimiento de la Política de Propiedad Intelectual del ITBA y, en forma específica, del Capítulo 2.3. referido a la titularidad de derechos de propiedad intelectual en el ITBA y/o, según el caso, a la existencia de licencias no exclusivas de uso académico o experimental por parte del ITBA de la Tesis o la obra o de las invenciones allí contenidas o derivadas de ella.

Hago entrega en este acto de un ejemplar de la Tesis en formato impreso y otro en formato electrónico.

Firma del Autor

Índice general

Resumen	IX
Lista de Publicaciones	XI
Reconocimientos	XIII
Notaciones	XVII
Lista de Figuras	XVIII
Capítulo 1. Introducción General	1
Capítulo 2. El Problema de Observación de Estados	5
2.1. Modelos matemáticos	6
2.2. El problema de observación	7
2.3. Condiciones para la existencia de una solución	9
Capítulo 3. Observación Mediante Mapas Inyectivos	13
3.1. Introducción	13
3.1.1. El Observador de Kazantzis–Kravaris/Luenberger	15
3.1.2. El Observador de Kreisselmeier y Engel	17
3.2. Formulación del Problema	21
3.3. Observabilidad y Mapas Inyectivos	23
3.3.1. Observabilidad	23
3.3.2. Mapas Inyectivos	24
3.4. El Observador	31
3.5. Ejemplo Numérico	33
3.6. Conclusiones	37

Capítulo 4. Método Alternativo – Sistemas a Lazo Abierto	39
4.1. Introducción	39
4.1.1. Observación por Optimización	40
4.1.2. Método alternativo de observación de estados – Descripción conceptual	49
4.2. Formulación del Problema	57
4.2.1. Principio Básico	57
4.3. El Observador: caso sistemas autónomos	62
4.3.1. Convergencia del Observador	74
4.4. Extensión a Sistemas con Controles	80
4.5. Ejemplos Numéricos	85
4.5.1. Sistemas Autónomos	85
4.5.2. Sistemas con Controles	86
4.6. Conclusiones	90
Capítulo 5. Método Alternativo – Sistemas Conmutados	91
5.1. Introducción	91
5.1.1. Clases de Sistemas Conmutados	92
5.2. Formulación del Problema	96
5.3. El Observador – caso no-autónomo	97
5.4. El caso autónomo	101
5.5. Ejemplos Numéricos	106
5.5.1. No-autónomo con una señal de conmutación conocida	106
5.5.2. Sistema conmutado autónomo	107
5.6. Conclusiones	113
Capítulo 6. Método Alternativo – Estabilización Mediante Realimentación de Salidas	115
6.1. Introducción	115
6.1.1. Sistemas Considerados	116
6.1.2. Controlabilidad Asintótica y Estabilización por realimentación	117

6.1.3.	Funciones de control de Lyapunov	119
6.1.4.	Estabilidad Entrada Estados	123
6.2.	El problema de estabilización por realimentación de salidas	126
6.2.1.	El Tándem Observador/Realimentación	126
6.2.2.	Error en la señal de control	127
6.2.3.	Diseño del observador	131
6.3.	Ejemplo Numérico	139
6.4.	Conclusiones	145
Capítulo 7.	Conclusiones Generales	147
Apéndice A.	Sistemas	149
Bibliografía		152

Resumen

Esta tesis trata el problema de observación de estados para sistemas Lipschitz continuos. Los aportes se dividen esencialmente en dos ramas. En primer lugar se elabora una extensión para sistemas con controles de un observador para sistemas autónomos presente en la literatura cuya cualidad es capturar la información del sistema a través de la historia de sus mediciones utilizando mapas inyectivos. En segundo lugar se elabora un observador alternativo de carácter general, que no parte de trabajo previo, y que es aplicado a los casos autónomo, con controles a lazo abierto, a sistemas conmutados y al problema de estabilización por realimentación.

Lista de Publicaciones

Lo reportado en las siguientes publicaciones conforma la base de la presente tesis.

- R. A. García and S. M. Hernandez, *An observer for controlled Lipschitz continuous systems*, Proceedings de la XI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (RPIC), 2005.
- _____, *An observer for controlled Lipschitz continuous systems*, Latin American Applied Research **36** (2006), 109–114.
- S. M. Hernández and R. A. García, *An observer for Lipschitz continuous systems: an alternative approach*, Proceedings de la XIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (RPIC), 2009.
- _____, *An alternative approach to the state observation problem for Lipschitz continuous systems with controls*, American Control Conference (ACC), 2010, pp. 5272–5277.
- _____, *An observer for Lipschitz continuous systems – an alternative approach*, Latin American Applied Research (enviado) (2011).
- _____, *An observer for switched Lipschitz continuous systems*, International Journal of Control (enviado) (2012).

Reconocimientos

Esta tesis de doctorado es el resultado de varios años de trabajo, atravesados tanto por momentos difíciles así como amenos, los cuales dejan en mí gratos recuerdos del Instituto Tecnológico de Buenos Aires, lugar al que debo mis agradecimientos por haber confiado considerables recursos a mi formación doctoral.

En primer lugar, agradezco el trabajo de dirección de tesis y tutelaje del Dr. Rafael A. García quien desde el inicio de mis actividades en el marco del doctorado, y a lo largo de todo el trayecto, me ofreció sin mezquindades valiosas horas de su tiempo y una libertad de decisión para abordar los problemas planteados que me ha dejado valiosas enseñanzas.

Mis agradecimientos especiales a los miembros del Jurado, la Dra. Elena Fernández Berdaguer y los Dres. Aníbal Zanini y José Luis Mancilla-Aguilar, por su arduo trabajo de evaluación de la tesis y sus valiosas sugerencias y apreciaciones.

A los diferentes compañeros de lugar de trabajo, de almuerzos y de cafés, cuyos consejos y amistad siempre fueron un punto de apoyo para avanzar. Aunque el tiempo compartido no haya sido el mismo en todos los casos mi agradecimiento obedece a la imparcialidad del orden alfabético: Ignacio Álvarez-Hamelin, Victor Bettachini, Eduardo Bonelli, Pablo Fierens, Alejandro Ghersin, Diego Grosz, Santiago Ibáñez, Pablo König, José Orlicki, Alfredo Ortega, Daniel Parisi, Germán Patterson.

Al Dr. Roberto Perazzo en su carácter de Director del Doctorado en Ingeniería Informática, primera persona con la que tomé contacto al decidir comenzar este camino y cuya confianza y sabios consejos siempre fueron de gran ayuda. Asimismo, al Dr. Ricardo Sánchez-Peña, Director del Doctorado en Ingeniería, por sus valiosas sugerencias.

A mis amigos de la vida, ellos todos. Especialmente a Emiliano, Fernando, Nicolás y Pablo, siempre presentes.

A mis abuelos que ya no están pero cuyo recuerdo siempre me acompaña, Coca y

Elías, Jorge y Lita. Por ver en mí a la persona que todavía no llegué a ser.

A mis padres, Beatriz y Jorge. Por su cariño y apoyo incondicional en todas y cada una de las decisiones importantes de mi vida.

Notaciones

\mathbb{R}	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Conjunto de los números reales mayores o iguales a cero.
\mathbb{C}	Conjunto de los números complejos.
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales.
\mathbb{N}_0	Conjunto de enteros no negativos.
\mathbb{R}^n	Conjunto de los vectores reales n -dimensionales.
$\mathbb{C}^{n \times m}$	Conjunto de las matrices complejas (o reales para $\mathbb{R}^{n \times m}$) de n filas y m columnas.
$ \cdot $	Norma Euclídea en \mathbb{R}^n .
$\text{cmp}(A)$	Clase de subconjuntos compactos de A .
$\#(A)$	El cardinal de A .
2^A	El conjunto de todos los subconjuntos con elementos de A (<i>power set</i>).
$\mathcal{C}(A)$	Conjunto de funciones continuas con dominio A .
\mathcal{K}	Una función $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ se dice de clase \mathcal{K} ($\alpha \in \mathcal{K}$) si es continua, estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$.
\mathcal{K}^∞	Una función $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ se dice de clase \mathcal{K}^∞ ($\alpha \in \mathcal{K}^\infty$) si es de clase \mathcal{K} y no es acotada, <i>i.e.</i> satisface $\lim_{r \rightarrow +\infty} \alpha(r) = +\infty$.
\mathcal{KL}	Una función $\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ se dice de clase \mathcal{KL} si, para cada número real s no negativo, la función $r \mapsto \beta(r, s)$ es de clase \mathcal{K} y, para cada número real r estrictamente positivo, la función $s \mapsto \beta(r, s)$ es estrictamente decreciente y satisface $\lim_{s \rightarrow +\infty} \beta(r, s) = 0$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Es el producto interno usual.

Dado un vector $\xi \in \mathbb{R}^n$:

- $\xi^{(i)}$ Refiere a la i -ésima coordenada de ξ .
- ξ^T Refiere al vector ξ transpuesto. Para una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $A^T \in \mathbb{C}^{m \times n}$ es la correspondiente matriz transpuesta.
- $|\xi|_\infty$ Norma del máximo: $|\xi|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\xi^{(i)}|$.
- $\text{dist}(\xi, A)$ Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, $\text{dist}(\xi, A) = \inf\{|\xi - x|_\infty, x \in A\}$.
- $[A]_\gamma$ Para cualquier $\gamma > 0$, $[A]_\gamma := \{x : \text{dist}(x, A) \leq \gamma\}$.
- $\text{diam}(A)$ Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ su diámetro $\text{diam}(A) = \sup\{|x - y|_\infty : x, y \in A\}$.
- $B(\xi, \varepsilon)$ Dado $\varepsilon > 0$, $B(\xi, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \xi|_\infty < \varepsilon\}$.

Si \star es un operador binario definido sobre algún conjunto X , y A y B son subconjuntos de X , denotamos

$$A \star B = \{a \star b : a \in B, b \in B\}.$$

Cuando tratamos con funciones sobre conjuntos en algunos casos haremos el siguiente abuso de notación: *e.g.*, el conjunto $\{1, 2, 3\} \neq \{2, 3, 1\}$ y $\{1, 2, 2, 3\} \neq \{1, 2, 3\}$, por lo tanto nos ocuparemos implícitamente del orden de los elementos del conjunto como también de aquellos elementos que aparezcan repetidos¹.

Dados $E \in \text{cmp}(\mathbb{R}^p)$ y una función localmente Lipschitz continua $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ denotamos L_g^E a su constante de Lipschitz y $\|g\|_E$ a la norma del supremo de g sobre E , *i.e.*:

$$\|g\|_E = \sup_{x \in E} |g(x)|.$$

¹Es decir que en rigor estamos considerando a los conjuntos como si fueran *tuplas*, pero por simplicidad no se introducirá nueva notación ya que quedará claro del contexto.

Índice de figuras

2.1.	Sistema y observador.	7
3.1.	x_1 vs. \hat{x}_1 en función del tiempo.	34
3.2.	x_2 vs. \hat{x}_2 en función del tiempo.	35
3.3.	Salida y en función del tiempo.	35
3.4.	Error de estimación para x_1	36
3.5.	Error de estimación para x_2	36
4.1.	Evolución del segmento para $\dot{x} = 0$	46
4.2.	Evolución del segmento para $\dot{x} = f(x) \neq 0$	49
4.3.	Salida respecto de la Figura 4.2.	50
4.4.	Para un sistema con $n = 2$ y $p = 1$	51
4.5.	Sistema lineal con $n = 2$	53
4.6.	Caso discreto.	54
4.7.	En la práctica.	55
4.8.	Principio básico.	59
4.9.	Malla.	63
4.10.	Evolución del espacio de búsqueda.	67
4.11.	Descarte de estados.	69
4.12.	Espacio de búsqueda vs. x_2 (arriba) y x_3 (abajo) vs. tiempo.	87
4.13.	Estados del sistema y salida vs. tiempo.	88
4.14.	Error de estimación vs. tiempo.	88
4.15.	Espacio de búsqueda y salida vs. x_1 vs. tiempo.	89
4.16.	Espacio de búsqueda vs. x_2 vs. tiempo.	89
4.17.	Error de estimación vs. tiempo.	89
5.1.	Estados reales del sistema vs. espacios de búsqueda, y señal de conmutación.	108

5.2.	Error de estimación.	109
5.3.	Tamaño del espacio de búsqueda.	109
5.4.	Estados reales del sistema vs. espacios de búsqueda.	111
5.5.	Error de estimación.	112
5.6.	Salida del sistema (arriba) vs. tamaño del espacio de búsqueda (abajo).	112
6.1.	Evolución de la variable de estados x	142
6.2.	x_1 versus $D_t^{(1)}$	142
6.3.	x_2 versus $D_t^{(2)}$	143
6.4.	x_3 versus $D_t^{(3)}$	143
6.5.	Salida $y = h(x)$	144
6.6.	Evolución del tamaño ($\#(D_t)$) del espacio de búsqueda.	144

Capítulo 1

Introducción General

En Teoría de Sistemas y Control muy frecuentemente se busca describir sistemas dinámicos de la vida real con modelos matemáticos. Estos modelos matemáticos por lo general describen la dinámica de dichos sistemas utilizando una representación en variables de estado. Para un instante de tiempo dado, una *variable de estado* representa toda la información que se necesita saber de dicho sistema para conocer cómo evolucionará al instante siguiente (en casos determinísticos en forma exacta y en casos estocásticos en forma probabilística). Entonces conocer el valor de dicho estado es de gran importancia fundamentalmente para aplicaciones de control.

Ya sea que el sistema sea de tiempo discreto o continuo, con estados finito o infinito dimensionales, en la práctica suele ocurrir que no se cuenta con el conocimiento del estado completo. Debido a limitaciones en los sensores (por razones de costo, tecnológicas, *etc.*) las señales medidas en forma directa no coinciden con las variables de estado.

De tal manera, reconstruir las variables de estado (*i.e.*, el problema de estimación u observación de estados) a partir de información parcial suministrada por los sensores es de gran importancia en la práctica y constituye el eje central de esta tesis.

El problema de observación o del diseño de un observador para un sistema dado visto como la obtención de información interna a partir de mediciones externas también se puede extender a las aplicaciones de modelado (*identificación* de parámetros) y de monitoreo (*detección de fallas*). Claro que, en rigor, en estos últimos casos lo que se “observa” o estima no son lo que habitualmente se considera como variables de estado pues en el primer caso los parámetros suelen ser constantes y en el segundo

se trata de detectar perturbaciones externas que no se miden en forma directa. Las aplicaciones descritas en este párrafo no formaran parte del alcance de este trabajo.

En esta tesis trataremos el problema de observación de estados para sistemas descritos por funciones localmente Lipschitz continuas. La estructura de la misma está dividida en dos partes esencialmente distintas: por un lado en el capítulo 3 se realiza una extensión de un observador conocido en la literatura, mientras que en los capítulos subsiguientes se desarrolla un método alternativo que no parte de otros previos.

En el capítulo 2 de este manuscrito, presentamos el problema de observación de estados y pasamos revista de los esquemas de observadores presentes en la literatura.

En el capítulo 3, se diseña un observador que es una extensión a sistemas con controles a lazo abierto del observador de Kreisselmeier y Engel para sistemas Lipschitz continuos autónomos ([33]), y que se basa en la construcción de mapas inyectivos que relacionan mediciones con estados.

En el capítulo 4, se presenta un enfoque alternativo al problema de observación de estados que no parte de trabajo previo alguno. Se utiliza un algoritmo que genera conjuntos de estimaciones y que se basa en suposiciones débiles sobre los sistemas considerados. Este capítulo se concentra en los casos autónomos y con controles a lazo abierto.

En el capítulo 5, se utiliza el método alternativo presentado en el capítulo anterior para construir un observador para sistemas conmutados, en particular para el caso de sistemas conmutados no-autónomos (que representa una extensión natural del resultado del capítulo 4 para sistemas con controles a lazo abierto) y para sistemas conmutados autónomos.

En el capítulo 6, se trata el problema de estabilización de un sistema con realimentación de salidas o, más específicamente, con realimentación de estados estimados a partir de la salida del sistema utilizando el método alternativo de observación de estados presentado en el capítulo 3.

En el último capítulo, damos las conclusiones a este manuscrito y discutimos los alcances, limitaciones y posibles mejoras al método alternativo presentado en los capítulos 4, 5 y 6.

En todos los casos se presentan ejemplos con sus respectivas simulaciones numéricas.

Capítulo 2

El Problema de Observación de Estados

Como mencionamos en el capítulo anterior el problema de observación de estados consiste en inferir a base de información parcial cuál es el estado del sistema. Los sensores producen mediciones que omiten y/o distorsionan parte de la información de los estados. Esto hará que, en general, para cada valor de salida no exista un único estado posible. Esta “no inversibilidad” hace que para poder observar o estimar los estados haga falta considerar su evolución en el tiempo. Otro aspecto importante a tomar en cuenta será el de la observabilidad. Ésta es una propiedad que nos asegurará que en las salidas del sistema a lo largo del tiempo hay información suficiente como para reconstruir su estado.

Por otro lado resulta natural imaginar que el observador, para poder hacer esta determinación, deberá contar con un modelo interno del sistema observado. Se ve intuitivamente que para poder tener alguna medida de similaridad que relacione estados con salidas, el observador mismo deberá poder recrear dichas salidas. Poder cuantificar esta “similaridad” entre las salidas producidas para estados arbitrarios y la salida del sistema observado dependerá de las hipótesis que se hagan sobre dicho sistema y dará una u otra posibilidad de construir un observador.

Sobre los modelos matemáticos considerados podemos agregar que si bien estos pueden ser de tiempo discreto o continuo, determinísticos o estocásticos, finito o infinito dimensionales, esta tesis concentrará su atención a sistemas de tiempo continuo con variable de estados de dimensión finita.

2.1. Modelos matemáticos

Asumimos que en general los modelos de sistemas bajo consideración tendrán la forma siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

donde x denota el vector de estados que toma valores sobre una variedad conexa de dimensión n , u denota el vector de entradas o controles que toma valores en algún conjunto $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, e y denota el vector de salidas o mediciones que toma valores en \mathbb{R}^p .

Las soluciones de la ecuación diferencial en (2.1) serán denotadas con $x(t, t_0, x_0, u(t))$ para algún control $u \in \mathcal{U}$, la clase de funciones localmente esencialmente acotadas y medibles que toman valores en \mathbb{U} , y una condición inicial $x(t_0, t_0, x_0, u(t_0)) = x_0$. Estarán definidas para $t \in I_{t_0, x_0, u}$ donde $I_{t_0, x_0, u}$ es un intervalo de tiempo $[t_0, t_{max}(t_0, x_0, u))$ que en general dependerá de las condiciones iniciales y la función de control. Cuando $t_{max} = +\infty$ se dice que el sistema es *completo hacia adelante*. Por simplicidad, y cuando quede claro del contexto, nos referiremos a la solución arriba mencionada simplemente como $x(t)$ y a la salida respectiva como $y(t)$.

Las funciones f y h en general serán consideradas localmente Lipschitz continuas con respecto a sus argumentos, es decir lo mínimo que se puede pedir para que el sistema tenga soluciones y que éstas sean únicas.

También podrá darse el caso de que el sistema dependa en forma explícita del tiempo, *i.e.* $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$.

Se reconocen en la práctica varios casos particulares que surgen de suponer cierta “estructura” matemática. Los más conocidos son: sistemas control-afines ($f(x, u) = f_0(x) + g(x)u$), sistemas estado-afines ($f(x, u) = A(u)x + B(u)$, $h(x) = Cx$ (o $C(u)x + D(u)$)), sistemas lineales a tiempo variante ($f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u$, $h(t, x, u) = C(t)x + D(t)u$) y sistemas lineales a tiempo invariantes ($f(x, u) = Ax + Bu$, $h(x, u) = Cx + Du$). Para los distintos casos existen diferentes estrategias que aprovechan la estructura del sistema en cuestión. Sin embargo nosotros discutiremos en esta tesis el

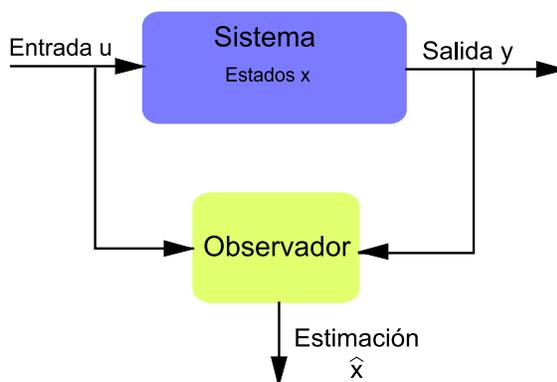


Figura 2.1: Sistema y observador.

problema de observación de estados sin suponer ninguna de las estructuras mencionadas.

2.2. El problema de observación

Si deseamos monitorear o actuar para controlar un sistema como el de la Ecuación (2.1) entonces en general es necesario conocer el estado $x(t)$ del mismo, mientras que en la práctica sólo se tiene acceso a u e y . Luego es necesario poder resolver el problema de observación de estados que se puede formular como sigue (véase la Figura 2.1):

Dado un sistema descrito por (2.1), encuéntrese una estimación $\hat{x}(t)$ del estado $x(t)$ a partir del conocimiento de $u(s)$ e $y(s)$ para $s \in [t_0, t]$.

Claramente este problema tiene sentido cuando no se puede invertir h con respecto a x para ningún instante t .

El problema de observación de estados puede ser pensado también como un problema inverso, *i.e.* dadas trayectorias en el espacio de salidas, determinar qué condición inicial genera a cada una de ellas. Para que esto pueda tener solución tendrá que haber una relación uno a uno entre estas trayectorias y los estados iniciales que condujeron a ellas: ésta no es otra cosa que la propiedad de observabilidad.

Teniendo esto último en mente es que se puede plantear un observador como un problema de optimización buscando una condición inicial ξ que explique mejor a la salida medida y sobre un intervalo de tiempo. Para poder manejar perturbaciones esto se suele hacer por ejemplo minimizando una función de costo de horizonte móvil

$$\int_{t-T}^t |h(x(s, t - T, \xi, u(s))) - y(s)|^2 ds$$

donde, como conocemos la dinámica del sistema observado, podemos construir salidas desde diferentes lugares (ξ) del espacio de estados para medir la “distancia” con la salida real (y) y minimizarla hasta que idealmente se obtenga un costo nulo obteniendo de esta manera el estado a tiempo t (siempre que se verifique la correspondencia uno a uno entre estados y salidas sobre una ventana de tiempo lo suficientemente grande). Este método es ventajoso en que su formulación es general pero sufre de problemas como no-convexidad y falta de condiciones que garanticen la convergencia cuando se trata de observar a sistemas no-lineales generales. Esto se verá en detalle en la introducción del capítulo 4, donde tomaremos como punto de partida la observación por optimización para derivar conceptualmente un método alternativo, que también tiene una formulación sistemática pero para el cual daremos condiciones suficientes para la convergencia.

Por otro lado, en el espíritu fundacional del trabajo de Luenberger ([39, 40]), se puede usar explícitamente la idea de realimentación para estimar $x(t)$. La idea en estos observadores es lograr que una copia del sistema a observar siga la trayectoria de este con correcciones introducidas por la diferencia de salidas que es donde reside toda la información que disponemos del estado. Más específicamente:

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + k(t, h(\hat{x}(t)) - y(t))$$

donde $k(t, 0) = 0$ como es de esperar. Tal sistema auxiliar es lo que se suele conocer

como el observador y es la forma más común en la que se lo suele encontrar en la literatura.

Con mayor generalidad y grado de libertad en el diseño se suele definir a un observador como sigue:

Definición 1 Un observador para el sistema (2.1) está dado por el sistema auxiliar

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t), u(t), y(t)) \\ \hat{x}(t) = H(t, z(t), u(t), y(t)) \end{cases} \quad (2.2)$$

tal que se verifiquen condiciones de consistencia y convergencia, a saber:

1. $\hat{x}(t_0) = x(t_0) \Rightarrow \hat{x}(t) = x(t), \quad \forall t \geq t_0$
2. $|\hat{x}(t) - x(t)| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Si 2. se verifica para todo par $(x(t_0), \hat{x}(t_0))$ se dice que el observador es *global*. También se caracteriza a la convergencia en exponencial, de tiempo finito o bien asintótica, y si la velocidad de la convergencia se puede fijar arbitrariamente se dice que el observador es *sintonizable*. Por otro lado si pretendemos observación práctica se puede relajar la última condición para obtener convergencia a un error suficientemente pequeño pero distinto de cero.

El observador que desarrollamos en el capítulo 3 es del tipo de (2.2).

2.3. Condiciones para la existencia de una solución

Como ya hemos dicho el problema de observación de estados surge cuando la salida del sistema sólo brinda información parcial para un instante de tiempo dado. Para poder extraer la información total del estado del sistema partiendo de las mediciones es necesario que se cumpla alguna condición de observabilidad.

Una noción de observabilidad que resulta intuitiva, y al mismo tiempo una de las más generales que se puede postular, se la debemos al trabajo fundamental de

Hermann y Krener ([23]). Allí se considera que un par de estados es *indistinguible* cuando produce salidas idénticas para cualquier control posible. De esta manera se dice que un sistema es *observable en D* si no existen estados pertenecientes a D que sean indistinguibles entre sí. Esta noción de observabilidad es casi¹ la más débil que se puede requerir y volveremos a ella y/o a variantes de la misma en los diferentes capítulos de la tesis donde formularemos una definición más rigurosa de esta noción. De todas formas aprovechemos en este punto para capturar un poco más la intuición de la misma. Claramente esta condición de observabilidad es necesaria² si se desea poder reconstruir los estados, pero no necesariamente suficiente. La obtención de condiciones suficientes para un modelo dado de observador es un asunto más intrincado. Según sea el caso, puede ser suficiente que por ejemplo se elimine la posibilidad de que existan *controles singulares* (aquellos que hacen que un par de estados sean indistinguibles aunque puedan ser observables aplicando otra función de control). Para otros casos puede ocurrir que esto no sea suficiente y se necesite no sólo que no puedan presentarse controles singulares para poder reconstruir en forma efectiva la variable de estados, sino que también los controles que se aplican tengan una “persistencia” adecuada. Sea por ejemplo el siguiente sistema ([6]):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{bmatrix} x, \quad y = [1 \ 0]x$$

para el cual una entrada definida como $u(t) = 1$ para $t < t_1$ y $u(t) = 0$ para $t \geq t_1$ es claramente *universal*³, mas si ocurre una perturbación después de t_1 , también queda de manifiesto que x no podrá ser reconstruido.

Sólo para sistemas lineales (y para algunos sistemas no lineales para los cuales se

¹La noción más débil de observabilidad es aquella para la cuál sólo se exige que cada estado posea un entorno que no contenga estados indistinguibles respecto de él. Claramente esta noción no excluye la posibilidad de que existan pares de estados indistinguibles siempre que no sean arbitrariamente cercanos.

²Con “necesaria” nos referimos al caso en que se desee un observador sintonizable y/u obtener la condición inicial más que sólo una estimación con error asintóticamente estable. Es decir, supongamos que tenemos un sistema definido por $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = -x_2$ e $y = x_1$: el sistema claramente no es observable, sin embargo se puede obtener una estimación de (x_1, x_2) aunque no se pueda controlar la velocidad a la cuál converge dicha estimación ni cuál será la condición inicial de una parte del estado del sistema (*i.e.*, de x_2). A un sistema de estas características en la literatura se lo conoce como *detectable*.

³Un control universal es un control que no es singular.

puede aplicar linealización exacta) resulta evidente la equivalencia entre observabilidad y existencia del observador, hecho que resulta como corolario de la inversibilidad de la matriz de observabilidad. Aunque vale la pena mencionarla, la discusión sobre la equivalencia entre observabilidad y existencia de un observador excede ampliamente el alcance de esta tesis.

Capítulo 3

Observación Mediante Mapas Inyectivos

3.1. Introducción

Si bien el propósito de este capítulo es proponer un observador para un sistema Lipschitz continuo con controles, en primer lugar consideraremos a modo de introducción un sistema autónomo de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y las funciones f y h localmente Lipschitzianas.

Como ya mencionáramos, un problema fundamental en Teoría de Control es la reconstrucción del estado completo del sistema a partir de la medición y que se efectúa sobre el mismo.

Los resultados más importantes en teoría de observadores son para clases de sistemas que cuentan con cierto grado de suavidad, *i.e.* son diferenciables una cierta cantidad de veces. Inyección de salida, inmersión, transformaciones no lineales de coordenadas, formas normales, y técnicas de alta ganancia son algunos de los métodos más notorios (Véase, *e.g.* [46, 31, 20, 58, 7, 36, 21, 16, 19]).

No nos debe resultar extraño que en muchas de estas técnicas la suavidad sea de importancia vital pues, en definitiva, en un sentido u otro estos métodos son herederos de su contraparte para sistemas lineales (que son “infinitamente suaves”).

Comparativamente, no existen tantos resultados ampliamente difundidos para sistemas no suaves (*i.e.* sistemas que son Lipschitz continuos pero no necesariamente diferenciables en todo punto) a pesar de que éstos sean frecuentes en la práctica.

Otro problema frecuente en sistemas que no son suaves, en especial cuando la función de salida no lo es, suele presentarse cuando hay “zonas oscuras” en las mediciones. Funciones de salida como:

$$h(x) = \begin{cases} x_1, & \text{si } x_1 > 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.2)$$

o bien otras que se puedan presentar en la práctica y que tengan características “de saturación”, hacen que las características del proceso de observación no pueda ser en esencia local. En (3.2), si para alguna condición inicial x_0 la primer coordenada de la trayectoria $x(t, t_0, x_0)$ recorre solo valores negativos para un dado intervalo de tiempo, entonces no bastará con observar la salida durante todo dicho intervalo para poder hacer una estimación del estado completo del sistema.

Este último punto, aunque no se limita a sistemas no suaves, por lo general suele ser más frecuente en éstos. La información (dada cierta condición de observabilidad) estará enteramente codificada en la señal de salida y , pero no necesariamente podrá ser extraída localmente: esta estará, en general, distribuida de manera desigual en el tiempo.

En suma, esto hace que no sea esperable para este tipo de sistemas que los métodos locales puedan funcionar en forma efectiva. Esto nos lleva naturalmente a pensar en el problema considerando a las salidas del sistema sobre *una ventana de tiempo* lo suficientemente grande. La idea es construir algún tipo de función, o mapa, que considere la historia de las mediciones y en base a la misma pueda reconstruir los estados.

En los trabajos [59, 44, 1, 45] se considera un enfoque de *horizonte móvil* que va en este sentido. En estos enfoques, también conocidos como *observadores basados en optimización*, se almacenan las mediciones por un intervalo de tiempo (móvil) lo suficientemente grande. El procedimiento está directamente ligado a la observabilidad ya que se distingue entre diferentes estados mediante la comparación de sus respectivas salidas en dicho intervalo de tiempo. Esto último se realiza minimizando alguna

función de costo apropiada que penaliza la lejanía a la trayectoria correspondiente al estado real del sistema. Este concepto de observador involucra una estructura infinito dimensional que puede ser como mucho aproximada cuando se lo lleva a la práctica.

En el trabajo de Kreisselmeier y Engel [33] se presentó un diseño diferente que evita la etapa de minimización de los observadores basados en optimización, etapa que ante la falta de suavidad y/o convexidad impone grandes dificultades, sobre todo a la hora de enunciar resultados que aseguren la convergencia. Más aún, la estructura del observador propuesto en [33] es adecuada, como veremos, para proponer la extensión de la misma a sistemas con controles (véase [18, 17]) como se desarrollará en este capítulo.

3.1.1. El Observador de Kazantzis–Kravaris/Luenberger

En primer lugar, es interesante revisar el camino sugerido por Kazantzis y Kravaris [31]. Es allí donde se presenta un método de observación mediante mapas inyectivos, dichos mapas son fundamentales en el trabajo de Kreisselmeier y Engel [33] del cuál partimos para extender dichos resultados a sistemas con controles.

Los trabajos de Kazantzis y Kravaris ([31]) así como en la extensión a dicho trabajo propuesta por Andrieu y Praly [3], son algunas de varias extensiones conocidas al *observador de Luenberger* ([39]). Allí se sugieren observadores de la forma:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + B(y) \\ \hat{x} = T^*(z) \end{cases} \quad (3.3)$$

siendo z una matriz compleja en $\mathbb{C}^{\ell \times p}$ y donde la dimensión de y es p y ℓ es una dimensión a definir. A es una matriz compleja en $\mathbb{C}^{\ell \times \ell}$ y, B y T^* son funciones a precisar. Se plantea entonces el problema de establecer condiciones sobre f y h de manera tal que se pueda encontrar (A, B, ℓ) para el cual existe un T^* que garantice la convergencia de \hat{x} hacia x .

La idea que subyace en los resultados presentados en [31], caso para el cuál la dimensión de z se limita a la de x (*i.e.*, $\ell = n$), consisten en elegir T^* como la aplicación inversa de una función T que resulta de resolver la ecuación a derivadas

parciales:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x)f(x) = AT(x) + B(h(x)) \quad (3.4)$$

contexto en el cuál basta con elegir la matriz A y la función B .

Si se puede encontrar una función T solución de (3.4) que sea un difeomorfismo ([31, 35, 34]), entonces el cambio de coordenadas:

$$\chi = T(x) \quad (3.5)$$

permite reescribir al sistema (3.1) como:

$$\dot{\chi} = A\chi + B(h(T^{-1}(\chi))) \quad , \quad \dot{y} = h(T^{-1}(\chi)) \quad (3.6)$$

De esta manera tenemos que:

$$\overbrace{z - \chi}^{\dot{\quad}} = A(z - \chi) \quad (3.7)$$

Tomando una matriz A Hurwitz, z converge exponencialmente hacia χ . El observador así propuesto entonces permite reconstruir $\chi = T(x)$.

Más aún, si la función $T^* = T^{-1}$ es uniformemente continua entonces $\hat{x} = T^*(z)$ nos provee una estimación que converge asintóticamente hacia:

$$x = T^*(\chi) = T^*(T(x)). \quad (3.8)$$

De esta última identidad (y para casos más generales, *e.g.* $\ell > n$) se puede decir que T debe ser inversible a izquierda, y por lo tanto inyectiva. Es por ello que en general se precisa que $\ell \geq n$.

Este enfoque basado en la construcción de tal T^* inversible a izquierda ha motivado la búsqueda de una solución analítica a la ecuación (3.4) (Véase [31, 35, 34] y [3]).

Mientras que en [31, 35, 34] se busca una solución alrededor de un punto de equilibrio del sistema, en el trabajo de Andrieu y Praly ([3]) se demuestra que de hecho es suficiente con obtener una solución débil de la ecuación (3.4) que sea solamente continua y uniformemente inyectiva para luego poder construir un observador de la

forma (3.3)¹. Más aún, se demuestra allí la existencia de dicha función para el caso global bajo una hipótesis de completitud de las trayectorias hacia tiempo negativo. Inclusive, también se demuestra allí la viabilidad bajo hipótesis de observabilidad y con un $\ell \geq n + 1$ de la propiedad de inyectividad de dicho mapa, esencial para la reconstrucción de estados.

Sigue siendo un inconveniente el hecho de que para hallar T haya que resolver la ecuación a derivadas parciales (3.4). Este problema no está presente en [33], pues como veremos el observador (aunque intrínsecamente relacionado al de [31]) está planteado en otros términos.

3.1.2. El Observador de Kreisselmeier y Engel

Si expresamos T solución de (3.4) en su forma integral, tenemos que:

$$T(x(t, \xi)) = \exp(At)T(\xi) + \int_0^t \exp(A(t-s))B(h(x(s, \xi)))ds \quad (3.9)$$

donde $x(t, 0, \xi)$ es una solución de (3.1) con condición inicial $\xi \in E \subset \mathbb{R}^n$ para $t = 0$, y tal que $x(t, 0, \xi)$ permanece en E para todo $t \in (I_E^-(\xi), I_E^+(\xi))^2$. Sacando $\exp(At)$ como factor común en (3.9) podemos despejar $T(\xi)$, y obtenemos:

$$T(\xi) = \exp(-At)T(\tilde{x}(t, \xi)) - \int_0^t \exp(-As)B(h(\tilde{x}(s, \xi)))ds, \quad (3.10)$$

para todo $\xi \in E$ y $t \in (I_{E+\delta}^-(\xi), 0)^3$, donde \tilde{x} es solución del sistema modificado $\dot{x} = \mathbf{1}_E(x)f(x)$, siendo que $\mathbf{1}_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función cualquiera \mathcal{C}^1 que satisface:

$$\mathbf{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E + \delta \end{cases} \quad (3.11)$$

para algún número real positivo δ . Entonces, de la completitud en tiempo negativo (*i.e.*, $I_E^-(\xi) = -\infty$), más el hecho de que A es Hurwitz, haciendo tender t hacia $-\infty$

¹Dicha demostración se apoya fuertemente en conceptos desarrollados en el trabajo de Kreisselmeier y Engel ([33]).

²Este intervalo de tiempo es, por definición, el más grande sobre el que la solución $x(t, 0, \xi)$ está definida tomando valores dentro de E .

³ $E + \delta = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : |x_2 - x_1| < \delta \text{ con } x_2 \in E\}$

podemos decir que:

$$T(\xi) = \int_{-\infty}^0 \exp(-As)B(h(\tilde{x}(s, \xi)))ds \quad (3.12)$$

Es en esta última expresión que notamos una clara relación entre lo propuesto inicialmente por Kazantzis y Kravaris ([31]) y el trabajo de Kreisselmeier y Engel ([33]). En este último, se tiene un observador para un sistema (3.1)⁴ de la forma:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + by \\ \hat{x} = Q(z) \end{cases} \quad (3.13)$$

Aquí Q , a la que se la denomina una *inversa extendida*, juega el papel de T^* para con el mapeo $q : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$:

$$q(\xi) := \int_{-\infty}^t \exp(A(t-s))bh(x(s, t, \xi))ds \quad (3.14)$$

Se considera para (3.13) que (A, b) , con $A \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$, $b \in \mathbb{R}^{\ell \times 1}$, es un par controlable y suficientemente estable⁵ para que la integral (3.14) esté bien definida.

Como se verá luego, bajo ciertas condiciones que serán recreadas para la extensión que nos proponemos realizar para sistemas con controles, y con un ℓ suficientemente grande, q será un mapa inyectivo y por lo tanto cumplirá con el propósito que cumpliera T en trabajos previos. Más aún, nótese que $\dot{q} = Aq + by$. Teniendo esto último en mente reformulemos el Teorema 1 de [33] con su respectiva demostración con la finalidad de mejorar la comprensión del asunto.

Teorema 2 Supongamos que A es suficientemente estable para que q esté bien definida. Si

1. $q : E \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ es inyectivo;
2. $Q : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface

⁴Con $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, lo cuál no implica pérdida de generalidad.

⁵Con *suficientemente estable* nos referimos a que la parte real de los autovalores de A son “suficientemente negativos”.

- a) $Q(q(x)) = x, x \in E$;
- b) Cualquier sucesión en $(z_k, x_k) \in \mathbb{R}^\ell \times E$ que satisface $z_k - q(x_k) \rightarrow 0$ implica $Q(z_k) - x_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow +\infty$.

luego (3.13) representa un observador para (3.1) en E .

Demostración: Considere cualquier par $(z_0, x_0) \in \mathbb{R}^\ell \times E$. De cómo fueron definidas z y q es evidente que $z(t) - q(x(t, t_0, x_0))$ satisface

$$\overbrace{(z - q)} = A(z - q),$$

con condición inicial $z_0 - q(x_0)$ para $t = t_0$. Si $z_0 = q(x_0)$, luego $z \equiv q$ y, luego, $\hat{x} = x$. Si $z_0 \neq q(x_0)$, luego $z - q \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, y se sigue que $\hat{x} - x = Q(z) - x \rightarrow 0$.

■

Para hacer más evidente aún la relación entre T y q si cambiamos $\tau = s - t$ se tiene

$$q(\xi) := \int_{-\infty}^0 \exp(-A\tau) b h(x(\tau, 0, \xi)) d\tau \quad (3.15)$$

Ésta es prácticamente la misma expresión que (3.12) obtenida por Andrieu y Praly en [3], con la diferencia de que aquí $B(\cdot)$ es una función lineal constante (*i.e.*, multiplicar por b) y se expresa en función de la solución en x en lugar de \tilde{x} . La utilización de \tilde{x} en [3] responde a la necesidad de que la solución sea completa en tiempo negativo de manera que la integral esté bien definida. En [33], y en la extensión que propondremos en este capítulo, se asegura que (3.15) esté bien definida de la siguiente manera: se supone que las salidas $h(x(\tau, 0, \xi))$ con $\tau \in (-\infty, 0]$ sean exponencialmente acotadas⁶. Esto último sumado al hecho de que se elige A “suficientemente estable” se desprende que la integral (3.15) es convergente para cada ξ de algún conjunto de interés.

Por otro lado, en [33] se interpreta a cada una de las ℓ componentes del vector $q(\xi)$ como al coeficiente de la descomposición de la historia de las salidas $\tau \mapsto h(x(\tau, 0, \xi))$

⁶Es decir, existe una constante $\alpha \geq 0$ tal que $h(x(\tau, 0, \xi))e^{\alpha\tau}$ es una función acotada para todo $\tau \in (-\infty, 0]$.

en tiempo negativo sobre una base de funciones del tiempo. Nótese que podemos escribir

$$q(\xi) = \langle \exp(A\tau)b, h(x(\tau, 0, \xi)) \rangle_{(-\infty, 0]} \quad (3.16)$$

adonde $\langle \cdot, \cdot \rangle_I$ es el producto interno entre funciones \mathcal{L}_2 (siendo \mathcal{L}_2 la clase de funciones módulo cuadrado integrables) sobre el intervalo de tiempo I , y donde para vectores η, ν de funciones \mathcal{L}_2 , $\langle \eta, \nu^T \rangle$ representa la matriz con entradas $\langle \eta_i, \nu_j \rangle$.

Claramente, expresar al mapa $q(\xi)$ de la forma (3.16) nos da una interpretación geométrica del mismo: este representa la “proyección” de la historia de mediciones para cada ξ sobre una combinación lineal (por medio de b) de una base de funciones solución de $\dot{z} = Az$. El punto fundamental será, como ya mencionamos, que q sea un mapa inyectivo para poder extraer el estado mediante una inversa a izquierdas. Para esto último, si se dan condiciones apropiadas de observabilidad sobre las mediciones del sistema y , bastará con que *exista una elección de (A, b) ⁷ de manera que el “espectro” de la base de funciones a la que nos referimos capte toda la información de la historia de mediciones para cada condición inicial* para que luego este proceso pueda ser invertido obteniendo así una estimación del estado real del sistema.

A esta última propiedad, *i.e.* a la capacidad del sistema lineal $\dot{z} = Az + by$ de dimensión finita ℓ de captar en su “espectro” toda la información esencial de las salidas de (3.1), y por lo tanto permitir “recrear” dicho sistema observado mediante un sistema lineal, se la conoce como complejidad finita y jugará un rol fundamental en lo que sigue.

Estamos en condiciones de formular la extensión al método de Kreisselmeier y Engel para una clase de sistemas con controles no suaves. Este objetivo será alcanzado mediante la generalización de dicho enfoque a una familia finita parametrizada de sistemas no suaves. Bajo la hipótesis de que para una discretización apropiada de los valores de la señal de control, la familia de sistemas parametrizados por controles constantes resulta observable y de complejidad finita, obtenemos un observador que se puede establecer en forma canónica mediante la selección de un único parámetro suficientemente grande: la dimensión del observador. La construcción del observador

⁷que implica a su vez un número ℓ lo suficientemente grande

se completará mediante la construcción de una familia de mapas inversos parciales que actuarán sobre la variable de estado del observador según el valor presente del control aplicado sobre el sistema observado.

3.2. Formulación del Problema

Consideraremos sistemas no lineales de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (3.17)$$

donde x es la variable de estados que toma valores en \mathbb{R}^n , y u e y son la entrada o control y la salida respectivamente y ambas toman valores sobre \mathbb{R} . Denotaremos con $x(\cdot, \tau, \xi, u(\cdot))$ una dada trayectoria del sistema (3.17) correspondiente a la entrada u que verifica $x(\tau) = \xi \in \mathbb{R}^n$ y con $y(\cdot, \tau, \xi, u(\cdot)) = h(x(\cdot, \tau, \xi, u(\cdot)))$ su respectiva salida. En este capítulo se considera que las entradas son funciones $u : I \rightarrow \mathbb{U}$ que pertenecen a la clase de funciones continuas a tramos por la derecha a la que denotamos \mathcal{U} , donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo de tiempo determinado y $\mathbb{U} \in \text{cmp}(\mathbb{R})$ el espacio de valores de control. Denotaremos $u \in \mathcal{U}_I$ cuando deseemos explicitar el intervalo I sobre el que están definidos los controles de la familia a la que u pertenece.

Más aún, supondremos que existe un conjunto cerrado, pero no necesariamente acotado, $E \subset \mathbb{R}^n$ donde evolucionan las variables de estado, *i.e.*, es invariante con respecto a (3.17) (dados $\xi \in E$ y $u \in \mathcal{U}$, $x(t, \tau, \xi, u(t)) \in E$ para todo $t \in \mathbb{R}$).

En adelante, supondremos lo siguiente:

Hipótesis 3 Existen números positivos L_f y L_h tales que las funciones f y h verifican para todo $\xi, \xi' \in E$ y todo $\nu, \nu' \in \mathbb{U}$

$$|f(\xi, \nu) - f(\xi', \nu')| \leq L_f(|\xi - \xi'| + |\nu - \nu'|) \quad (3.18)$$

$$|h(\xi) - h(\xi')| \leq L_h|\xi - \xi'|. \quad (3.19)$$

Podemos decir en forma genérica que nuestro propósito es diseñar un sistema (el observador)

$$\begin{cases} \dot{z} = g(z, y, u), \\ \hat{x} = Q(z, u) \end{cases} \quad (3.20)$$

con $z \in \mathbb{R}^\ell$, entradas y y u del sistema (3.17) y salida \hat{x} , cuya finalidad es estimar el estado x del sistema (3.17).

Para no generar confusiones con respecto a lo que entendemos por estimar el estado del sistema, debemos definir de manera precisa lo que entendemos por un observador del mismo:

Definición 4 Dados números positivos T y ε , decimos que el sistema (3.20) es un $\varepsilon - T$ -observador tiempo-finito si sus soluciones $z(\cdot, \tau, \zeta, u)$ están definidas sobre $[\tau, \tau + T]$ y verifican:

1. *Consistencia* Dados $\xi \in E$ y $u \in \mathcal{U}$, si ζ es tal que $\xi = Q(\zeta, u)$, entonces

$$x(t, \tau, \xi, u(t)) = \hat{x}(t, \tau, \zeta, u(t)), \quad \forall t \in [\tau, \tau + T].$$

2. *Convergencia* Para cualquier $\zeta \in \mathbb{R}^\ell$, $u \in \mathcal{U}$ tal que $Q(\zeta, u) \in E$ y para cualquier $\xi \in E$, existe un número positivo T_u que puede hacerse arbitrariamente pequeño y es tal que

$$|x(t, \tau, \xi, u) - \hat{x}(t, \tau, \zeta, u)| < \varepsilon \quad \forall t \in [\tau + T_u, \tau + T].$$

La posibilidad de construir dicho observador dependerá fuertemente de que se cumpla alguna propiedad de observabilidad sobre el sistema observado. Luego, de dicha propiedad también surgirá la posibilidad de construir mapas inyectivos que nos permitan elaborar la observación de estados según fuera delineado en la introducción.

3.3. Observabilidad y Mapas Inyectivos

3.3.1. Observabilidad

Como fue establecido en la Introducción de este capítulo, nuestro propósito es generalizar el observador propuesto en [33]. En dicho trabajo se presenta una instancia del observador que es de convergencia en tiempo finito. Es este caso el que generalizaremos ya que como conmutaremos entre sistemas de una familia paramétrica de sistemas es necesario asegurar convergencia práctica entre conmutaciones. Como ya vimos, el observador de Kreisselmeier y Engel se basa en un concepto de observabilidad relacionado con el *mapa de salida* de un sistema autónomo, esto será generalizado a otro observador también de tiempo-finito para un sistema con controles.

Por tales motivos, se sigue naturalmente que debemos considerar un concepto de observabilidad relacionado con *mapas entrada-salida*. Consideremos entonces un $T > 0$ fijo, y para cada $\nu \in \mathbb{U}$ y cada $\xi \in E$, sea $y_\nu(\tau, \xi) = y(\tau, 0, \xi, \nu)$, $\tau \in [-T, 0]$ la salida del sistema vista hacia atrás *cuando se aplica el control constante* ν .

Definición 5 Sea $\Delta y_\nu(\tau, \xi, \xi') = y_\nu(\tau, \xi) - y_\nu(\tau, \xi')$. El sistema (3.17) es *tiempo-finito observable* si existe $\alpha_T \in \mathcal{K}$ tal que

$$\|\Delta y_\nu(\cdot, \xi, \xi')\|_{[-T, 0]} \geq \alpha_T(|\xi - \xi'|), \quad (3.21)$$

para cada $\xi, \xi' \in E$ y cada $\nu \in \mathbb{U}$.

Nótese que la observabilidad tiempo-finito caracteriza las variaciones $\Delta y_\nu(\tau, \xi, \xi')$ con respecto a la distancia $|\xi - \xi'|$.

Observación 6 Si E es un compacto, la observabilidad en este sentido solo requiere que para todo $\nu \in \mathbb{U}$, $\Delta y_\nu(\cdot, \xi, \xi') \neq 0$ para todo $\xi \neq \xi' \in E$.

De hecho, sea $d = \text{diam}(E)$. Debido a (3.18)-(3.19) $y_\nu(\tau, \xi)$ es continuo en (ξ, ν) , y por lo tanto podemos tomar un $\alpha_T \in \mathcal{K}$ definido por

$$\alpha_T(s) = \frac{s}{d} \min_{|\xi - \xi'| \geq s, \nu \in \mathbb{U}} \|\Delta y_\nu(\cdot, \xi, \xi')\|_{[-T, 0]}.$$

En el caso de que esta última propiedad de observabilidad se verifique para todo $T > 0$ tenemos la siguiente:

Definición 7 Decimos que el sistema (3.17) es *fuertemente tiempo-finito observable* si para cada $T > 0$ existe un α_T como en la Definición 5 tal que se verifica (3.21).

Para sistemas no-lineales generales, esta propiedad de observabilidad es difícil de verificar, ya que la observabilidad lidia con la distinguibilidad de las soluciones a la salida sobre $(-\infty, t]$, en vez de ser considerada sobre intervalos arbitrariamente pequeños. En estos últimos casos la observabilidad suele ser evaluada mediante técnicas suaves (locales), casos para los cuales se cuenta con herramientas del cálculo que hacen de esta verificación una tarea más simple.

Se puede demostrar fácilmente que si el sistema es uniformemente observable en el sentido de Gauthier (ver [46]), entonces es fuertemente tiempo-finito observable.

3.3.2. Mapas Inyectivos

Siguiendo los bases sentadas por el enfoque de Kreisselmeier y Engel ([33]), para cada $T > 0$ y cada $\nu \in \mathbb{U}$ definimos un *mapa de observación* de la siguiente manera:

$$q_{T,\nu}(\xi) = \int_{t-T}^t e^{A_\nu(t-s)} b_\nu y(s, t, \xi, \nu) ds \quad (3.22)$$

donde el par (A_ν, b_ν) es controlable, $A_\nu \in \mathbb{R}^{\ell_\nu \times \ell_\nu}$, $b_\nu \in \mathbb{R}^{\ell_\nu}$, y A_ν es una matriz diagonal y Hurwitz con autovalores dados, y $|b_\nu|_\infty \leq 1$.

El mapa $q_{T,\nu} : E \rightarrow \mathbb{R}^{\ell_\nu}$ asigna a cada $\xi \in E$ un punto $q_{T,\nu}(\xi) \in \mathbb{R}^{\ell_\nu}$ mediante la trayectoria de salida $y(s, t, \xi, \nu)$, $s \leq t$ del sistema (3.17).

Luego podemos considerar que para cada $\nu \in \mathbb{U}$ un sistema autónomo definido por

$$\begin{cases} \dot{x} = f_\nu(x) \\ y = h(x), \end{cases} \quad (3.23)$$

con $f_\nu(\cdot) = f(\cdot, \nu)$.

Si seguimos los lineamientos de Kreisselmeier y Engel ([33]), establecemos un observador para el sistema (3.23)

$$\begin{cases} \dot{z} &= A_\nu z + b_\nu y(\cdot, \tau, \xi, \nu) \\ \eta(t) &= z(t) - e^{A_\nu T} z(t - T) \\ \hat{x} &= Q_{T,\nu}(\eta) \end{cases} \quad (3.24)$$

definido para $t > \tau$, con condiciones iniciales $z(t) = z_0(t)$, $t \in [\tau - T, \tau]$ y con $Q_{T,\nu} : \mathbb{R}^{\ell_\nu} \rightarrow \mathbb{R}^n$, que idealmente satisface $Q_{T,\nu}(q_{T,\nu}(\xi)) = \xi$ para todo $\xi \in E$, y es una *inversa extendida* de $q_{T,\nu}$.

Tenemos el siguiente resultado cuya demostración (similar a aquella del Teorema 5 en [33]) incluimos a continuación

Teorema 8 Supongamos que

1. $q_{T,\nu} : E \rightarrow \mathbb{R}^{\ell_\nu}$ es inyectivo;
2. $Q_{T,\nu} : \mathbb{R}^{\ell_\nu} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface $Q_{T,\nu}(q_{T,\nu}(\xi)) = \xi$ para todo $\xi \in E$.

Entonces, el sistema (3.24) es un observador tiempo-finito para el sistema (3.23), cuyo estado estimado converge al estado real en tiempo finito T , *i.e.* si $x(t, \tau, \xi, \nu)$ es una trayectoria del sistema (3.23), entonces $\hat{x}(t) - x(t, \tau, \xi, \nu) = 0$ para todo $t \geq \tau + T$.

Demostración: Denotemos $x(s) = x(s, \tau, \xi, \nu)$ y

$$q_\nu(\xi) = \int_{-\infty}^t e^{A_\nu(t-s)} b_\nu y(s, t, \xi, \nu) ds.$$

Luego, para cualquier $t \geq \tau + T$, $q_{T,\nu}(x(t)) = q_\nu(x(t)) - e^{A_\nu T} q_\nu(x(t - T))$ y

$$\frac{d}{dt}[z(t) - q_\nu(x(t))] = A_\nu[z(t) - q_\nu(x(t))]$$

y dado que $\eta(t) = q_{T,\nu}(x(t)) + [z(t) - q_\nu(x(t))] - e^{A_\nu T}[z(t - T) - q_{T,\nu}(x(t - T))]$, concluimos que $\eta(t) = q_{T,\nu}(x(t))$ y $\hat{x}(t) = x(t)$ para todo $t \geq \tau + T$. ■

Para poder establecer la existencia de un observador tiempo-finito para el sistema, nos resta fijar condiciones bajo las cuales se cumplen las hipótesis del Teorema 8. Con tal propósito, introducimos la siguiente

Definición 9 Dados $T > 0$ y $\nu \in \mathbb{U}$, decimos que el mapa de observación $q_{T,\nu}$ es *uniformemente inyectivo* si existe $\beta \in \mathcal{K}$ tal que

$$|q_{T,\nu}(\xi) - q_{T,\nu}(\xi')| \geq \beta(|\xi - \xi'|)$$

para todo $\xi, \xi' \in E$.

La siguiente propiedad caracteriza las variaciones $\Delta y_\nu(\tau, \xi, \xi')$ como funciones del tiempo τ .

Definición 10 Dado $T > 0$, el sistema (3.17) se dice de *complejidad finita tiempo-finito* en E si existe un número finito de funciones continuas a tramos $\{\phi_1(\tau), \dots, \phi_l(\tau)\}$ tales que para algún $\delta > 0$

$$\sum_{i=1}^l |\langle \phi_i, \Delta y_\nu(\cdot, \xi, \xi') \rangle_{[-T,0]}| \geq \delta \|\Delta y_\nu(\cdot, \xi, \xi')\|_{[-T,0]} \quad (3.25)$$

para todo $\xi, \xi' \in E$ y todo $\nu \in \mathbb{U}$.

Definición 11 Decimos que el sistema (3.17) es *fuertemente de complejidad finita tiempo-finito*, si para cada $T > 0$ existe un δ como en la Definición 10 tal que (3.25) se cumple.

Observación 12 Las propiedades de *complejidad finita tiempo-finito* y de *observabilidad tiempo-finito* aseguran la existencia de un par controlable (A_ν, b_ν) , lo cual hace

al mapa de observación $q_{T,\nu}$ uniformemente inyectivo en E (véase el Teorema 13 abajo).

Por otro lado, la inyectividad uniforme del mapa $q_{T,\nu}$ garantiza la existencia de una inversa extendida $Q_{T,\nu}$ para este mapa (Corolario 16).

Nos encontramos entonces, en posición de poder establecer el siguiente resultado

Teorema 13 Sean $T > 0$ y $\nu \in \mathbb{U}$. Si el sistema (3.17) es observable tiempo-finito y de complejidad finita tiempo-finito, entonces existen $\ell_\nu \in \mathbb{N}$ y un par controlable (A_ν, b_ν) con $A_\nu \in \mathbb{R}^{\ell_\nu \times \ell_\nu}$ Hurwitz, la cual puede ser tomada en forma diagonal y con autovalores prescritos, y $b_\nu \in \mathbb{R}^{\ell_\nu}$ con $|b_\nu|_\infty \leq 1$, tal que el mapa de observación $q_{T,\nu}$ dado por (3.22) es uniformemente inyectivo en E .

Demostración: Surge, con modificaciones menores, siguiendo las líneas de la demostración del Teorema 2 en [33]. ■

Observación 14 De la Definición 10 se deduce fácilmente que si $q_{T,\nu}$ es uniformemente inyectivo para algún valor de la dimensión ℓ_ν , lo será también para todo entero mayor a ℓ_ν . Este hecho será fundamental en lo que sigue.

Del Lema 4 en [33], específicamente

Lema 15 [33] Si q es uniformemente inyectivo en E , entonces existe una inversa extendida Q .

y el Teorema 13, obtenemos el siguiente resultado

Corolario 16 Sea $T > 0$ y $\nu \in \mathbb{U}$. Si el sistema (3.17) es observable tiempo-finito y de complejidad finita tiempo-finito, luego existe una inversa extendida $Q_{T,\nu}$ para $q_{T,\nu}$. Más aún, $Q_{T,\nu}(\eta)$ es continuo en (η, T) .

Como consecuencia de este último resultado y del Teorema 8, se verifica lo que enunciamos a continuación.

Teorema 17 Sea $T > 0$ y $\nu \in \mathbb{U}$. Si el sistema (3.17) es observable tiempo-finito y de complejidad finita tiempo-finito, entonces el sistema (3.24) es un observador tiempo-finito para el sistema (3.23), cuya estimación del estado converge al estado real en tiempo finito T , *i.e.* si $x(t, \tau, \xi, \nu)$ es una trayectoria del sistema (3.23), entonces $\hat{x}(t) - x(t, \tau, \xi, \nu) = 0$ para todo $t \geq \tau + T$.

Para poder asegurar algún tipo de regularidad en el comportamiento de las inversas extendidas, sea $\Lambda = \{\lambda_i, i \in \mathbb{N}\}$ una (de ahora en más fija) sucesión estrictamente decreciente de números reales negativos, y considérese que $Q_{T,\nu}^\Lambda(\eta)$ es una inversa extendida, cuando los autovalores de A_ν son los primeros ℓ_ν elementos de Λ . Si denotamos para cualquier $t > 0$, $Q_\nu^\Lambda(t, \eta) = Q_{t,\nu}^\Lambda(\eta)$, podemos introducir la siguiente

Definición 18 $\omega_\nu^{\Lambda,T}(r)$ dada por

$$\omega_\nu^{\Lambda,T}(r) = \sup_{t \in [0,T]} \sup_{|\eta - \eta'|_\infty \leq r} |Q_\nu^\Lambda(t, \eta) - Q_\nu^\Lambda(t, \eta')|$$

es un *modulo de continuidad* para $Q_{T,\nu}^\Lambda$.

Observación 19 Obsérvese que en el caso en que E es un conjunto compacto, $\omega_\nu^{\Lambda,T}(\cdot)$ es uniformemente continua.

Sea ahora el conjunto $\Lambda_k \subset \Lambda$ dado por: $\Lambda_k = \{\lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y considérese la siguiente

Hipótesis 20 Para cada $T > 0$ y cada $\nu \in \mathbb{U}$ existe una $\omega_\nu^T \in \mathcal{K}$ tal que $\omega_\nu^{\Lambda_k,T}(r) \leq \omega_\nu^T(r)$ para todo $r \geq 0$ y todo $k \in \mathbb{N}$.

Observación 21 La Hipótesis 20 establece un cierto tipo de suavidad en el comportamiento de la inversa extendida, considerada como una función de la variable discreta ℓ_ν , y refleja el hecho de que esta dimensión no aumenta cuando reemplazamos los primeros autovalores de la sucesión en la determinación del par controlable. Para sistemas lineales observables (que son de complejidad finita, véase [33]), este tipo de comportamiento es sugerido por la existencia de observadores basados en el Grammiano de observabilidad (véase [55]).

En este punto nos encontramos en posición de establecer el resultado principal de este capítulo (véase [17]):

Teorema 22 Sean los números positivos T' y ε , y supongamos que el sistema (3.17) es fuertemente tiempo-finito observable y fuertemente de complejidad finita tiempo-finito. Más aún, supongamos que se cumple la Hipótesis 20. Luego, existe un $\varepsilon - T'$ observador para (3.17).

En lo que sigue obtenemos una serie de resultados que serán utilizados en la demostración de este Teorema.

Sea $I = [a, b]$ un intervalo finito cualquiera. Decimos que un conjunto finito de números reales $\Pi(I) = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_N = b\}$ es un *conjunto de muestreo* para I . Decimos que es un *conjunto de muestreo regular de norma μ* cuando $t_{i+1} - t_i = \mu > 0, \forall i$. Finalmente, denotamos con $\Pi(I, \mu)$ al conjunto de muestreo regular de I de norma μ .

Sea $\mu' > 0$, I' un intervalo compacto y $\mathbb{U}^* \subset \mathbb{U}$. Para $\Pi(I', \mu') = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\}$, denotamos con $\mathcal{PC}[\Pi(I', \mu'), \mathbb{U}^*]$ a la familia de funciones $\sigma : I' \rightarrow \mathbb{U}^*$ constantes a tramos y continuas desde la derecha tales que $\sigma(t) = \sigma(t_i^+)$, $t \in [t_i, t_{i+1})$, $0 \leq i < N$.

Proposición 23 Sean números positivos ε' y T' . Supongamos que $\mathbb{U} \subset I = [a, b]$ y sea $I' = [0, T']$ ⁸. Luego existe $\mu > 0$ tal que para cualquier $u \in \mathcal{U}_{I'}$ existen $\mu_u > 0$ y

⁸Para que no haya confusión remarkamos que aquí I se refiere a un intervalo en el espacio donde toma valores la variable de control u , mientras que I' es un intervalo para la variable t del tiempo.

$\sigma_d \in \mathcal{PC}[\Pi(I', \mu_u), \Pi(I, \mu)]$ tales que

$$\int_0^{T'} |u(t) - \sigma_d(t)| dt < \varepsilon'.$$

Demostración: Como u es una función continua a tramos, entonces existen μ_u y $\sigma \in \mathcal{PC}[\Pi(I', \mu_u), \mathbb{U}]$ tales que

$$\int_0^{T'} |u(t) - \sigma(t)| dt < \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Sea μ tal que $\mu T' < \varepsilon'/2$ y sea $\sigma_d \in \mathcal{PC}[\Pi(I', \mu_u), \Pi(I, \mu)]$ definido como $\sigma_d(t) = u_i$ si $u_i \leq \sigma(t) < u_{i+1}$, donde $u_i, u_{i+1} \in \Pi(I, \mu)$. Se concluye fácilmente que

$$\int_0^{T'} |\sigma_d(t) - \sigma(t)| dt < \frac{\varepsilon'}{2},$$

y, en consecuencia, se verifica la tesis. ■

Proposición 24 Sean los números positivos ε y T' , y considérense I e I' como en la Proposición 23. Entonces existe $\mu > 0$ tal que si $x(\cdot, 0, \xi, u(\cdot))$ es la solución de (3.17) correspondiente a $\xi \in E$ y $u \in \mathcal{U}_{I'}$, entonces existe $\sigma_d \in \mathcal{PC}[\Pi(I', \mu_u), \Pi(I, \mu)]$ con $\mu_u > 0$ tal que la solución $x_d(\cdot, 0, \xi, \sigma_d(\cdot))$ de (3.17) verifica $|x(\tau, 0, \xi, u(\tau)) - x_d(\tau, 0, \xi, \sigma_d(\tau))| < \varepsilon$ para todo $\tau \in I'$.

Demostración: Denotemos $x(\tau) = x(\tau, 0, \xi, u(\tau))$ y $x_d(\tau) = x_d(\tau, 0, \xi, \sigma_d(\tau))$ para el aún desconocido control σ_d . Entonces

$$\begin{aligned} |x(\tau) - x_d(\tau)| &\leq \int_0^\tau |f(x(s), u(s)) - f(x_d(s), \sigma_d(s))| ds \leq \\ &L_f \int_0^\tau |x(s) - x_d(s)| ds + L_f \int_0^{T'} |u(s) - \sigma_d(s)| ds. \end{aligned}$$

Elíjase ε' tal que $L_f \varepsilon' \exp(L_f T') < \varepsilon$, y μ, μ_u y σ_d como en la Proposición 23. Entonces

$$|x(\tau) - x_d(\tau)| < L_f \int_0^\tau |x(s) - x_d(s)| ds + L_f \varepsilon',$$

y por la desigualdad de Gronwall,

$$|x(\tau) - x_d(\tau)| \leq L_f \varepsilon' e^{L_f \tau} < \varepsilon.$$

■

3.4. El Observador

De aquí en adelante supondremos que $\varepsilon > 0$ y $T' > 0$ están fijas. Sea μ como en la Proposición 24 correspondiente a $\varepsilon/2$ y T' , y supongamos que $\Pi(I, \mu) = \{u_1, u_2, \dots, u_M\}$. Supongamos ahora que queremos estimar una trayectoria $x(t, 0, \xi, u(t))$ de (3.17) correspondiente a $u \in \mathcal{U}_{[0, T']}$ basándonos en el conocimiento de u y de la salida $y(t, 0, \xi, u(t))$. Sea entonces μ_u como en la Proposición 24, y $\Pi(I', \mu_u) = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T'\}$. Tomemos $T = \mu_u$ y definamos $\omega^T : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ como

$$\omega^T(r) = \max_{1 \leq k \leq M} \omega_{u_k}^T(r), \quad r \geq 0.$$

Consideremos $\delta > 0$ tal que $\omega^T(\delta) < \varepsilon/2$, y sea k^* el primer número entero tal que $|\lambda_{k^*}| > 4\varepsilon/(\delta L_h)$. Armemos ahora la subsucesión de autovalores $\Lambda^* = \Lambda_{k^*}$, y denotemos para cada k , q_{T, u_k} de (3.22) como q_k , A_{u_k} y b_{u_k} , como A_k y b_k respectivamente, $Q_{T, u_k}^{\Lambda^*} = Q_k$ y $\ell_k = \ell_{u_k}$.

Tenemos luego, para el Teorema 22, la siguiente

Demostración:

El observador propuesto es el siguiente algoritmo

- Para cada k determínese ℓ_k, A_k, b_k tales que existan un mapa uniformemente inyectivo q_k y su inversa extendida Q_k . Dicha existencia está garantizada por el Teorema 13 y el Corolario 16.
- Sean $\ell_{k^*} = \max\{\ell_k\}$, $A = A_{k^*}$ y $b = b_{k^*}$. Ahora determínese para el par fijo (A, b) , q_k y Q_k para $1 \leq k \leq M$. De acuerdo con la Observación 14, Q_k es, para cada k , la inversa extendida del mapa uniformemente inyectivo q_k .
- Defínase $Q(\cdot, u)$ como $Q(\cdot, u(t)) = Q_k(\cdot)$ si $u_k \leq u(t_j) < u_{k+1}$ y $t_j \leq t < t_{j+1}$
- Aplíquese el estimador

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= Az(t) + by(t, 0, \xi, u(t)) \\ \eta(t) &= z(t) - e^{AT} z(t - T) \\ \hat{x}(t) &= Q(\eta(t), u(t)) \end{cases} \quad (3.26)$$

con condición inicial $z(t) = z_0(t - T), 0 \leq t \leq T$.

Para demostrar la convergencia, considérese el estimador

$$\begin{cases} \dot{z}_d(t) &= Az_d(t) + by_d(t, 0, \xi, \sigma_d(t)) \\ \eta_d(t) &= z_d(t) - e^{AT} z_d(t - T) \\ \hat{x}_d(t) &= Q(\eta_d(t), \sigma_d(t)) \end{cases} \quad (3.27)$$

con $Q(\cdot, \sigma_d)$ definido como arriba, con condición inicial $z_d(t) = z_0(t - T), 0 \leq t \leq T$, y con $y_d(t, 0, \xi, \sigma_d(t)) = h(x_d(t, 0, \xi, \sigma_d(t)))$. De acuerdo al Teorema 8, $\hat{x}_d(t) = x_d(t)$ para todo $t \in [T, T']$.

No resulta difícil demostrar que para todo $t \in [0, T']$,

$$|z(t) - z_d(t)|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda_{k^*}|L_h} < \frac{\delta}{2}$$

y en consecuencia que $|\eta(t) - \eta_d(t)|_\infty \leq \delta$ para todo $t \in [0, T']$. Se sigue que para aquellos t , $|\hat{x}(t) - \hat{x}_d(t)| = |Q(\hat{x}(t), u(t)) - Q(\hat{x}_d(t), \sigma_d(t))| < \omega^T(\delta) < \varepsilon/2$. En consecuencia, para todo $t \in [T, T']$,

$$|x(t) - \hat{x}(t)| \leq |x(t) - \hat{x}_d(t)| + |\hat{x}_d(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon,$$

y el Teorema queda entonces demostrado. ■

Observación 25 Para diseñar el observador propuesto debemos poder computar para cada punto u_k en la partición prescrita de \mathbb{U} los mapas inyectivos $q_k(\cdot)$ y las inversas extendidas Q_k . Como fuera aclarado en [33], esto puede ser realizado con una precisión finita arbitraria, mediante el uso del siguiente mapa de inversión aproximada

$$Q_k(\eta) = \frac{\int_E \xi w_k(\epsilon, \eta, \xi) d\xi}{\int_E w_k(\epsilon, \eta, \xi) d\xi} \quad (3.28)$$

con

$$w_k(\epsilon, \eta, \xi) = \frac{1}{(\epsilon + |\eta - q_k(\xi)|)^{n+2}} \quad (3.29)$$

donde ϵ es elegido para alcanzar una precisión suficientemente alta del observador.

3.5. Ejemplo Numérico

Con el propósito de exhibir cómo funciona el observador propuesto, consideramos el siguiente sistema Lipschitz continuo no-autónomo.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 u \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (3.30)$$

para

$$h(x) = \begin{cases} x_1, & \text{si } x_1 > 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y donde $u(t)$ es una función rampa que va desde 10 a 20 en 5 segundos y luego descendiend nuevamente hacia 10 en un intervalo de tiempo igualmente largo.

Consideramos al sistema anterior como a uno de interés práctico pues modela el comportamiento de una clase amplia de dispositivos de la vida real, aquellos que consisten en un oscilador controlado por voltaje seguido por una no-linealidad (en este caso representada por la función de salida $h(\cdot)$, un rectificador de media-onda típico).

Ya que para cada $\nu \in \mathbb{U} = [10, 20]$ el sistema es lineal tiempo invariante, no es difícil verificar que las hipótesis del Corolario I de [33] se cumplen en casi todo punto. En consecuencia, las propiedades de observabilidad fuerte tiempo-finito y complejidad fuerte tiempo-finito se verifican.

Los parámetros que hemos tomado para el observador son $T' = 10$, $\varepsilon = 0,05$ y $\Lambda = \{-0,01, -0,05, -0,1, -0,5, -1, -1,5, -2, -4, -8, -16\}$. La norma de partición para \mathbb{U} es $\mu = 1$, y $T = 0,5$. Mediante simulaciones, se encontró que $\ell_{k^*} = 10$ nos permitió determinar los mapas aproximados de inversión (3.28) - (3.29), implementados como

$$Q_k(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^N x_i / [\varepsilon + |q_k(x_i) - \xi|]}{\sum_{i=1}^N 1 / [\varepsilon + |q_k(x_i) - \xi|]}, \quad (3.31)$$

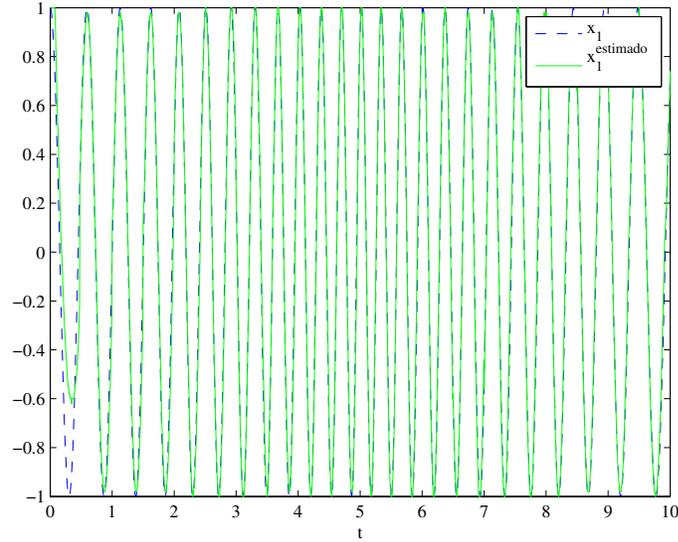


Figura 3.1: x_1 vs. \hat{x}_1 en función del tiempo.

con $\epsilon = 0,05$ y $\{x_i : i = 1, \dots, N\}$ ($N = 25600$), el producto cartesiano de las particiones de norma 0,0125 de ambas componentes de $E = [-1, 1] \times [-1, 1]$, con un error $|Q_k(q_k(x_i)) - x_i| < 2 \cdot 10^{-3}$ para cada k y cada i .

Las Figuras 3.1–3.3 muestran los resultados de las simulaciones, para las condiciones iniciales $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 0$ y $z_i(t - 0,5) = 0,2, 1 \leq i \leq 10, 0 \leq t \leq 0,5$.

Las Figuras 3.1–3.2 muestran las variables de estado x_1 y x_2 respecto de sus estimaciones \hat{x}_1 y \hat{x}_2 , mientras que la Figura 3.3 muestra la salida $y = h(x)$ y las Figuras 3.4–3.5 muestran los respectivos errores de estimación para x_1 y x_2 . Como puede observarse, el observador se desempeña dentro de las especificaciones dadas aproximadamente desde $t = 0,5$ en adelante. Sin embargo, el perfil de error en “estado de régimen” exhibe picos de amplitud acotada por 0,2. Esto ocurre debido a las transiciones de mapa inverso que coinciden con los eventos de conmutación de valor de control. Este efecto puede ser reducido a expensas de un esfuerzo computacional más grande que derivaría de una mayor refinación del mallado de controles y por tomar un T más pequeño.

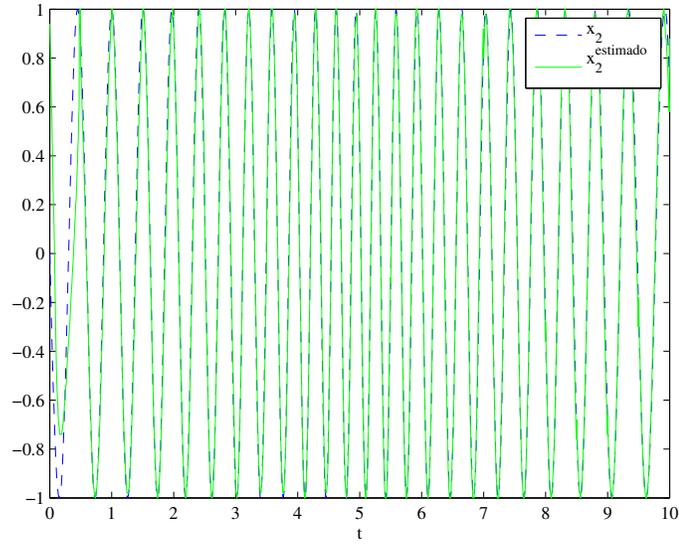


Figura 3.2: x_2 vs. \hat{x}_2 en función del tiempo.

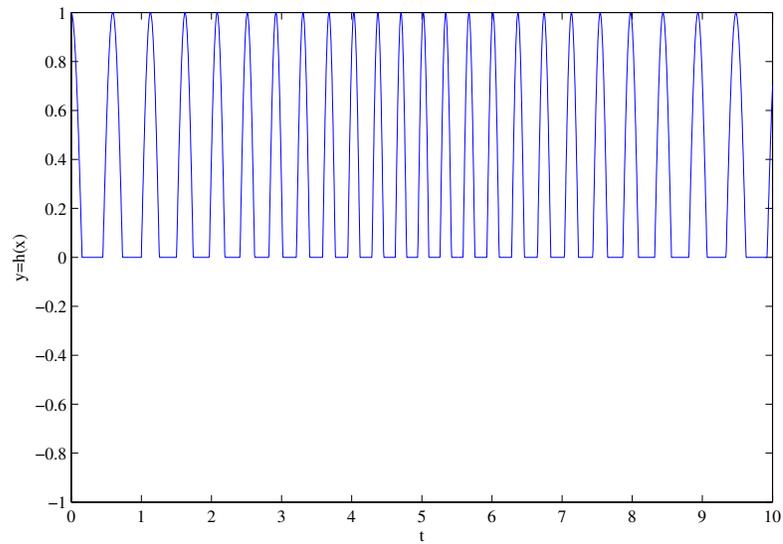
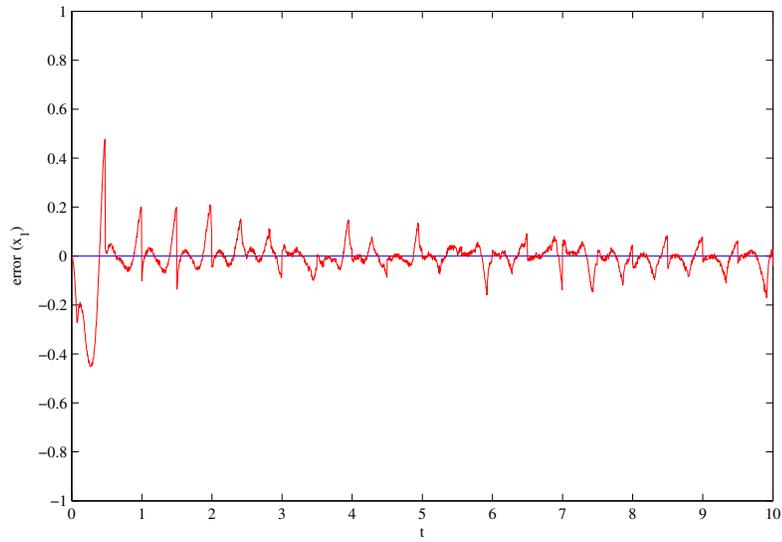
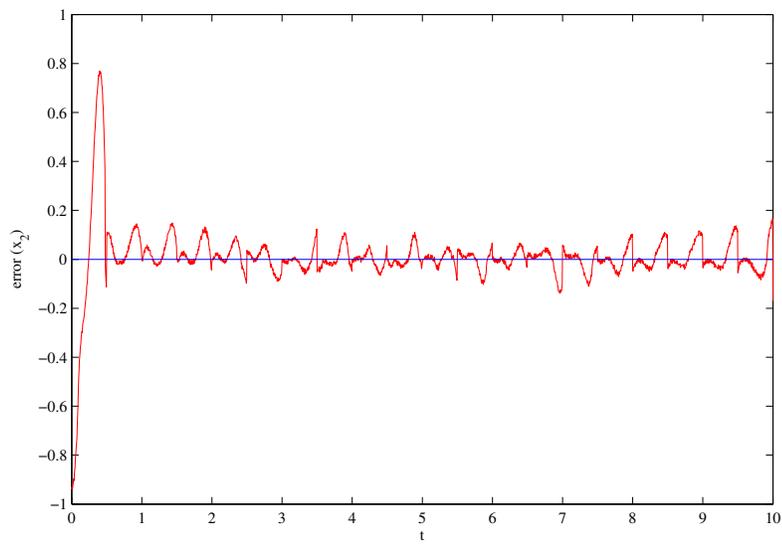


Figura 3.3: Salida y en función del tiempo.

Figura 3.4: Error de estimación para x_1 .Figura 3.5: Error de estimación para x_2 .

3.6. Conclusiones

En este capítulo hemos presentado un observador para sistemas Lipschitz continuos de una entrada y una salida (aunque puedan ser extendidos fácilmente al caso de múltiples entradas y múltiples salidas), que alcanza una precisión finita arbitraria en la estimación. El modelo de observador está basado en un diseño existente para sistemas autónomos y se aplica a una clase bastante amplia de controles (aquellos que son continuos a tramos por la derecha). El comportamiento del observador ha sido exhibido con un ejemplo numérico.

Capítulo 4

Método Alternativo – Sistemas a Lazo Abierto

4.1. Introducción

Nos proponemos en este capítulo retomar el problema de observación de estados para sistemas (inicialmente) descritos por:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.1)$$

donde, para $t \geq t_0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es la salida. Dada una $x_0 \in \mathbb{R}^n$ denotamos con $x(t, t_0, x_0)$ a la (única) solución de $\dot{x} = f(x)$ con condición inicial $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Para simplificar la notación y, cuando quede claro del contexto, $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ y $y(t) = h(x(t))$.

El punto central de la cuestión sigue siendo que la única hipótesis “estructural” sobre (4.1) es que las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ son funciones *localmente Lipschitz continuas*.

Si bien el propósito es desarrollar un método alternativo, como fuera presentado en [24, 26] para el caso autónomo y en [25] para el caso con controles a lazo abierto, cuyo objetivo es el de dar solución al problema en cuestión, a modo de introducción pasaremos revista de los conceptos que llevaron a considerar este método alternativo como opción.

Existen en la literatura numerosas aproximaciones al problema de observación

de estados para sistemas como (4.1) donde f y h son funciones no-lineales con algún “grado de arbitrariedad”. Sin embargo, es necesario imponer condiciones fuertes sobre ellas para, por ejemplo, llevar el sistema a una forma normal, o bien, conocer una función de Lyapunov apropiada (con las dificultades bien conocidas de dichos casos).

En [59] se propone un enfoque diferente al problema. La observación de estados se lleva a cabo mediante la minimización on-line de una función de costo de “horizonte móvil”. Esta técnica promete numerosas ventajas sobre las utilizadas anteriormente, en cuanto a que no precisa de ciertas hipótesis fuertes sobre la estructura del sistema, pero presenta algunas dificultades para poder determinar las condiciones necesarias para resolver el problema como contrapartida a la generalidad que ofrece el enfoque. Veamos entonces en qué consisten dichos enfoques.

4.1.1. Observación por Optimización

Tanto en [59] como en [45, 44, 1], la aproximación al problema es similar y ésta se desprende naturalmente de la definición general de observabilidad (véase [23]), que para sistemas autónomos como (4.1) se puede enunciar de la siguiente manera:

Definición 26 El sistema (4.1) es *observable en x_0* si no existe $x'_0 \in \mathbb{R}^n$ alguno tal que el par (x_0, x'_0) sea *indistinguible*. Se dice que el sistema es *observable* (respectivamente, *observable sobre $E \subset \mathbb{R}^n$*) si es observable en x_0 , para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (respectivamente, si reemplazamos \mathbb{R}^n por E).

donde la *indistinguibilidad* es una relación entre estados que se define como

Definición 27 Un par de estados $(x_0, x'_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ se dice *indistinguible* para el sistema (4.1) si para todo $t \geq t_0$, $h(x(t, t_0, x_0)) = h(x(t, t_0, x'_0))$.

En esta aproximación al problema se explota el hecho de que una diferencia en las condiciones iniciales del sistema observado se traduzca en una diferencia “medible” en las salidas del mismo para dichas condiciones iniciales y sobre alguna ventana de tiempo de observación suficientemente grande.

Más específicamente, se suele definir una función de costo del estilo:

$$\mathcal{J}(t, \xi) := \int_t^{t+T} |h(x(s, t, \xi)) - h(x(s, t, x(t, t_0, x_0)))|^2 ds \quad (4.2)$$

donde $\mathcal{J} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función que para cada instante t fijo toma valores mayores o iguales a cero para cada valor de $\xi \in \mathbb{R}^n$. Lo esperable es que esta función de costo mida, en cierto sentido, la distancia que hay entre el estado real del sistema y el estimado para cada instante de tiempo.

La técnica de horizonte móvil consiste en tomar una secuencia de instantes en el tiempo $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ tales que un algoritmo de minimización a determinar logre que la sucesión $\{\mathcal{J}(t_k, \xi_{2k+1})\}$ converja a cero cuando $k \rightarrow +\infty$. A la sucesión $\{\xi_{2k}\}$ se la entiende como al conjunto que parte de un ξ_0 arbitrario y luego, para $k > 0$, ξ_{2k} es la evolución según dicta la dinámica f del sistema desde t_{k-1} hasta t_k , vale decir: $\xi_{2k} = x(t_k, \xi_{2k-1}, t_{k-1})$ para todo $k > 0$. Entre un elemento par ξ_{2k} y uno impar ξ_{2k+1} actúa un algoritmo de minimización que puede variar según el enfoque pero que, en general, en los trabajos a los que hacemos referencia se cumple con el objetivo principal de que la estimación del estado real siempre mejore (o dicho con mayor precisión, que el error entre la estimación y el estado real del sistema disminuya). En [59, 45, 44, 1] se asume sin pérdida de validez de los argumentos, que dicha mejora en la estimación de los estados se ejecuta en tiempo cero para cada instante t_k .¹

Es habitual en todos los trabajos que utilizan este enfoque lograr la estimación de los estados en forma distribuida en el tiempo. No porque ésta no pueda ser realizada, por ejemplo a tiempo t_0 , sino porque a los fines prácticos la tarea de mejorar la aproximación al estado real utilizando una función de costo insume tiempo y si se distribuye la tarea en el tiempo se obtiene una solución continua a tramos que se aproxima a la trayectoria real del sistema². Esta práctica será retomada en el desarrollo de nuestro enfoque. Otra ventaja de realizar esto es que la tarea de observación tiene capacidad de ajustarse frente a posibles perturbaciones o sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales.

¹En la práctica, como la evolución del sistema se puede evaluar rápidamente se tiene prácticamente todo el tiempo comprendido entre muestra y muestra de tiempo para mejorar dicha estimación.

²La posibilidad de que esto ocurra depende de la regularidad de la función de costo y de “cuán continuas” sean las trayectorias del sistema con respecto a las condiciones iniciales.

Si bien existen algunas diferencias con respecto a los planteos entre un trabajo y otro, todos acuden a una mecánica similar a la que venimos de describir. Los puntos centrales (y más intrincados) se pueden resumir en las siguientes preguntas: *¿Qué características estructurales (de regularidad) tendrá la función de costo? y, en base a dichas características ¿es posible minimizar dicha función con un algoritmo “eficiente”?*

A modo de ejemplo, tomamos el caso de [59] donde se transforma el problema en uno de minimización utilizando una función de costo idéntica a la ya definida en (4.2), se considera un sistema autónomo sin controles, y en el análisis de las condiciones necesarias y/o suficientes se explicita la dependencia de la misma con respecto a x_0 y se la analiza para $t = t_0 = 0$, *i.e.*, se plantea: $\mathcal{N}(x_1, x_2) := \frac{1}{2} \int_0^T \|h(x(s, t, x_1)) - h(x(s, t, x_2))\|^2 ds$. Bajo la hipótesis de que el sistema es *fuertemente observable*

Definición 28 Un sistema (4.1) se dice *fuertemente observable en E* si y solo si para todo intervalo de tiempo $I = [0, T]$ y para cualesquiera dos estados iniciales $x_1, x_2 \in E$ y para cualquier $t \in E$

1. los estados $x(t, 0, x_1)$ y $x(t, 0, x_2)$ permanecen en E ; y
2. las salidas del sistema $y(t, 0, x_1)$ y $y(t, 0, x_2)$ son idénticas en E si y sólo si $x_1 = x_2$.

se llega fácilmente a la conclusión de que $\mathcal{N}(\xi, x_0) = 0 \iff \xi = x_0$. Esta condición claramente es necesaria y suficiente para la solución global del problema, es decir: si logramos resolver la raíz (única) de $\mathcal{N}(\cdot, x_0)$, entonces habremos encontrado la solución que buscábamos. Esta solución existe gracias a la observabilidad, pero esta condición de optimalidad nada nos dice sobre cómo resolver el problema de manera “eficiente” ni si esto es posible. Solamente nos habla de la existencia y unicidad de la solución, esto se debe a que se trata solamente de una condición de “orden cero” y no nos aporta mucho más que asegurarnos que si el sistema es observable luego la función de costo elegida tiene sentido. Para ganar en intuición sobre el problema y poder elaborar algún algoritmo eficiente se suele acudir a condiciones de optimalidad de “orden mayor”.

La existencia de este mínimo u óptimo nada nos dice por otro lado sobre la regularidad de la función de costo, *i.e.*: ¿es ésta continua?, ¿es analítica?, ¿son cerradas y convexas las curvas de nivel?, etcétera. De esta información, como se estudia en Teoría de Optimización, dependen fuertemente los métodos que puedan surgir para hallar el mínimo.

Es esperable cierta regularidad en dicha función de costo. Vale decir que las trayectorias generadas por el sistema (4.1), y sus respectivas salidas, son continuas (dadas las características de f y h). Además dada la continuidad con respecto a la variación en las condiciones iniciales ([22]) es fácil ver que la función de costo (por ser composición de funciones continuas) también lo será. Por supuesto sólo con esto no alcanza. Para ello habría que analizar otro tipo de condiciones que dependerán del algoritmo de minimización utilizado.

Volviendo a lo propuesto en [59], allí se hace frente al problema de minimización de \mathcal{N} mediante la utilización del método de Newton. Para ello es necesario que las funciones involucradas sean al menos \mathcal{C}^1 , en cuanto a la posibilidad de tener siempre definido al gradiente de la función de costo. De todas formas con esto último no alcanza, también es necesario caracterizar los puntos críticos. Para ello [59] enuncia el siguiente resultado:

Proposición 29 Si $\mathcal{N}(\cdot, x_0)$ es convexa cerca de x_0 , entonces vale la siguiente equivalencia:

$$\mathcal{N}(\xi, x_0) = 0 \iff \nabla_{\xi} \mathcal{N}(\xi, x_0) = 0$$

Esta última proposición es susceptible de ser generalizada a funciones no suaves utilizando herramientas del Análisis No Suave. Lo mismo vale para el resultado que [59] utiliza para verificar la convexidad necesaria. Esto es:

Proposición 30 $\mathcal{N}(\cdot, x_0)$ es convexa cerca de x_0 si

$$\nabla_{\xi}^2 \mathcal{N}(\xi, x_0) := \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{N}(\xi, x_0) > 0$$

en $\xi = x_0$.³

El teorema sobre el que se construye el observador en [59], se apoya fuertemente en el resultado de este último lema. Sin embargo, este resultado tiene un importante defecto: para clases de sistemas suficientemente generales (en los cuales encuentra su motivación principal el enfoque de observación por optimización) esta condición no se puede evaluar. Es decir

$$\nabla_{\xi} \mathcal{N}(\xi, x_0) = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (4.3)$$

donde x se refiere a la función $x(t, t_0, \xi)$, y donde $\frac{\partial h}{\partial x}$ no necesariamente existe dado que h (siendo sólo localmente Lipschitz continua) no tiene porqué ser diferenciable en todo punto.

No resulta evidente que si solamente consideramos f y h localmente Lipschitz continuas, las funciones de costo que podamos definir sean susceptibles de ser minimizadas mediante algún algoritmo que asegure convergencia del error de estimación a cero (o a valores suficientemente pequeños) en un lapso de tiempo que sea razonable desde un punto de vista práctico.

Discusión sobre condiciones (suficientes) para la convergencia “eficiente” del problema de observación por optimización.

Nos preguntaremos a continuación sobre las posibilidades de obtener condiciones suficientes para poder resolver el problema de observación de estados de manera eficiente por medio de optimización. Esta discusión, que será de carácter más bien intuitiva e informal, tiene el propósito de mostrar el camino conceptual que se siguió y que luego derivó en el método alternativo de observación de estados que será el objeto principal de estudio del resto de la tesis.

En primer lugar, debemos aclarar a qué nos referimos con resolver el problema de observación por optimización de manera eficiente. Como ya vimos, una condición de optimalidad de “orden cero” (*i.e.*, que la función de costo tenga un único mínimo

³También se prueba en [59] que para que el Hessiano $\nabla_{\xi}^2 \mathcal{N}(\xi, \xi)$ sea definido positivo basta con que el sistema linealizado sobre la trayectoria $x(t, t_0, \xi)$ sea observable en I para todo $\xi \in E$.

global correspondiente a cuando se la evalúa sobre el estado real del sistema) nos asegura que existe una única solución al problema pero si la función de costo no tiene ninguna regularidad (*e.g.*, en un caso extremo si fuese totalmente aleatoria) deberíamos evaluar la función de costo por “fuerza bruta” y de manera indefinida en el tiempo para poder dar con el argumento que hace que dicho costo se minimice totalmente. Por otro lado, de ser así la resolución del problema debe ser abordada en forma global.

Nosotros consideraremos como eficiente a una forma de resolver el problema de observación por optimización que nos permita disminuir la función de costo sea cual fuere el punto que estamos evaluando a un tiempo dado (*e.g.*, si estamos en el punto $x_2 \in \mathbb{R}^n$, encontrar un punto $x_1 \in \mathbb{R}^n$ de su vecindad tal que $\mathcal{J}(t, x_1) < \mathcal{J}(t, x_2)$ para un cierto t fijo), salvo para el punto que corresponde al mínimo. Dicho punto “de descenso” debe existir en una vecindad del punto del que partimos (para que el problema pueda ser resuelto localmente) y como la función de costo posee cierta regularidad (localmente Lipschitz continua) entonces se podrá hallar una dirección de descenso evaluando dicha función en una cantidad razonablemente acotada de puntos.

Ahora bien, descartando el punto para el cuál la función de costo se anula (el mínimo global): ¿Cuáles deberían ser las condiciones que debe cumplir dicha función para poder asegurar que siempre podremos hallar un punto vecino de cualquier otro que haga que dicha función decrezca?

Como hemos visto de las condiciones de optimalidad que se presentan en la literatura para problemas de observación de estados, no podemos asegurar que esta última pregunta tenga una respuesta afirmativa, al menos para el caso general en que f y h sean solamente localmente Lipschitz continuas y que se utilice una función de costo como por ejemplo (4.2). Pero aquellas condiciones están atadas a esta forma específica de función de costo.

Por otro lado, no estamos obligados a usar una función de costo específica (siempre y cuando ésta verifique la condición de “orden cero”), entonces la pregunta que tal vez cabe hacerse es la siguiente: ¿Se puede construir una función de costo que asegure un “descenso” local? En la búsqueda de una respuesta a esta pregunta es que hallamos el camino para el método alternativo que se propondrá en el desarrollo de este capítulo.

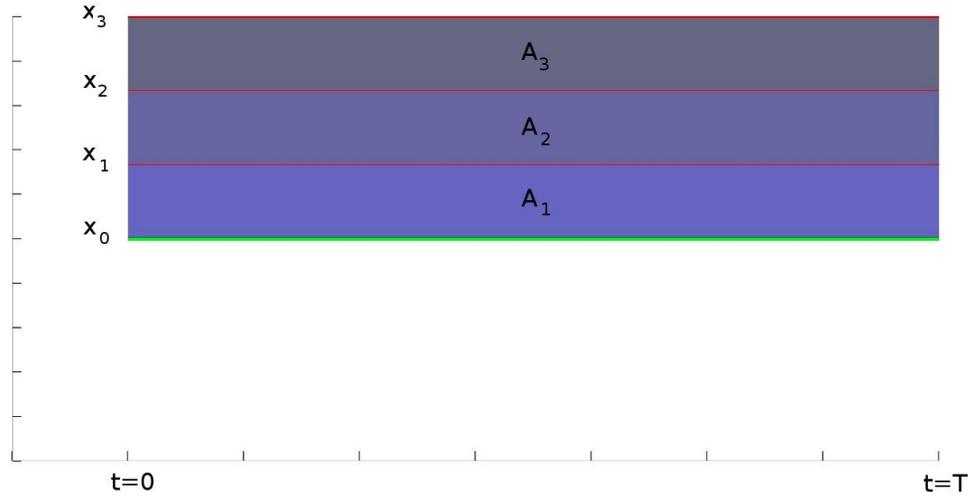


Figura 4.1: Evolución del segmento para $\dot{x} = 0$.

Volvamos por un momento a observar la función de costo $\mathcal{J}(t, \xi)$ definida en (4.2). Por simplicidad consideraremos que $t = 0$, *i.e.* integramos en $[0, T]$. Dicha función mide el cuadrado de las distancias euclídeas entre valores de salida para cada instante de tiempo y los integra entre 0 y T . Como ejercicio pensemos por un momento que la salida es la identidad $h(x) = x^4$. Más aún, supongamos que el sistema evoluciona según la dinámica $\dot{x} = 0$. Si se tienen cuatro condiciones iniciales como en la Figura 4.1, adonde x_3 es la más alejada de x_0 (el estado real del sistema) y x_2 y x_1 se encuentran en el segmento que une a x_0 con x_3 , se puede ver que

$$\mathcal{J}(0, x_3) = |x_3 - x_0|^2 \cdot T > \mathcal{J}(0, x_2) = |x_2 - x_0|^2 \cdot T > \mathcal{J}(0, x_1) = |x_1 - x_0|^2 \cdot T \quad (4.4)$$

Aunque no tenemos porqué saber adonde se encuentra x_0 esto demuestra que midiendo el costo de esta manera existe una dirección de descenso (en el sentido que va de x_3 a x_0) para cualquier punto inicial que uno elija (siempre que sea distinto de x_0). Por ejemplo, x_1 es un punto en dirección de descenso del costo tanto para x_3 como para x_2 . Existe una razón intrínseca por la cual esto se produce: las soluciones (en este caso las líneas horizontales que parten de cada condición inicial) no se cruzan (en virtud de la unicidad) y por lo tanto se conserva “el orden” a medida que evolucionan.

⁴Solamente tiene sentido como parte del razonamiento pues no habría problema de observación de estados si $h(x) = x$.

Para sistemas generales adonde $\dot{x} = f(x)$, con f localmente Lipschitz continua, como también habrá unicidad de soluciones para cada condición inicial, ocurrirá que los elementos en un *segmento*⁵ inicial conservarán “su orden” a medida que evolucionan. Sin embargo la distancia euclídea (como se mide en la función (4.2) antes de ser elevada al cuadrado) entre elementos de un segmento inicial no tiene porqué “conservar el orden” cuando este segmento va evolucionando ya que el mismo se irá deformando, a diferencia de lo que ocurre en la Figura 4.1.

Esto nos sugiere utilizar otro tipo de distancia para medir el costo, una distancia que en lugar de medir la distancia euclídea mida la distancia sobre el segmento que evoluciona. Por otro lado, hablar de esta distancia tiene sentido porque la evolución se da según un *flujo*⁶ que por ser f Lipschitz continua se sabe que es un homeomorfismo: de esta manera el segmento deformado por la evolución es metrizable y se puede establecer una distancia que asegure “conservación de la relación de orden”. Para ilustrar esto observemos la Figura 4.2 que se corresponde con el flujo del segmento inicial que une a x_0 con x_3 a lo largo del tiempo para un sistema $\dot{x} = f(x) \neq 0$ con f localmente Lipschitz continua. A esta figura también se la puede pensar como la deformación de la Figura 4.1 por el homeomorfismo (flujo) que se corresponde con la evolución del sistema $\dot{x} = f(x)$ por lo que existe una correspondencia entre las áreas A_i ($i = 1, 2, 3$) y las correspondientes de dicho objeto deformado en la Figura 4.2. Podemos decir entonces que existe una métrica en el espacio donde se mueven las trayectorias del sistema que nos permite conservar el orden: que a medida que nos alejamos de la trayectoria generada por x_0 las “áreas” crecen y por lo tanto nos aseguramos una dirección de descenso sea donde sea que estemos evaluando la función de costo (salvo en x_0 donde el costo es nulo) definida por esta nueva métrica.

Pero el problema no termina aquí ya que lo que hemos considerado solamente sirve para una salida $h(x) = x$ que no tiene sentido práctico. Para una h arbitraria, en general se perderá la inyectividad y habrá muchos estados que serán representados por un único valor en el espacio de salidas. Véase la Figura 4.3, aquí hemos considerado una función de salida que muestra sólo una de las coordenadas del vector de estados

⁵Nos referimos a un segmento lineal entre dos puntos dados.

⁶Que es la acción de grupo del tiempo a través de la función de evolución del sistema sobre un conjunto de valores en el espacio de estados.

cuando ésta toma valores negativos, y cuando ésta toma valores positivos arroja cero (*i.e.* un rectificador de media onda negativa sobre una sola de las coordenadas, parecido a (3.2)). Es decir que en los primeros instantes de tiempo sólo vale cero y no podríamos medir ninguna distancia (o costo).

Así como establecimos que existe una distancia entre trayectorias que nos permitiría definir una función de costo que asegure dirección de descenso local también existe una distancia que cumple con el mismo propósito si consideramos que las trayectorias pasan por una función de salida h arbitraria. Dada una función cualquiera, en este caso h , esta induce clases de equivalencia (los conjuntos de estados que se corresponden con una misma salida, *i.e.* $h^{-1}(x)$). Existe un *espacio topológico cociente* inducido por esta relación de equivalencia. *En este espacio cociente los “puntos” son trayectorias de estados del sistema que tienen la misma salida para una ventana de tiempo dada.* En “Topología” se define una (pseudo-)métrica para este tipo de espacios. Esta métrica tiene una definición precisa que no enunciamos aquí pero sí nos quedaremos con el siguiente hecho importante que se desprende de la misma para nuestro caso: si se cumple (para la ventana de tiempo considerada) que todas las trayectorias son distinguibles entre sí (observabilidad) luego calcular esta distancias con esta métrica es equivalente a calcular la distancia entre trayectorias de estados como ya habíamos formulado. La diferencia está en que *desde el punto de vista práctico para poder calcular esta distancia tenemos que distinguir entre trayectorias a la salida y con esto ya habremos resuelto el problema de observación dejando el cálculo de la función de costo como algo redundante.*

En apariencia hemos vuelto al principio, *i.e.*, sólo tenemos como herramienta la definición de (in)distinguibilidad entre estados. Sin embargo este razonamiento, aparte de poner de manifiesto algunas limitaciones importantes en el método de observación por optimización, nos deja la siguiente intuición: cuando hablamos del espacio cociente dijimos que todas las trayectorias de estados que tienen la misma salida son un solo punto allí, entonces si la ventana de tiempo considerada fuese pequeña este espacio podría tener un solo punto (*e.g.* en la Fig. 4.3 una ventana que va de 0 a $T/3$ aproximadamente) pero a medida que vamos considerando una ventana de tiempo mayor se empiezan a distinguir diferentes trayectorias de salida para las diferentes

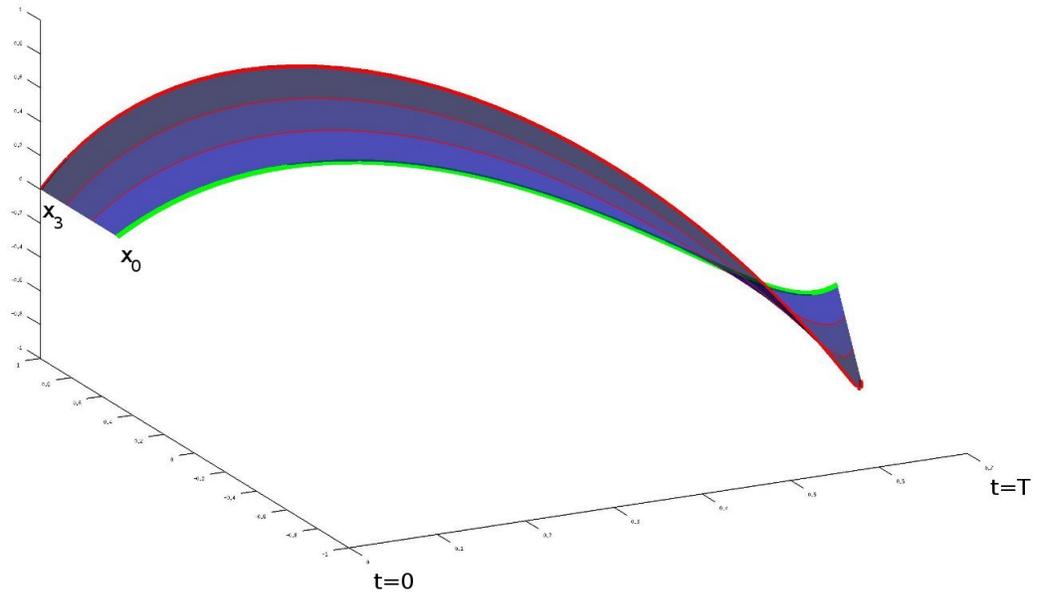


Figura 4.2: Evolución del segmento para $\dot{x} = f(x) \neq 0$.

trayectorias de estados y luego van apareciendo paulatinamente (aunque podría ser instantáneo también) puntos en el espacio cociente hasta que el mismo se encuentre poblado de tantos puntos como trayectorias de estados (condiciones iniciales) hay⁷. Es esto último lo que nos sugiere el método que introducimos a continuación.

4.1.2. Método alternativo de observación de estados – Descripción conceptual

Entonces la idea es que, valiéndonos de la hipótesis de observabilidad 26, podamos ir desglosando paulatinamente a partir de la salida observada qué trayectorias pertenecen a qué punto en el referido espacio cociente. Y deseamos hacer esto de la manera más eficiente posible.

Una posibilidad sería tomar el conjunto $\bar{E} = \{\cup_{t \geq t_0} x(t, t_0, \eta) : \eta \in E\}$ de todas las trayectorias sobre un conjunto de condiciones iniciales $E \subset \mathbb{R}^n$ adonde

⁷Siempre que el sistema sea observable en el sentido de la Definición 26.

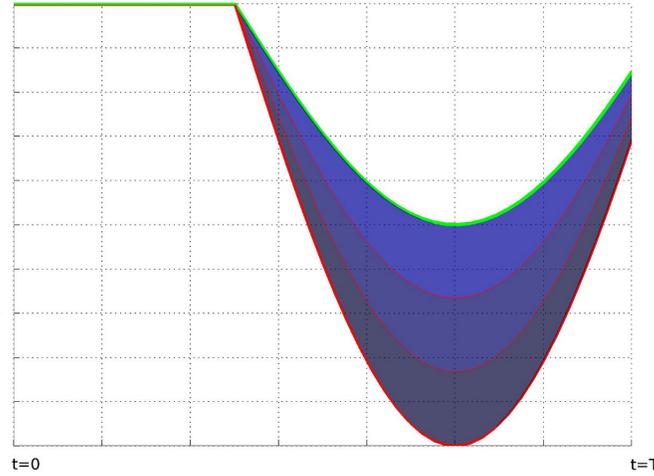


Figura 4.3: Salida respecto de la Figura 4.2.

nos interesa resolver el problema de observación. Luego nos debemos quedar con $\{\cup_{t \geq t_0} x(t, t_0, \eta) \in \bar{E} : h(x(t, t_0, \eta)) = y(t) \quad \forall t \geq t_0\}$. Claro que hacer esto sería evaluar por fuerza bruta pues, en general, habría que evaluar todas las trayectorias posibles y no estaríamos aprovechando el hecho de que el espacio cociente mencionado se va “poblando” paulatinamente. El punto central del algoritmo que vamos a desarrollar se encuentra en la siguiente observación:

Dada la unicidad de las soluciones del sistema (4.1) cada elemento ξ perteneciente a una dada trayectoria del mismo para un dado tiempo t esta relacionado de forma biunívoca con cualquier otro elemento ξ' también perteneciente a la misma trayectoria del sistema y para cualquier otro tiempo t' .

Por trivial que pueda parecer, es importante enunciar el siguiente corolario de esto último

Si para un dado instante de tiempo $t' \in [t_0, +\infty)$ y un $\xi \in E$ cualquiera se verifica que $x(t', t_0, \xi) \notin h^{-1}(y(t', t_0, x_0))$ luego $\cup_{t \geq t_0} x(t, t_0, \xi) \neq \cup_{t \geq t_0} x(t, t_0, x_0)$

Es decir que no es necesario calcular todas las trayectorias. Si la evaluación se

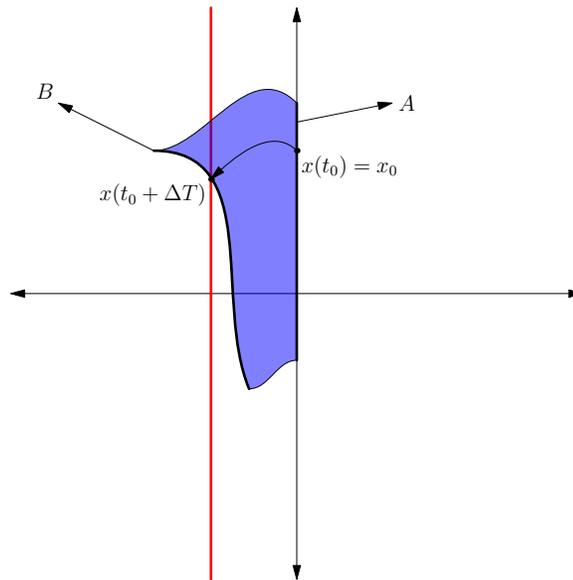


Figura 4.4: Para un sistema con $n = 2$ y $p = 1$.

realiza *on-line* basta con seguir el siguiente procedimiento: si para un dado instante t' y un dado estado inicial ξ la trayectoria $x(t', t_0, \xi)$ no pertenece al conjunto $h^{-1}(y(t', t_0, x_0))$ luego esta puede ser *descartada automáticamente* del conjunto de trayectorias plausibles de ser la trayectoria real de condición inicial x_0 en t_0 .

A modo de ejemplo veamos que sucedería en el caso de tener un sistema de dimensión $n = 2$ con salida unidimensional ($p = 1$) $h(x) = x_1$. Como se puede ver en la Figura 4.4 en lugar de arrancar suponiendo estados iniciales ξ plausibles en todo E (que bien podría ser \mathbb{R}^2) solamente nos quedamos con la sección de dicho conjunto que corresponde a la salida inicial $y(t_0)$, *i.e.* $A = E \cap h^{-1}(t_0)$. Luego los elementos del conjunto A evolucionarán acorde a la dinámica del sistema en cuestión a un nuevo conjunto B para un instante $t_0 + \Delta T$ (para algún $\Delta T > 0$). Se puede ver en la gráfica que el único elemento de B que no se distingue de la salida corresponde al estado real del sistema. Es así que en este ejemplo hubiese bastado con observar lo que sucede en solo dos instantes de tiempo para obtener el estado real del sistema.

También resulta interesante como ejemplo teórico observar lo que ocurre para un sistema lineal invariante en el tiempo.

Aunque este enfoque de observación de estados no tenga sentido práctico para sistemas lineales, pues existe un observador mucho más simple para los mismos, analizaremos el caso lineal invariante en el tiempo para ganar en intuición sobre el problema. Sea entonces el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x \\ y = \mathbf{C}x \end{cases} \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.5)$$

Para un sistema como (4.5), hacer evolucionar cualquier conjunto de estados (como fuera A en el ejemplo anterior) resulta trivial ya que conocemos la forma analítica de la operación de transición de estados para la solución fundamental del sistema, i.e. $e^{\mathbf{A}\Delta T}$. El problema se reduce entonces a intersecar hiperplanos y repetir la operación con el conjunto restante de dicha operación. Es por ello que podemos enunciar la siguiente:

Proposición 31 Dado un sistema como (4.5), siempre que éste sea observable (i.e., cumple con la condición de rango de Kalman), el espacio de búsqueda⁸ *disminuye para cada instante de muestreo*⁹ hasta que queda un único elemento que corresponde al estado real del sistema.

Demostración: Supongamos que el espacio de búsqueda no disminuye de tamaño, entonces necesariamente ocurre una de dos posibilidades:

1. $e^{\mathbf{A}T} \neq Id$ y por lo tanto las trayectorias se mueven sin que haya variación en la salida del sistema; o bien,
2. $e^{\mathbf{A}T} = Id$ y la condición de rango de Kalman es igual a $\text{rango}\{\mathbf{C}\}$ que en general es menor a n , la dimensión del sistema.

En ambos casos llegamos a una contradicción pues supusimos que el sistema era observable. ■

En la Figura 4.5 se ve el caso para un sistema lineal con:

⁸Es decir, el conjunto inicial al cual pertenece x_0 y todas sus evoluciones y reducciones subsiguientes al ser comparado con los distintos conjuntos $h^{-1}(y(t))$.

⁹I.e., si el conjunto en cuestión es A_1 , luego se obtiene un nuevo conjunto A_2 tal que $A_2 \subsetneq A_1$.

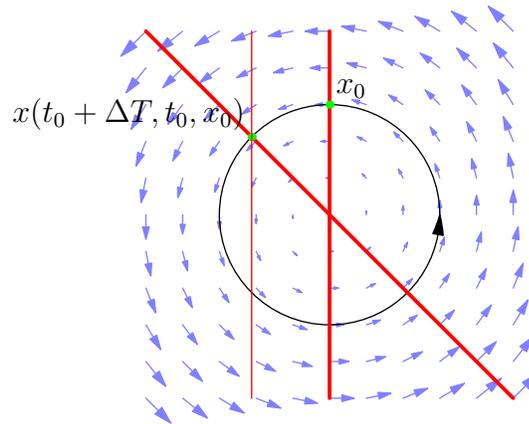


Figura 4.5: Sistema lineal con $n = 2$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que para el caso $n = 2$ si el sistema es observable la estimación se resuelve en una sola iteración. Para un valor de n arbitrario, si la salida es de dimensión 1, la estimación se puede resolver en $n - 1$ pasos. Por ejemplo, para $n = 3$ el espacio de búsqueda inicial es un plano. En la primera iteración del algoritmo se reduce el espacio de búsqueda a una recta, y en la segunda iteración dicho espacio se reduce a un punto que es el valor real del estado del sistema.

Ahora bien, estos ejemplos que acabamos de examinar son impracticables pues los conjuntos a los que hacemos referencia tienen una cantidad infinita de puntos. Esto como mucho podrá ser aproximado en la práctica por lo que será necesario hacer consideraciones adicionales para asegurar la convergencia del observador. Veamos

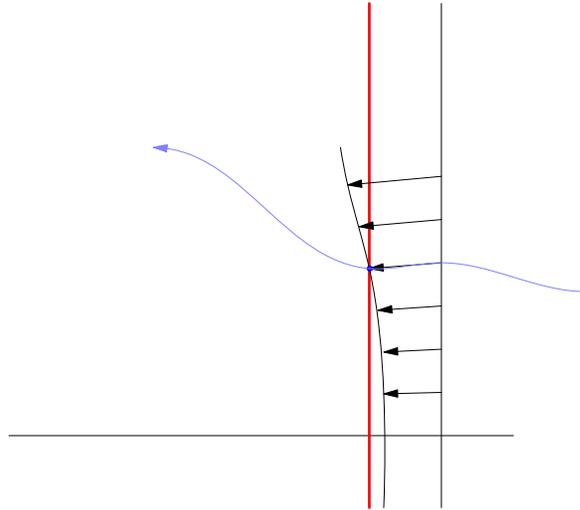


Figura 4.6: Caso discreto.

la intuición del enfoque dejando los detalles técnicos para los resultados que serán presentados en el desarrollo de este capítulo.

Entonces si consideramos que el conjunto inicial A es un conjunto acotado y a su vez representado por una cantidad finita de puntos, como podemos ver en la Figura 4.6 con esto sólo no alcanza pues (salvo que uno de los puntos que representan al conjunto inicial A coincida exactamente con x_0) en general por pequeño que se elija el muestreo en el tiempo (ΔT) o por “fina” que se elija la representación discreta de A sucederá que $B \cap h^{-1}(y(t_0 + \Delta T)) = \emptyset$.

Vale la siguiente

Observación 32 En la práctica (véase la Figura 4.7) será necesario agregar un entorno de los conjuntos $h^{-1}(y)$ para que no se descarten todas las posibilidades en un segundo instante de tiempo (el algoritmo funcionará evaluando las intersecciones entre los conjuntos involucrados sobre una base discretizada del tiempo).

Habrán luego tres importantes parámetros de diseño:

1. Los puntos que representarán al conjunto donde se encuentra el estado real del

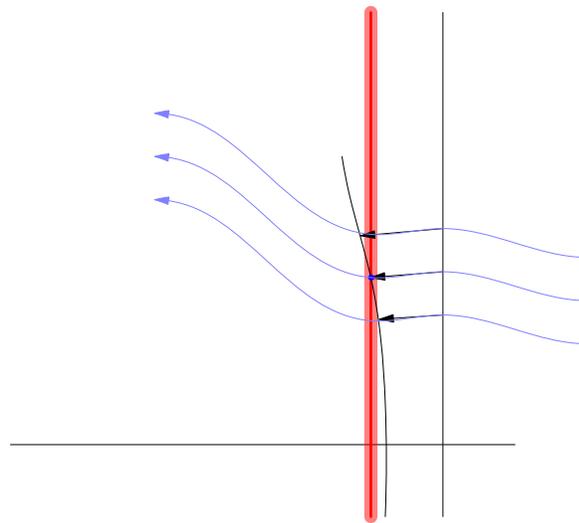


Figura 4.7: En la práctica.

sistema

2. Los instantes de muestreo en el tiempo donde se evaluará qué puntos son plausibles de representar (por cercanía) al estado real del sistema y cuales no.
3. Qué tan grande es el entorno de los conjuntos $h^{-1}(y(t))$ para los diferentes instantes de muestreo en el tiempo.

Claramente habrá relaciones de compromiso de diseño entre los tres ítems que venimos de enumerar. Por ejemplo, si fijamos la frecuencia de muestreo y la resolución con la que representamos los conjuntos donde se encuentra el estado real del sistema, luego al variar el entorno que mencionamos en el tercer ítem podemos ir desde el caso: (i) de mayor velocidad de convergencia (y menor complejidad computacional) cuando el entorno es pequeño, al caso (ii) de menor velocidad de convergencia (y mayor complejidad computacional) cuando el entorno es más grande. Esto se debe a que cuanto más grande es el entorno, menos puntos considerados posibles representantes del estado real del sistema serán eliminados y por lo tanto el algoritmo, en suma, deberá computar la evolución de una mayor cantidad de puntos. Uno desearía siempre trabajar en el caso (i) pero existe la posibilidad de que si las condiciones no son las

adecuadas se descarten todas las posibilidades y nos quedemos sin puntos plausibles de representar al estado real del sistema. Sobre la elección de estos parámetros en relación a las constantes de Lipschitz del sistema (4.1) y a la observabilidad es que versarán el desarrollo y los resultados principales de este capítulo.

4.2. Formulación del Problema

En primer lugar, consideraremos sistemas como (4.1). Haremos la siguiente

Suposición 33 Las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ son localmente Lipschitz continuas.

Esta suposición conformará, junto con la noción de observabilidad, la principal hipótesis de nuestro trabajo. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ como ya mencionáramos previamente denotaremos como $x(t, t_0, x_0)$ a la (única) solución de $\dot{x} = f(x)$ con condición inicial $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$, pero para el caso en que queramos explicitar la dinámica específica que dictamina la evolución de las trayectorias denotaremos $T_f^{t_0, t}(x_0) = x(t, t_0, x_0)$.

Como ya fuera establecido el objetivo principal es el de producir una estimación del estado $x(t)$ del sistema (4.1) basándonos en una noción de observabilidad tan débil como sea posible (Def. 26) y que al mismo tiempo sea compatible con las (un tanto) generales hipótesis sobre el sistema.

Decimos que el sistema (4.1) es *observable sobre* $E \subset \mathbb{R}^n$ como en la Definición 26.

Esta noción de observabilidad es casi la más débil que puede ser postulada para esta clase de sistemas, de hecho (véase [23]) la noción más débil de observabilidad sólo requiere para que un cierto estado sea observable que éste tenga alguna vecindad de estados distinguibles.

4.2.1. Principio Básico

Antes de comenzar con los detalles técnicos haremos una descripción del principio básico que rige el funcionamiento del observador que propondremos. En primer lugar, introduzcamos un objeto central del algoritmo de observación de estados:

Definición 34 Sea cualquier $t \geq t_0$ fijo, un subconjunto D_t del espacio de estados es un *espacio de búsqueda* si incluye el estado real $x(t)$ del sistema (4.1), *i.e.* $D_t \subset \mathbb{R}^n$

tal que $D_t \ni x(t)$.

El observador que desarrollaremos es un sistema dinámico que comienza con un espacio de búsqueda D_{t_0} y evoluciona de tal manera que el espacio de búsqueda disminuye de tamaño hasta convertirse en una vecindad arbitrariamente pequeña del estado real del sistema.

Esta reducción será llevada a cabo mediante un método conceptualmente extraído de la noción misma de observabilidad. Si bien en principio D_{t_0} podría ser cualquier conjunto que contenga a x_0 , tomamos $D_{t_0} = h^{-1}(y(t_0))$ (según describiéramos en 4.1.2). De aquí en más, la dinámica del sistema (4.1) jugará un rol fundamental en determinar la evolución del espacio de búsqueda, como puede ser visto en la Figura 4.8.

Sea algún $\Delta T > 0$, entonces

$$D_{t_0+\Delta T} = T_f^{t_0, t_0+\Delta T}(D_{t_0}) \cap h^{-1}(y(t_0 + \Delta T)).$$

Idealmente tendremos que

$$D_{t_0+\Delta T} \subsetneq T_f^{t_0, t_0+\Delta T}(D_{t_0})$$

y sólo en el peor caso ocurrirá que

$$T_f^{t_0, t_0+\Delta T}(D_{t_0}) \subseteq h^{-1}(y(t_0 + \Delta T)).$$

Gracias a la observabilidad, esto no debería ocurrir *para todo* ΔT ya que implicaría la existencia de pares de estados indistinguibles. Entonces, mientras que el espacio de búsqueda puede no disminuir de tamaño, *i.e.* que al efectuar la intersección entre $T_f^{t_0, t_0+\Delta T}(D_{t_0})$ y $h^{-1}(y(t_0 + \Delta T))$ no se “descarte” ningún elemento (y por lo tanto $D_{t_0+\Delta T} = T_f^{t_0, t_0+\Delta T}(D_{t_0})$), ello no podrá ocurrir para todo instante $t > t_0$.

Definición 35 A los instantes de tiempo $t \geq t_0$ en donde se efectúe una intersección entre el conjunto $h^{-1}(y(t))$ con la evolución del *espacio de búsqueda* de un instante previo a dicho instante t , los llamaremos *tiempos o instantes de descarte*¹⁰.

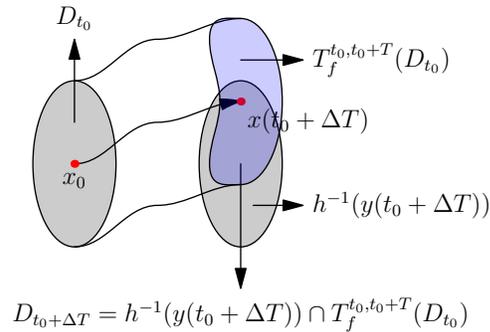


Figura 4.8: Principio básico.

Observación 36 Si el proceso de reducción del espacio de búsqueda evolucionase en tiempo continuo, la observabilidad sería suficiente para que el observador convergiese¹¹. De hecho, supóngase que hay un estado $\xi \in D_{t_0}$ con $\xi \neq x_0$. Luego, si $T_f^{t_0, t}(\xi)$ sobrevive al proceso de descarte para todo $t > t_0$ el observador no convergería, pero entonces el sistema tampoco sería observable en x_0 , ya que (ξ, x_0) sería un par indistinguible por definición.

Por supuesto, en un caso de “la vida real” deberemos tener en cuenta varias restricciones como ya fueron esbozadas en 4.1.2.

La observación de estados se realiza en un conjunto de instantes de tiempo discreto y con una resolución finita tanto en el espacio de estados como en el espacio de salidas, y adicionalmente el espacio de búsqueda $h^{-1}(y_0)$ puede no ser acotado. En lo subsiguiente suponemos que se cumple que:

¹⁰Sea cierto o no que luego de efectuar dicha intersección se haya descartado o no algún punto del espacio de búsqueda.

¹¹Todavía no hemos definido con precisión el observador y menos aún lo que significa que éste converja. Sin embargo la intuición nos permite imaginar por el momento al observador como a un algoritmo que eventualmente “reduce” el espacio de búsqueda y a la convergencia como la reducción de dicho espacio a un conjunto cuyos elementos están cada vez más próximos al estado real del sistema.

Suposición 37 El espacio de búsqueda inicial es $D_{t_0} = E \cap h^{-1}(y_0)$ para algún $E \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$.

Observación 38 En la elección del espacio de búsqueda inicial D_{t_0} es razonable (y de práctica común) asumir que el estado inicial se encuentra en un conjunto acotado lo suficientemente grande.

En la Observación 32 hemos denotado la necesidad práctica de que haya un margen de tolerancia por sobre aquello que puede haber sido producido por la salida del sistema. Por este motivo deberemos introducir nociones de indistinguibilidad y observabilidad alternativas.

Definición 39 Dado $\gamma > 0$,

- Un par de estados $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es γ -*indistinguishable* para el sistema (4.1) si $\forall t \geq t_0$, $|h(T_f^{t_0, t}(x_1)) - h(T_f^{t_0, t}(x_2))| < \gamma$.
- El sistema (4.1) es γ -*observable* si para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ con $x_1 \neq x_2$, existe $t^* > t_0$ tal que $|h(T_f^{t_0, t^*}(x_1)) - h(T_f^{t_0, t^*}(x_2))| > 2\gamma$.
- Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$, el sistema (4.1) se dice γ -*observable sobre E* si para todo $(x_1, x_2) \in E \times E$ con $x_1 \neq x_2$, existe $t^* > t_0$ tal que $|h(T_f^{t_0, t^*}(x_1)) - h(T_f^{t_0, t^*}(x_2))| > 2\gamma$

Observación 40 La existencia de tal t^* establece que dos estados iniciales diferentes en E podrían ser distinguidos en tiempo finito observando las salidas correspondientes a las trayectorias que ellos generan, aún cuando la resolución en la observación de la salida es del orden de 2γ .

El siguiente resultado será utilizado en lo que sigue.

Proposición 41 Sean los números reales positivos γ y ε , y supóngase que el sistema (4.1) es γ -observable como en la Definición 39. Sea $E \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ y $x_0 \in E$. Entonces si $E_\varepsilon = \{\xi \in E : |\xi - x_0| \geq \varepsilon\} \neq \emptyset$, existe $t^\# > 0$ que depende de E, x_0 y ε tal que para todo $\xi \in E_\varepsilon$, $|h(T_f^{t_0, t}(\xi)) - h(T_f^{t_0, t}(x_0))| > 2\gamma$ para algún $t \in [t_0, t^\#]$.

Demostración: Sea $\mu(\xi, t) := |h(T_f^{t_0, t}(\xi)) - h(T_f^{t_0, t}(x_0))|$ y sea $\xi \in E_\varepsilon$. Debido a la γ -observabilidad, existe t_ξ tal que $\mu(\xi, t_\xi) > 2\gamma$. Como $\mu(\cdot, \cdot) \in \mathcal{C}(E \times [t_0, \infty))$, entonces existe $0 < \delta_\xi < \varepsilon$ tal que $\mu(\eta, t_\xi) > 2\gamma$ para todo $\eta \in B(\xi, \delta_\xi)$. Como $\{B(\xi, \delta_\xi), \xi \in E_\varepsilon\}$ es un cubrimiento abierto de E_ε el cual es un conjunto compacto, entonces existe $\{\xi_1, \dots, \xi_k\} \subset E_\varepsilon$ tal que $E_\varepsilon \subset \cup_{i=1}^k B(\xi_i, \delta_{\xi_i})$. Se sigue fácilmente que $t^\# = \max\{t_{\xi_1}, \dots, t_{\xi_k}\}$ verifica la tesis. ■

Observación 42

1. Debemos hacer notar que $t^\#$ es una función no-creciente de ε .
2. El resultado sugiere un camino para hacer frente a la resolución finita del espacio de estados, por un lado, y con la carga computacional asociada con el proceso de reducción del espacio de búsqueda por otro. Ya que podemos distinguir entre un estado inicial x_0 y algún otro estado x a lo sumo en el instante de tiempo $t^\#$ siempre y cuando $|x - x_0| \geq \varepsilon$, alcanza con construir una malla que cubra D_{t_0} (i.e., un conjunto de celdas iguales y mutuamente adyacentes cuya unión contiene a D_{t_0} y cuyos centros todos pertenecen a D_{t_0}) de tal manera que los centros de las celdas adyacentes se encuentren a una distancia 2ε . Dicho mallado se puede ver en la figura 4.9 donde los conjuntos C_i son las celdas con centros c_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Un estado $\xi \in D_{t_0}$ tal que x_0 no pertenezca a la misma celda y que evoluciona de acuerdo a la dinámica del sistema, eventualmente será descartado y también todo los elementos de su misma celda junto con él.
3. Si nos basamos en argumentos de compacidad no es tarea difícil demostrar que $t^\#$ existe independientemente de x_0 . De ahora en más, dados E, γ y ε como los de

la Proposición 41, denotaremos $t^\# = t^\#(E, \gamma, \varepsilon)$ para enfatizar la dependencia de $t^\#$ con respecto a esos parámetros.

Ya desarrollada la intuición del enfoque y sus principios básicos de funcionamiento pasaremos a presentar el observador propiamente dicho en la siguiente sección.

4.3. El Observador: caso sistemas autónomos

En lo subsiguiente supondremos la existencia de una sucesión fija de tiempos de muestreo

$$\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_k, \dots\} \quad (4.6)$$

y, asociada a ella, una sucesión fija de muestras de la salida

$$\mathcal{Y} = \{y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_k), \dots\} \subset \mathbb{R}^p$$

del sistema (4.1) correspondientes al estado inicial x_0 . Por simplicidad denotaremos $y_k = y(t_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

Debemos formalizar el concepto que se basa en la idea expuesta en 2) de la Observación 42. El espacio de búsqueda estará entonces representado por una cantidad finita de puntos, los centros de las celdas que cubren la región donde se encuentra el estado real del sistema. Sin embargo, es preciso hacer notar lo siguiente: dada una resolución fija de la malla $\bar{\varepsilon}$, y una dada tolerancia $\bar{\gamma}$ con respecto a las mediciones, si bien la observabilidad permitirá que para algún tiempo se distingan los elementos del espacio de búsqueda si dejamos pasar mucho tiempo (salvo que el estado real del sistema se encuentre suficientemente cerca de alguno de los centros) para un sistema como (4.1) en general se terminarán distinguiendo todos los elementos del espacio de búsqueda del estado real y perderemos todos los elementos del espacio de búsqueda, *i.e.* perderemos lo que en adelante llamaremos *la consistencia*. Es por esto, y además para alcanzar resoluciones mayores a las del $\bar{\varepsilon}$ que éste se elige inicialmente sin generar grandes compromisos computacionales como fuera mencionado en la introducción, y que iremos modificando paulatinamente el valor de resolución del mallado. Entonces a cada valor de ε de resolución en el mallado le corresponderá un tiempo máximo de uso

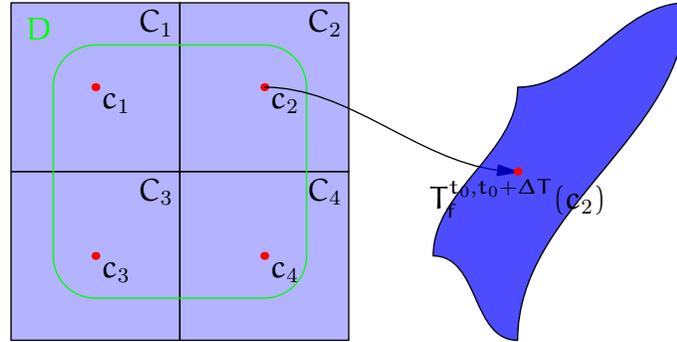


Figura 4.9: Malla.

que será cuidadosamente elegido, junto con un valor de tolerancia γ en la detección de diferencias con la salida.

Por este último motivo tomaremos subsucesiones de \mathcal{T} , digamos para $\bar{\tau} = t_{k_1} \leq \tilde{\tau} = t_{k_2}$ denotaremos

$$\mathcal{T}_{\bar{\tau}}^{\tilde{\tau}} = \{t_{k_1}, t_{k_1+1}, \dots, t_{k_2}\} \subset \mathcal{T} \quad (4.7)$$

y

$$\mathcal{Y}_{\bar{\tau}}^{\tilde{\tau}} = \{y_{k_1}, y_{k_1+1}, \dots, y_{k_2}\} \subset \mathcal{Y}. \quad (4.8)$$

a las que corresponderán resoluciones $\epsilon_{\bar{\tau}}^{\tilde{\tau}}$ y $\gamma_{\bar{\tau}}^{\tilde{\tau}}$.

En lo que sigue presentamos un algoritmo que será el bloque fundamental con el que construiremos el observador. Con este objetivo, introduzcamos primero la siguiente

Definición 43 Sea $\epsilon > 0$,

- Dado $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$, $H^\epsilon(\mathcal{C})$ es el conjunto que consiste de hipercubos de \mathbb{R}^n de radio¹² ϵ con caras paralelas a los ejes coordenados y cuyos centros son elementos de \mathcal{C} .
- $\mathcal{F}_\epsilon : \text{cmp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ se define como: para cualquier $D \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{C} = \mathcal{F}_\epsilon(D)$ es un conjunto minimal con una cantidad finita de puntos en \mathbb{R}^n tal que $D \subset \cup_{C \in H^\epsilon(\mathcal{C})} C$.¹³ Notamos que si D en sí mismo tiene una cantidad finita de puntos, entonces para ϵ suficientemente pequeño, $\mathcal{F}_\epsilon(D) = D$.
- Dado $C \in H^\epsilon(\mathcal{C})$, $c(C)$ es el centro de C .
- Dado un conjunto finito $\mathcal{C} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, definimos la *función indicatriz* $S_{\mathcal{C}} : 2^{\mathcal{C}} \rightarrow \{0, 1\}^k$ como:

$$S_{\mathcal{C}}(\bar{C})^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in A \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

para todo conjunto $A \subseteq \mathcal{C}$ ¹⁴.

Observación 44 Véase la Figura 4.9, luego:

1. ϵ la distancia entre c_i y el punto más distante del hipercubo¹⁵ C_i correspondiente ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$), i.e.: $\epsilon = \text{máx}\{|\eta - c_i|_\infty, \eta \in C_i\}$.
2. Si $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ entonces $H^\epsilon(\mathcal{C}) = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$.
3. $\mathcal{F}_\epsilon(D) = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$.
4. $c(C_i) = c_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
5. $S_{\{c_1, c_2, c_3, c_4\}}(\{c_2\}) = (0, 1, 0, 0)$.

¹²Dado un conjunto A de elementos de \mathbb{R}^n su radio es $\text{diam}(A)/2$

¹³Si D no es finito $\mathcal{F}_\epsilon(D)$ como fuera definido arriba, no necesariamente tiene porqué ser único. Es así que supondremos que elegimos uno y siempre utilizamos el mismo criterio.

¹⁴Su inversa está bien definida y puede ser construida trivialmente

¹⁵En este caso de dimensión 2.

Mediante la utilización de una definición formal de sistema (véase el Apéndice A) construimos el bloque fundamental del observador:

Definición 45 Dados $\gamma, \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $\bar{\tau}, \tilde{\tau} \in \mathcal{T}$ con $\bar{\tau} \leq \tilde{\tau}$ y $D \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$, un $\epsilon - \gamma$ -**Descartador** es un *sistema* $\mathbf{D}_{\epsilon, \gamma}^{\bar{\tau}, \tilde{\tau}}(D) = (\mathcal{T}_{\bar{\tau}}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}_{\bar{\tau}}, \phi_\gamma, \mathcal{Z})$ donde:

- D es el espacio de búsqueda.
- $\mathcal{X} = \{0, 1\}^{\#\mathcal{F}_\epsilon(D)}$ es el *espacio de estados*¹⁶, y $\xi_0 = S_{\mathcal{F}_\epsilon(D)}(\mathcal{F}_\epsilon(D)) = (1, 1, \dots, 1)$ el *estado inicial*.
- $\phi_\gamma : \mathcal{D}_{\phi_\gamma} \rightarrow \mathcal{X}$ con dominio

$$\mathcal{D}_{\phi_\gamma} \subseteq \{(\tau_1, \tau_2, \xi, \iota) : \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_{\bar{\tau}}, \tau_1 \leq \tau_2, \xi \in \mathcal{X}, \iota \in \mathcal{Y}_{\bar{\tau}}\}$$

es el *mapa de transición*, el cual se encuentra definido por la recursión

$$\phi_\gamma(t_k, t_{k-1}, \xi_{k-1}, y_k) = \xi_k$$

como sigue: sea $n_D = \#\mathcal{F}_\epsilon(D)$ y $\mathcal{F}_\epsilon(D) = \{c_1, c_2, \dots, c_{n_D}\}$. Para cada $j : 1 \leq j \leq n_D$ tal que $\xi_{k-1}^{(j)} = 1$ sea $x_j = T_f^{\bar{\tau}, t_k}(c_j)$. Luego la coordenada j -ésima de ξ_k viene dada por la regla

$$\xi_k^{(j)} := \begin{cases} \vee_\gamma(|y_k - h(x_j)|) & \text{si } \xi_{k-1}^{(j)} = 1 \\ 0 & \text{si } \xi_{k-1}^{(j)} = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\text{donde } \vee_\gamma(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > \gamma \\ 1 & \text{si } r \leq \gamma \end{cases}$$

- $\mathcal{Z} \subset 2^{\mathcal{X}}$ es la *salida* del descartador, definida como sigue: si $\bar{\tau} = t_{k_1}$, $\tilde{\tau} = t_{k_2}$ y $k^* = k_2 - k_1$ entonces $\mathcal{Z} = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k^*}\}$. En otras palabras, \mathcal{Z} representa el registro completo de la recursión¹⁷.

¹⁶No debe ser confundido con el espacio de estados del sistema observado.

¹⁷Si bien parece trivial el uso de esta salida, la misma está por razones técnicas, *i.e.* será necesaria para la construcción del observador que se compone de varios descartadores.

Veamos con un ejemplo basado en el esquema de la Figura 4.9 cómo funcionaría el *descartador*. Supongamos que: el conjunto D es como se lo ve allí, está centrado en el punto $(0, 0)$ y tiene, digamos, una longitud de 1.5 por lado; y que la condición inicial de (4.1) es $x_0 = (0, 5, -0, 5)$ en t_0 . Si $\epsilon = 1$ tendremos por ejemplo $\mathcal{F}_\epsilon(D) = \{c_1, \dots, c_4\} = \{(-1, 1), (1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}$. Asumimos que el descartador funciona sobre el espacio de tiempo $\mathcal{T}_{\bar{\tau}} = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4\}$, una sucesión finita de muestras temporales equiespaciadas en algún $\Delta T > 0$ determinado. Suponemos adicionalmente que, dada la sucesión de salidas $\mathcal{Y}_{\bar{\tau}}$ del sistema (4.1) (que a su vez representan la entrada al descartador en cuestión) y para el umbral $\gamma > 0$ que fuera elegido oportunamente, ocurrirán eventos de “descarte” en los instantes t_1, t_3, t_4 y t_5 como se puede ver en la Figura 4.10. Esto es, por ejemplo para el instante t_1 , que (como se puede ver de la Figura 4.9) $T_f^{t_0, t_1}(c_2)$ está a una distancia mayor a γ de $h^{-1}(y_1)$. En este caso tanto c_2 como todos los puntos de la celda C_2 a quienes representa serán eliminados del espacio de búsqueda. Esto es lo esperable ya que x_0 no se encuentra allí. El funcionamiento es análogo para los otros instantes de tiempo. La salida \mathcal{Z} del descartador, que representa los estados de dicho sistema para todos los instantes de $\mathcal{T}_{\bar{\tau}}$ será $\{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$. Que el último estado de este descartador esté compuesto por todos ceros y un uno significa que convergió. Convergencia que implica un error acotado por ϵ a tiempo t_0 (pues a tiempo t_4 hay que tomar la evolución de la celda C_4 y, salvo el caso particular de un (4.1) que la “contraiga”, en general el error no tiene porqué ser menor o igual a ϵ). Lo que pueda tal vez resultar menos evidente de la definición del descartador es el funcionamiento del mapa de transición. Veamos como sería para el paso $t_2 \rightarrow t_3$. En t_2 el estado del sistema descartador es $\xi_2 = (1, 0, 1, 1)$. Por lo tanto, como solamente $\xi_2^{(2)} = 0$ se deberá simular la evolución de $S_{\mathcal{F}_\epsilon(D)}^{-1}((1, 0, 0, 0)), S_{\mathcal{F}_\epsilon(D)}^{-1}((0, 0, 1, 0))$ y $S_{\mathcal{F}_\epsilon(D)}^{-1}((0, 0, 0, 1))$, que son c_1, c_3 y c_4 respectivamente. Todos con el operador $T_f^{t_0, t_3}(\cdot)$, vale decir que desde t_0 , aunque en la práctica los puntos del espacio de búsqueda que no fueron eliminados hasta t_2 (*i.e.*, $T_f^{t_0, t_2}(c_i)$ con $i = 1, 3, 4$) están almacenados en memoria por lo que no habrá que recalcular la evolución desde t_0 ya que $T_f^{t_0, t_3}(\cdot) = T_f^{t_2, t_3}(T_f^{t_0, t_2}(\cdot))$. Por último, vemos de la Figura 4.10, que los puntos que no serían eliminados del espacio de búsqueda serían c_1, c_4 . Esto último quiere decir que $|y_3 - h(T_f^{t_0, t_3}(c_i))| \leq \gamma$

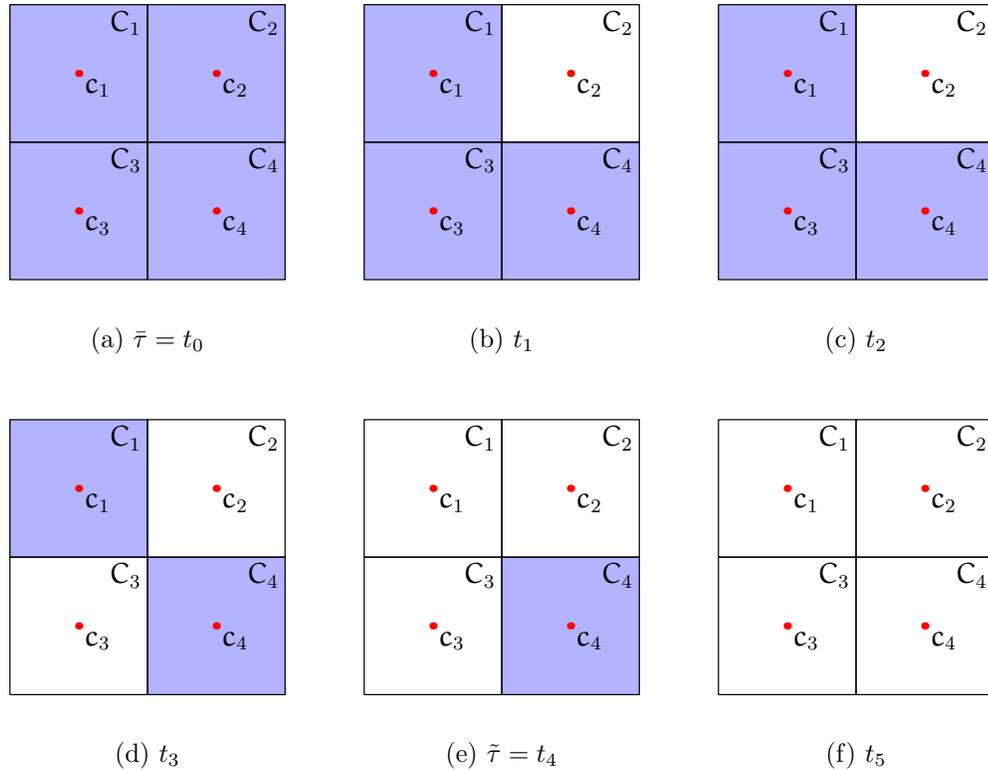


Figura 4.10: Evolución del espacio de búsqueda.

sólo para $i = 1, 4$. Finalmente se tiene que $\xi_3 = \phi(t_3, t_2, \xi_2, y_3) = (1, 0, 0, 1)$.

Por último, en la Figura 4.10 se ve que para t_5 el espacio de búsqueda está vacío. Esto ocurrirá si un mismo descartador está activo más tiempo de lo que deba. *i.e.*, como x_0 no coincide exactamente con c_4 (podría por definición estar hasta a una distancia ϵ de dicho punto), luego de que el sistema evolucione suficiente tiempo según sea la función f , h y γ en general ocurrirá en algún momento que $|y_5 - h(T_f^{t_0, t_5}(c_4))| > \gamma$ y por ende que se descartará dicho punto. Si esto ocurre ξ_5 sería $(0, 0, 0, 0)$ y perderíamos la consistencia. Esto no puede ocurrir, es por ello que $\tilde{\tau}$ se eligió para que valga t_4 . Para que el observador funcione correctamente tendremos que ir conmutando de descartadores a medida que vamos avanzando en el tiempo y disminuyendo tanto ϵ como γ obteniendo una estimación cada vez mejor del estado real del sistema (4.1) sin perder la consistencia. Cuánto tiempo podrá estar activo cada descartador será objeto de estudio en 4.3.

Observación 46 Resulta útil hacer notar que siempre que la condición $|y_k - h(T_f^{\bar{\tau}, t_k}(x))| > \gamma$ se cumpla, el algoritmo descarta a x . En este sentido, el procedimiento del *descartador* es equivalente a tomar intersecciones (véase e.g. Fig. 4.8) y descartar el conjunto $\{x \in D : T_f^{\bar{\tau}, t_k}(x) \notin h^{-1}([\{y_k\}]_\gamma)\}$, pero en este caso no es necesario computar explícitamente a h^{-1} .

El Problema de Descarte de Estados

Para poder “acercarnos” al estado real del sistema (4.1) es necesario ir descartando estados del espacio de búsqueda. Luego consideraremos las condiciones para el descarte de estados se cumpla, *i.e.*, asegurar que la sucesión $\{a_k = \sum_i \xi_k^{(i)}, k \in \mathbb{N}\}$ sea decreciente y que tiene una subsucesión que es *estrictamente* decreciente para un dado $\epsilon - \gamma$ -descartador.

El *problema de descarte de estados* surge debido al hecho de que, en la práctica, sólo disponemos de un conjunto de muestras de la salida, con tiempos de muestreo dados por \mathcal{T} y a que podemos determinar la diferencia entre dos valores de salida con una resolución finita. La Figura 4.11 ilustra esta situación.

Podemos establecer *el problema de descarte de estados* como sigue: dados $T_f^{t_0, t^*}(x_1)$ y $T_f^{t_0, t^*}(x_2)$ tal que $|h(T_f^{t_0, t^*}(x_1)) - h(T_f^{t_0, t^*}(x_2))| > 2\gamma$, encuéntrase el menor valor de T_c tal que $|\Delta y| = |h(T_f^{t_0, t^* + T_c}(x_1)) - h(T_f^{t_0, t^* + T_c}(x_2))| \leq \gamma$ o, en otras palabras, determine la menor diferencia entre tiempos de muestreo tal que el descarte sea posible en el caso de que ocurra la condición de discriminación *entre* ellos.

Con dicho propósito, introducimos la noción de *espacio ambiente*:

Definición 47 Sea D el espacio de búsqueda inicial. Un *espacio ambiente* es algún conjunto compacto $E \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ que contiene todas las posibles trayectorias de estados generadas por el sistema (4.1) partiendo de cualquier estado inicial $x_0 \in D$ durante un intervalo de tiempo lo suficientemente grande.

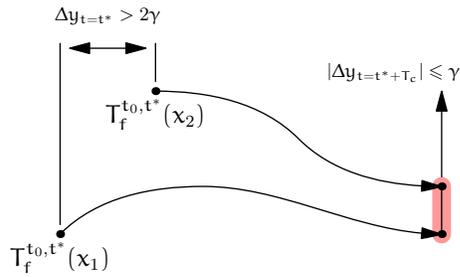


Figura 4.11: Descarte de estados.

Observación 48

1. Notemos que $D \subset E$.
2. Aunque el largo del intervalo de tiempo en general debe ser estimado de la posible evolución del sistema, en algunos casos podemos determinarlo cuantitativamente:

Por ejemplo, sean γ y ϵ números positivos y supongamos que el sistema (4.1) es γ -observable. Para cualquier $D \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ consideremos $t^\# = t^\#(D, \gamma, \epsilon)$ como en 3) de la Observación 42. Luego un espacio ambiente es cualquier conjunto compacto $E \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\cup_{t \in [t_0, t^\#]} T_{f_\sigma}^{t_0, t}(D) \subset E$. Debemos hacer notar que $\cup_{t \in [t_0, t^\#]} T_{f_\sigma}^{t_0, t}(D)$ es un conjunto compacto y que E contiene todas las posibles trayectorias de estados generadas por (4.1) a partir de cualquier estado inicial $x_0 \in D$ durante el intervalo de tiempo $[t_0, t^\#]$.

Se verifica el siguiente resultado:

Lema 49 Sean γ, ϵ números positivos y supongamos que el sistema (4.1) es γ -observable con espacio de búsqueda $D \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$. Adicionalmente, sea el espacio ambiente E , y consideremos el $\epsilon - \gamma$ -descartador $\mathbf{D}_{\epsilon, \gamma}^{\bar{\tau}, \infty}(D) = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \phi_\gamma, \mathcal{Z})$ donde $\mathcal{T} = \{t_k = t_0 + k\Delta T, k \in \mathbb{N}_0\}$. Si $\Delta T > 0$ cumple con:

$$\Delta T < \frac{\gamma}{2L_h^E \|f\|_E}$$

entonces la condición de descarte se verifica.

Demostración: Sea $x(t) \subset E$ una trayectoria del sistema (4.1) correspondiente a $x(t_0) = x_0 \in D$. Sea $\tau \in [t_0, \infty)$ arbitrario y $k \in \mathbb{N}$ tal que $t_{k-1} \leq \tau < t_k$, adicionalmente sea $\bar{x} = x(\tau)$. Se sigue que $t_k \leq \tau + \Delta T$ y

$$\begin{aligned} |\bar{x} - T_f^{\tau, t_k}(\bar{x})| &= \left| \int_{\tau}^{t_k} f(x(s, \tau, \bar{x})) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{\tau}^{\tau + \Delta T} |f(x(s, \tau, \bar{x}))| ds \leq \|f\|_E \cdot \Delta T. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} |h(\bar{x}) - h(x(t_k))| &= |h(\bar{x}) - h(T_f^{\tau, t_k}(\bar{x}))| \leq L_h^E |\bar{x} - T_f^{\tau, t_k}(\bar{x})| \\ &\leq L_h^E \|f\|_E \cdot \Delta T < \gamma/2. \end{aligned}$$

Ahora consideremos x_1, x_2 en D y $t^* \in [t_{k-1}, t_k)$ para algún $k \in \mathbb{N}$, tal que si $y_j(t) = h(T_f^{t_0, t}(x_j))$, $j = 1, 2$, $|y_1(t^*) - y_2(t^*)| \geq 2\gamma$. Dado que

$$\begin{aligned} 2\gamma \leq |y_1(t^*) - y_2(t^*)| &\leq |y_1(t^*) - y_1(t_k)| \\ &+ |y_1(t_k) - y_2(t_k)| \\ &+ |y_2(t^*) - y_2(t_k)|, \end{aligned}$$

entonces $|y_1(t_k) - y_2(t_k)| > \gamma$. Por lo tanto, para una ventana de tiempo de duración ΔT podemos distinguir entre estados mediante la observación de la salida y, en consecuencia, descartar estados.

Finalmente, tomemos cualquier hipercubo $C^* \in H^\epsilon(\mathcal{F}_\epsilon(D))$ que no contenga el estado real x_0 del sistema observado en $t = t_0$, y sea $x^* = c(C^*)$. Como $|x^* - x_0| \geq \epsilon$, entonces debido a la Proposición 41 existe un $t^\#$ tal que $|h(T_f^{t_0, t^*}(x^*)) - y(t^*)| > 2\gamma$ para algún $t^* < t^\#$. Ahora consideremos un $k \in \mathbb{N}$ tal que $t_{k-1} \leq t^* < t_k$; luego, x^* será descartado en el instante t_k y en consecuencia $a_k < a_{k-1}$, siendo que $a_k = \sum_i \phi_\gamma^{(i)}(t_k, t_{k-1}, \xi_{k-1}, y_k)$. ■

El Problema de la Consistencia

El Lema 49 nos asegura que para un $\epsilon - \gamma$ -descartador fijo, el descarte de estados ocurrirá y, en consecuencia, el espacio de búsqueda será reducido arbitrariamente

para cada $\epsilon > 0$. De todas formas, existe la posibilidad de descartar el espacio de búsqueda completo ($a_k \searrow 0$). Esto último puede ocurrir debido al hecho de que en la construcción del mallado para un dado descartador, el estado inicial real x_0 y el centro \bar{c} de la celda que lo contiene en general no coinciden, y en ese caso la celda completa será descartada si transcurre un tiempo de evolución lo suficientemente prolongado.

Entonces, el *problema de la consistencia* puede ser establecido de la siguiente manera: dado el estado inicial real x_0 del sistema observado, el hipercubo que contiene a x_0 no debe ser descartado, *i.e.* dado $C^* \in H^\epsilon(\mathcal{F}_\epsilon(D))$ tal que $x_0 \in C^*$, entonces para todo $t_k \in \mathcal{T}$:

$$\langle \phi_\gamma(t_k, t_{k-1}, \xi_{k-1}, y_k), S_{\mathcal{F}_\epsilon(D)}(c(C^*)) \rangle = 1.$$

Si deseamos evitar la posibilidad de descartar el hipercubo que “representa” a x_0 , debemos determinar por cuanto tiempo un $\epsilon - \gamma$ -descartador puede estar “activo” sin que se pierda la consistencia.

Lema 50 Dados $\epsilon > 0$, $\gamma > 0$, y el correspondiente $\epsilon - \gamma$ -descartador, con $\bar{t} = t_0$, $\tilde{t} = +\infty$, y D , y E como en el Lema 49, si $\bar{t} \in \mathcal{T}$ verifica que:

$$\bar{t} - t_0 < \frac{1}{L_f^E} \log \left(\frac{\gamma}{\epsilon L_h^E} \right)$$

entonces si $\bar{t} = t_k$,

$$\langle \phi_\gamma(\bar{t}, t_{k-1}, \xi_{k-1}, y_k), S_{\mathcal{F}_\epsilon(D)}(c(C^*)) \rangle = 1$$

donde el estado real del sistema observado pertenece a $C^* \in H^\epsilon(\mathcal{F}_\epsilon(D))$.

Demostración: Sea $c^* = c(C^*)$, el centro de C^* . Entonces, para todo $x \in C^*$,

$$|T_f^{t_0, \bar{t}}(c^*) - T_f^{t_0, \bar{t}}(x)| \leq \epsilon \cdot e^{L_f^E(\bar{t}-t_0)} \quad (4.10)$$

y C^* no será descartado del espacio de búsqueda (como fuera definido por ϕ_γ) siempre y cuando

$$|h(T_f^{t_0, \bar{t}}(c^*)) - h(T_f^{t_0, \bar{t}}(x))| \leq \gamma.$$

De la condición de Lipschitz de h y (4.10) deducimos que:

$$\begin{aligned} |h(T_f^{t_0, \bar{t}}(c^*)) - h(T_f^{t_0, \bar{t}}(x))| &\leq L_h^E |T_f^{t_0, \bar{t}}(c^*) - T_f^{t_0, \bar{t}}(x)| \\ &= L_h^E |T_f^{t_0, \bar{t}}(c^*) - T_f^{t_0, \bar{t}}(x)| \leq L_h^E \cdot \epsilon \cdot e^{L_f^E(\bar{t}-t_0)} < \gamma. \end{aligned}$$

En consecuencia, siempre y cuando $t \leq \bar{t}$, C^* no será descartado por el $\epsilon - \gamma$ -descartador, y se cumplirá con la consistencia. ■

El Diseño del Observador

El Lema 50 establece que para que se cumpla con la consistencia, existe una cota de $\frac{1}{L_f^E} \log\left(\frac{\gamma}{\epsilon L_h^E}\right)$ sobre el tiempo que un dado $\epsilon - \gamma$ -descartador puede ser usado. Es por ello que surgen dos inconvenientes, a saber: a) las celdas en la malla que son vecinas de la que contiene al estado real pueden no ser descartadas, y b) ϵ puede no ser suficientemente pequeño.

Podríamos argumentar que si tomamos ϵ lo suficientemente pequeño uno podría superar este inconveniente. El costo de esta elección es un aumento en la carga computacional.

El observador que proponemos consiste de una *concatenación de descartadores* cuyo objeto es el de obtener una incertidumbre final pequeña en la determinación del estado real del sistema. Nos encontramos ahora en posición de presentar al observador:

Definición 51 Dados un espacio de búsqueda inicial D , la sucesión estrictamente creciente $\Upsilon = \{\tau_i = t_{k_i}, i \in \mathbb{N}_0, k_0 = 0\} \subset \mathcal{T}$ y las sucesiones decrecientes de números positivos $\Sigma = \{\epsilon_i, i \in \mathbb{N}_0\}$, $\Gamma = \{\gamma_i, i \in \mathbb{N}_0\}$, el **Observador** es una función¹⁸

$$\mathbf{O}(\cdot, \mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma, \mathcal{Y}) : \text{cmp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [\text{cmp}(\mathbb{R}^n)]^{\mathbb{N}}$$

¹⁸Que actúa sobre D .

dada por una concatenación arbitraria de $\epsilon_i - \gamma_i$ -descartadores:

$$\mathbf{O}(\cdot, \mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma, \mathcal{Y}) := \mathbf{D}_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\tau_0, \tau_1} \triangleright \mathbf{D}_{\epsilon_1, \gamma_1}^{\tau_1, \tau_2} \triangleright \dots \triangleright \mathbf{D}_{\epsilon_i, \gamma_i}^{\tau_i, \tau_{i+1}} \triangleright \dots (\cdot) \quad (4.11)$$

donde la concatenación debe ser entendida como una aplicación sucesiva (en un sentido temporal) de $\epsilon - \gamma$ -descartadores y *refinamientos del mallado*. Entonces, dados dos descartadores

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\epsilon_i, \gamma_i}^{\tau_i, \tau_{i+1}}(D) &= (\mathcal{T}_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}, \mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}, \phi_{\gamma_i}, \mathcal{Z}_i) \\ \mathbf{D}_{\epsilon_{i+1}, \gamma_{i+1}}^{\tau_{i+1}, \tau_{i+2}}(D) &= (\mathcal{T}_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+2}}, \mathcal{X}_{i+1}, \mathcal{Y}_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+2}}, \phi_{\gamma_{i+1}}, \mathcal{Z}_{i+1}), \end{aligned}$$

definimos la concatenación:

$$\mathbf{O}(D, \mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma, \mathcal{Y}) = \mathbf{D}_{\epsilon_i, \gamma_i}^{\tau_i, \tau_{i+1}} \triangleright \mathbf{D}_{\epsilon_{i+1}, \gamma_{i+1}}^{\tau_{i+1}, \tau_{i+2}}(D) \quad (4.12)$$

como sigue: sean $\mathcal{Z}_i = \{\xi_0^i, \xi_1^i, \dots, \xi_{k_i^*}^i\}$ y

$$\hat{D}_{k_i^*} = S_{\mathcal{F}_{\epsilon_i}(D)}^{-1}(\xi_{k_i^*}^i)$$

el conjunto de estados correspondientes al último valor de salida del $\epsilon_i - \gamma_i$ -descartador $\mathbf{D}_{\epsilon_i, \gamma_i}^{\tau_i, \tau_{i+1}}(D)$, y sea \bar{D} el espacio de búsqueda dado por

$$\bar{D} := ((X + G_{\epsilon_{i+1}}) \cup X) \cap [h^{-1}(y(\tau_{i+1}))]_{\epsilon_{i+1}} \quad (4.13)$$

donde

$$G_{\epsilon_{i+1}} = \left\{ \frac{-\epsilon_{i+1}}{\sqrt{n}}, \frac{\epsilon_{i+1}}{\sqrt{n}} \right\}^n \text{ y } X = T_f^{\tau_i, \tau_{i+1}}(\hat{D}_{k_i^*}). \quad (4.14)$$

Si $\mathcal{Z}_{i+1} = \{\xi_0^{i+1}, \xi_1^{i+1}, \dots, \xi_{k_{i+1}^*}^{i+1}\}$ es la salida de $\mathbf{D}_{\epsilon_{i+1}, \gamma_{i+1}}^{\tau_{i+1}, \tau_{i+2}}(\bar{D})$ y si $k^* = k_i^* + k_{i+1}^* + 2$, entonces

$$\mathbf{O}(D, \mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma, \mathcal{Y}) = \{\hat{D}_0, \dots, \hat{D}_{k^*}\}, \text{ donde } \hat{D}_0 = \mathcal{F}_{\epsilon_i}(D), \hat{D}_{k_{i+1}^*} = \bar{D} \text{ y}$$

$$\hat{D}_j = \begin{cases} S_{\mathcal{F}_{\epsilon_i}(D)}^{-1}(\xi_j^i) & \text{si } 1 \leq j \leq k_i^* \\ S_{\mathcal{F}_{\epsilon_{i+1}}(\bar{D})}^{-1}(\xi_j^{i+1}) & \text{si } k_i^* + 2 \leq j \leq k_{i+1}^* \end{cases}$$

Observación 52

1. El conjunto \overline{D} dado por las ecuaciones (4.13) y (4.14) es un refinamiento de los miembros de la evolución y descarte de los puntos de D hasta τ_{i+1} , refinamiento compatible con la observación de la salida del sistema (4.1) en ese instante.
2. En la práctica, la intersección en (4.13) no es realizada como allí se establece ya que esto implicaría la evaluación de h^{-1} . Lo que en realidad hacemos es similar a aquello que realiza el descartador (véase la Observación 46).
3. Notemos que debido a la Suposición 37, el conjunto \hat{D}_j es finito para toda $j \geq 0$.
4. Para toda $j \geq 0$, \hat{D}_j es el conjunto de todos los estados que permanecen luego del proceso de descarte hasta el instante t_j . Idealmente, para un t_j suficientemente grande, \hat{D}_j debería ser un conjunto con un único elemento: el estado correspondiente al centro del hipercubo adonde se encuentra el estado real $x(t_j)$ del sistema (4.1).
5. Aunque suponemos el conocimiento de la sucesión completa \mathcal{Y} de muestras de salida del sistema (4.1), alcanza con conocer $y(t_k)$ en cada instante t_k para poner en práctica cada descartador (y el observador). De esta manera, el observador procesa la información en tiempo real y en principio $x(t_k)$ puede ser oportunamente recuperado.

4.3.1. Convergencia del Observador

En primer lugar, precisemos lo que se entiende por convergencia del observador propuesto.

Definición 53 Dado espacio de búsqueda inicial $D \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ y un observador \mathbf{O} para el cual

$$\mathbf{O}(D, \mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma, \mathcal{Y}) = \{D = D_{t_0}, D_{t_1}, \dots, D_{t_k}, \dots\}$$

donde cada D_{t_k} es un espacio de búsqueda, tenemos que:

1. Dado un $\varepsilon > 0$, el observador \mathbf{O} *converge con error de estimación final* $\varepsilon > 0$ si $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \text{diam}(D_{t_k}) \leq \varepsilon$.
2. El observador \mathbf{O} *converge* cuando el error de estimación final es $\varepsilon = 0$.

Como fuera señalado en la Observación 52.4, idealmente el observador debe evolucionar hasta que sólo quede en el espacio de búsqueda el estado correspondiente al centro del hipercubo donde el estado real del sistema (4.1) se encuentra. Por supuesto que aún en este caso, la incertidumbre en la determinación del estado real es del orden del radio de tal hipercubo. Evidentemente, podemos plantear dos requerimientos que son suficientes para la convergencia:

1. El observador debe evolucionar a un conjunto con un único elemento, siendo dicho elemento el centro del hipercubo que contiene al estado real del sistema.
2. El radio del hipercubo en cuestión debe ser arbitrariamente pequeño.

Observación 54 Las condiciones establecidas arriba son suficientes pero no necesarias. Vale decir que la convergencia según se ha establecido en la Definición 53 puede lograrse sin que el observador necesariamente evolucione a un espacio de búsqueda con un solo elemento. De todas maneras, partimos de estas condiciones para tener mayor precisión en la búsqueda de condiciones que aseguren la convergencia del observador.

A continuación presentaremos un resultado que establece condiciones bajo las cuales estos requerimientos serán (parcialmente) cumplimentados. Pero introduzcamos primero la siguiente

Definición 55 Dados los números positivos γ, ϵ y $K \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n) \times \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$, consideremos $\Lambda(\epsilon, K) := \{(x_1, x_2) \in K : |x_1 - x_2| \geq \epsilon\}$. Entonces el sistema (4.1) se dice γ -*observable sobre* $\Lambda(\epsilon, K)$ si para todo $(x_1, x_2) \in \Lambda(\epsilon, K)$, existe $t^* \geq t_0$ tal que $|h(T_f^{t_0, t^*}(x_1)) - h(T_f^{t_0, t^*}(x_2))| > 2\gamma$.

Observación 56

1. Notamos que si el sistema (4.1) es γ -observable entonces, de la Proposición 41, se sigue que es γ -observable sobre $\Lambda(\epsilon, K)$ para todo $\epsilon > 0$ y todo $K \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n) \times \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$. También notamos que si para un cierto $\epsilon > 0$ y un cierto $K \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n) \times \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$, el sistema (4.1) es γ_1 -observable sobre $\Lambda(\epsilon, K)$, también es γ_2 -observable sobre $\Lambda(\epsilon, K)$ siempre que $\gamma_2 < \gamma_1$.
2. Cualquier sistema lineal observable es γ -observable sobre los conjuntos $\Lambda(\gamma/\kappa, E \times E)$ para algún $\kappa > 0$ y cualquier $E \in \text{cmp}(R^n)$ tal que $x_0 \in E$. Sea $\omega(t) := Ce^{A(t-t_0)}$, como (C, A) es un par observable, sea cual fuere $\tau > t_0$, $W(\tau, t_0) = \int_{t_0}^{\tau} \|\omega(t)\|^2 dt$ es definida positiva. Luego se sigue que existe $t_0 < t < \tau$ tal que $|y(t, t_0, \bar{x}, u(t)) - y(t, t_0, x_0, u(t))|^2 \geq \sigma(\tau, t_0)|\bar{x} - x_0|^2 / (2(\tau - t_0))$, con $\sigma(\tau, t_0)$ el menor valor singular de $W(\tau, t_0)$. Por lo tanto, concluimos que si $\kappa \leq \sqrt{\sigma(\tau, t_0) / (8(\tau - t_0))}$ el sistema es γ -observable sobre los conjuntos $\Lambda(\gamma/\kappa, E \times E)$.

El siguiente resultado será utilizado en lo que sigue.

Proposición 57 Dados los números positivos γ, ϵ , y un espacio de búsqueda D que verifica la Suposición 37, asumamos que el sistema (4.1) es γ -observable sobre $\Lambda(\epsilon, D \times D)$. Luego para cualquier par $(x_1, x_2) \in \Lambda(\epsilon, D \times D)$, existe $t_*(t_0, x_1, x_2, \gamma) = \min \{t > t_0 : |h(T_f^{t_0, t}(x_1)) - h(T_f^{t_0, t}(x_2))| \geq \gamma\}$. Si además consideramos el conjunto $\mathcal{A} = \{t_*(t_0, x_1, x_2, \gamma) : (x_1, x_2) \in \Lambda(\epsilon, D \times D)\}$ y si $t^*(t_0, \gamma, \epsilon, D \times D) := \sup \mathcal{A}$, entonces $t_0 < t^*(t_0, \gamma, \epsilon, D \times D) < \infty$.

Demostración: Sea $(x_1, x_2) \in \Lambda(\epsilon, D \times D)$. Entonces, debido a la γ -observabilidad del sistema (4.1) sobre $\Lambda(\epsilon, D \times D)$ y al hecho de que D verifica la Suposición 37, el conjunto

$$\{t > t_0 : |h(T_f^{t_0, t}(x_1)) - h(T_f^{t_0, t}(x_2))| \geq \gamma\}$$

no es el conjunto vacío y tiene una cota inferior (t_0). De la continuidad de $|h(T_f^{t_0,t}(x_1)) - h(T_f^{t_0,t}(x_2))|$ con respecto a t se sigue inmediatamente que este conjunto es cerrado en \mathbb{R} y, en consecuencia, alcanza un mínimo al que denotamos $t_*(t_0, x_1, x_2, \gamma)$.

Por otro lado, ya que $D \times D$ es un conjunto compacto, y como consecuencia de la continuidad de $t_*(t_0, x_1, x_2, \gamma)$ con respecto a (x_1, x_2) , se sigue inmediatamente que de hecho $t^*(t_0, \gamma, \epsilon, D \times D) = \max \mathcal{A}$ y que las desigualdades $t_0 < t^*(t_0, \gamma, \epsilon, D \times D) < \infty$ se verifican. ■

Observación 58 Dados los números positivos γ, ϵ , si el sistema (4.1) es γ -observable sobre $\Lambda(\epsilon, D_1 \times D_1)$, también es γ -observable sobre $\Lambda(\epsilon, D_2 \times D_2)$ para cualesquiera $D_1, D_2 \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ tales que $D_2 \subset D_1$ y, adicionalmente, $t^*(t_0, \gamma, \epsilon, D_2 \times D_2) \leq t^*(t_0, \gamma, \epsilon, D_1 \times D_1)$.

Ahora nos encontramos en posición de presentar el resultado principal del capítulo.

Teorema 59 Consideremos al sistema (4.1). Sea un conjunto D el espacio de búsqueda inicial que verifica la Suposición 37, y sean $x_0 \in D$ y t_0 los estado y tiempo iniciales, respectivamente. Consideremos además al conjunto $E \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ que contiene a D ($D \subset E$), un espacio ambiente lo suficientemente grande donde el sistema pueda evolucionar. Sean $\kappa \in (L_h^E, 2L_h^E)$, y

$$\gamma_0 = \frac{2L_h^E \|f\|_E}{L_f^E} \ln \left(\frac{\kappa}{L_h^E} \right),$$

Supongamos que el sistema (4.1) es γ_0 -observable y que existe un número positivo $\gamma_* < \gamma_0/4$ tal que $t^*(\nu, \gamma_*, \frac{3\gamma_*}{8\kappa}, E^*) < t^*(\nu, \gamma_*, \frac{\gamma_*}{4\kappa}, E^*)$ para todo $\nu \in [t_0, t^*(t_0, \gamma_*, \frac{\gamma_*}{4\kappa}, E^*)]$, donde $E^* = \{(x_1, x_2) \in E \times E : |h(x_1) - h(x_2)| \leq \gamma_*/2\}$.

Entonces, existen dos sucesiones estrictamente crecientes $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_k, \dots\}$ y $\Upsilon = \{\tau_i = t_{k_i}, i \in \mathbb{N}_0, k_0 = 0\} \subset \mathcal{T}$ y dos sucesiones decrecientes de números positivos $\Sigma = \{\epsilon_i, i \in \mathbb{N}_0\}$ y $\Gamma = \{\gamma_i, i \in \mathbb{N}_0\}$ con $\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i = \epsilon_*$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = \gamma_*$ tales que para $\mathcal{Y} = \{y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_k), \dots\} \subset \mathbb{R}^p$, la sucesión de muestras de salida del sistema (4.1) correspondientes al estado inicial $x(t_0) = x_0$, el observador

$$\mathbf{O}(D, \mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma, \mathcal{Y}) = \mathbf{D}_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\tau_0, \tau_1} \triangleright \mathbf{D}_{\epsilon_1, \gamma_1}^{\tau_1, \tau_2} \triangleright \dots \triangleright \mathbf{D}_{\epsilon_i, \gamma_i}^{\tau_i, \tau_{i+1}} \triangleright \dots (D)$$

converge con error de estimación final $6\epsilon_*$.

Demostración: Para $\alpha \in (0, 1)$ considérese

$$\Delta\tau = \frac{1}{L_f^E} \ln \left(\frac{\kappa}{L_h^E} \right)^\alpha \quad \text{y} \quad K = \left\lfloor \frac{2L_h^E \|f\|_E}{\gamma_* L_f^E} \ln \left(\frac{\kappa}{L_h^E} \right) \right\rfloor, \quad (4.15)$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la parte entera. Definimos Γ mediante la recurrencia

$$\gamma_{i+1} = \text{máx} \left\{ \frac{\gamma_i}{2} e^{L_f^E \Delta\tau}, \gamma_* \right\}, \quad i \geq 0,$$

y notamos que debido a los valores tomados para κ y α , $L_f^E \Delta\tau = \ln \left(\frac{\kappa}{L_h^E} \right)^\alpha < \alpha \ln(2)$ y, en consecuencia, existe un número mínimo $i^* \geq \left\lfloor \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_*} \right) \right\rfloor + 1$, tal que $\gamma_i = \gamma_*$ para todo $i \geq i^*$. De ahí $\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{i^*}\}$. Ahora, definimos $\Sigma = \{\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{i^*}\}$ como sigue

$$\epsilon_i = \begin{cases} \frac{\gamma_{i+1}}{\kappa} & \text{si } 0 \leq i < i^* - 1 \\ \frac{\gamma_{i^*}}{2\kappa} & \text{si } i = i^* - 1 \\ \frac{\gamma_*}{4\kappa} & \text{si } i = i^* \end{cases} \quad (4.16)$$

Seguidamente, y con el propósito de definir $\Upsilon = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{i^*}\}$, sea $\tau_0 = t_0$ y para cada $i \in \{0, 1, \dots, i^* - 1\}$, $\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta\tau_i$. Luego tomamos

$$\Delta\tau_i = \begin{cases} \Delta\tau & \text{si } 0 \leq i < i^* \\ +\infty & \text{si } i = i^*. \end{cases} \quad (4.17)$$

Finalmente, con el propósito de definir \mathcal{T} , sea

$$\mu = \frac{1}{2} \left(t^*(\tau_{i^*}, \gamma_*, \frac{\gamma_*}{4\kappa}, E^*) - t^*(\tau_{i^*}, \gamma_*, \frac{3\gamma_*}{8\kappa}, E^*) \right),$$

que, de acuerdo a las Observaciones 56.1 y 58, es un número positivo. Consideremos $\Delta T = \Delta\tau/K$, con $\Delta\tau$ y K dados por (4.15). Entonces si $\tau_{i^*} = t_0 + k_* \Delta T$, definimos $\Delta T_i = t_{i+1} - t_i$ como

$$\Delta T_i = \begin{cases} \Delta T & \text{si } 0 \leq i < k_* \\ \text{mín}\{\mu, \Delta T\} & \text{si } i \geq k_*. \end{cases} \quad (4.18)$$

Ahora, con el objeto de demostrar la convergencia del observador, dos puntos deben ser considerados: el descarte y la consistencia, *i.e.* si

$$\mathbf{O}(D, \mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma, \mathcal{Y}) = \{\hat{D}_0, \hat{D}_1, \dots, \hat{D}_{r^*}\},$$

y \hat{D}_{r^*} es la salida del observador en ese instante, digamos, t^* , entonces \hat{D}_{r^*} es (idealmente) un conjunto de un solo elemento (descarte) y si $x(t^*)$ es el estado real del sistema (4.1), $x(t^*) \in H^{\epsilon^*}(\hat{D}_{r^*})$ (consistencia).

Descarte. Ya que ΔT verifica la hipótesis del Lema 49, entonces para cada $\epsilon - \gamma$ -descartador de la concatenación, el descarte está garantizado siempre y cuando se cumpla con la consistencia.

Consistencia. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{F}_{\epsilon_0}(D)$, luego, como $x_0 \in D$, se sigue que existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $x_0 \in H^{\epsilon_0}(\{c\})$. De la definición de $\Delta\tau$, obtenemos

$$0 < \Delta\tau_0 = \Delta\tau < \frac{1}{L_f^E} \log\left(\frac{\kappa}{L_h^E}\right) = \frac{1}{L_f^E} \log\left(\frac{\gamma_0}{\epsilon_0 L_h^E}\right),$$

y, de acuerdo con el Lema 50, c no será descartado por $\mathbf{D}_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\tau_0, \tau_1}(D)$.

Ahora consideremos la conmutación de $\mathbf{D}_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\tau_0, \tau_1}(D)$ a $\mathbf{D}_{\epsilon_1, \gamma_1}^{\tau_1, \tau_2}(D_1)$ donde, de acuerdo a (4.13),

$$D_1 := ((X + G_{\epsilon_1}) \cup X) \cap [h^{-1}(y(\tau_1))]_{\epsilon_1}.$$

y, como en (4.14),

$$X = T_f^{\tau_0, \tau_1}(\hat{D}_{k_0^*}).$$

Sean $\eta_0 = \epsilon_0 e^{L_f^E \Delta\tau_0}$, $\tilde{c} = T_f^{\tau_0, \tau_1}(c)$ y $\bar{x} = T_f^{\tau_0, \tau_1}(x_0)$. Entonces

- Como $\epsilon_1 = \eta_0/2$, $H^{\eta_0}(\{\tilde{c}\}) \subset \bigcup_{r \in H^{\epsilon_1}(\tilde{c} + G_{\epsilon_1})} r$.
- $\bar{x} \in H^{\eta_0}(\{\tilde{c}\})$ y por lo tanto existe $\tilde{c} \in \tilde{c} + G_{\epsilon_1}$ tal que $\bar{x} \in H^{\epsilon_1}(\{\tilde{c}\})$.
- $\bar{x} \in h^{-1}(y(\tau_1))$ y entonces $\text{dist}(\tilde{c}, h^{-1}(y(\tau_1))) \leq |\tilde{c} - \bar{x}| \leq \epsilon_1$.

Entonces $\tilde{c} \in D_1$ y este estado, que representa la celda en \mathbb{R}^n donde el estado real del sistema \bar{x} cae en el instante τ_1 , no es descartado en el proceso de obtención de

D_1 . Utilizando el mismo argumento, y por la definición de Υ, Σ y Γ , la consistencia se cumplirá hasta τ_{i^*} y hasta la construcción de D_{i^*} .

Desde τ_{i^*} en adelante, el Lema 50 ya no asegura la consistencia ya que $\Delta\tau_{i^*} = +\infty$. En consecuencia, solamente permanece el descarte porque los valores de ΔT_i como fueran dados por (4.18) verifican las condiciones del Lema 49.

Supongamos que $x(\tau_{i^*})$ es el estado real del sistema (4.1) en el instante τ_{i^*} y que c^* es tal que $x(\tau_{i^*}) \in H^{\epsilon_{i^*}}(\{c^*\})$. Para un dado $j \geq i^*$ sea, $t_{k_j}, t_{k_{j+1}} = t_{k_j} + \Delta T$ en \mathcal{T} tal que $t_{k_j} < t^*(\gamma_*, \frac{\gamma_*}{4\kappa}, E \times E) \leq t_{k_{j+1}}$. Entonces, debido a la elección de μ , para todo c con $|c - c^*| > \frac{3\gamma_*}{8\kappa}$, $T_f^{\tau_{i^*}, t}(c)$ será descartado a lo sumo en el instante t_{k_j} . En consecuencia, si \hat{D}_{k_j} es la salida del observador en el instante t_{k_j} , entonces si $\eta = \frac{3}{2}\epsilon_{i^*}$, $\hat{D}_{k_j} \subset T_f^{\tau_{i^*}, t_{k_j}}(H^\eta(\{c^*\}))$. Ahora tomemos cualquier $\tilde{c} \in D_{i^*}$ tal que $T_f^{\tau_{i^*}, t_{k_j}}(\tilde{c}) \in \hat{D}_{k_j}$. Luego, si \mathcal{M} es la cápsula convexa de $H^{2\eta}(\{\tilde{c}\})$, $x(\tau_{i^*}) \in \mathcal{M}$. ■

4.4. Extensión a Sistemas con Controles

En esta sección nos proponemos extender los resultados vistos en la sección anterior a sistemas con controles a lazo abierto (Véase [25]), es decir a sistemas de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.19)$$

donde $u : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una *entrada* localmente acotada y medible Lebesgue perteneciente a la clase de funciones que denotaremos \mathcal{U} y, a diferencia de (4.1), $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ que es localmente Lipschitz continua en el primer argumento uniformemente sobre el segundo. Dado un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ denotamos $x(t, t_0, x_0, u(t))$ a la (única) solución de $\dot{x} = f(x, u)$ cuya condición inicial es $x(t_0, t_0, x_0, u(t_0)) = x_0$. Por simplicidad, definimos $f_u(x) := f(x, u)$. Al igual que en la sección anterior denotamos de manera análoga $T_{f_u}^{t_0, t}(x_0) = x(t, t_0, x_0, u(t))$ y, cuando queda claro del contexto, $x(t) = x(t, t_0, x_0, u(t))$ e $y(t) = h(x(t))$.

Debemos repostular las nociones de observabilidad que utilizaremos en consideración de la dependencia de la evolución del sistema con respecto a los controles $u \in \mathcal{U}$, *i.e.* aunque la salida del sistema no dependa directamente de los controles existe la

posibilidad de que los valores de dicha variable afecten la observabilidad (en tanto que posibilidad de distinguir entre estados iniciales) del sistema. Si por ejemplo el sistema a observar fuese:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + g(u)x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4.20)$$

entonces todo valor $u_s \in \mathbb{R}^m$ tal que $g(u_s) = 0$ hace que el sistema (4.20) no sea observable. En particular que para cada $x_1 \in \mathbb{R}^n$ fijo, $\{(x_1, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}^n\}$ sea un conjunto de estados indistinguibles entre sí. A las entradas $\{u \in \mathcal{U} : u(t) = u_s, t \in [t_0, +\infty)\}$ se las conoce como *entradas singulares*. En general no tienen porqué ser funciones constantes, aunque para este sistema en particular (por ser tiempo invariante) $\partial g/\partial t = 0$ haciendo que esto sea así.

También la observabilidad puede depender de manera más cuantitativa con respecto a los valores de las entradas. Por ejemplo, para un sistema lineal como (4.20) el Gramiano de observabilidad puede estar mejor o peor condicionado según los valores de u haciendo que la observabilidad no sea uniforme con respecto a dichos valores (considérese por ejemplo el caso en que $u \rightarrow u_s$). Aunque no prestaremos especial atención a esto último es una razón más que justifica la importancia de las entradas con respecto a la observabilidad del sistema. Luego, es necesario considerar una definición de observabilidad más completa (véase [23]). De hecho, solamente tenemos que redefinir el concepto de *indistinguibilidad*:

Definición 60 Un par de estados $(x_0, x'_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ se dice *indistinguible* para el sistema (4.19) si para todo $u \in \mathcal{U}$, $h(T_{f_u}^{t_0, t}(x_0)) = h(T_{f_u}^{t_0, t}(x'_0)) \forall t \geq t_0$.

Luego la Definición 26 sirve para los casos con controles a lazo abierto sin modificaciones. Para el caso de la γ -observabilidad (Def. 39) también bastará con modificar la respectiva γ -indistinguibilidad. Sin embargo, haremos una modificación

Definición 61 Dados $\gamma > 0$ y $u \in \mathcal{U}$,

Un par de estados $(x_0, x'_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ se dice γ -indistinguible (con respecto a u) para el sistema (4.19) si $h(T_{f_u}^{t_0, t}(x_0)) = h(T_{f_u}^{t_0, t}(x'_0)) \forall t \geq t_0$.

A partir de esta definición se define en forma análoga la γ -observabilidad (con respecto a u). Como se puede ver, la Definición 61 (a diferencia de la Def. 60) resulta menos restrictiva en cuanto a que no se pide que se cumpla para todo $u \in \mathcal{U}$, basta con que se cumpla para una entrada en particular. Es decir, admitimos la existencia de entradas singulares aunque como el sistema a observar será observable con respecto a una entrada en particular, la entrada u aplicada será una *entrada universal* (i.e., una entrada no singular).

Observación 62

- Como puede notarse, la noción de *entradas universales* (aquellas que no producen estados indistinguibles) subyace a aquella de la observabilidad en el sentido de la Definición 26 pues si la observabilidad se cumple no pueden existir entradas singulares. Por el contrario, para la Definición 61 esto no es así.
- Para una función de entrada $u \in \mathcal{U}$ dada, también vale una versión análoga de la Observación 40 para sistemas con controles a lazo abierto.
- En lo que sigue asumiremos que al sistema (4.19) se le aplica una entrada $u \in \mathcal{U}$ fija, aunque de todas formas arbitraria.

Para un conjunto $E \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$, considerando que tenemos un control fijo $u \in \mathcal{U}$ podemos expresar $\|f_u\|_E$ como:

$$\|f_u\|_E = \sup\{f(x, u(t)) : x \in E, t \in [t_0, +\infty)\} \quad (4.21)$$

o bien, en el caso de que las funciones de entrada $u \in \mathcal{U}$ sean $u : [t_0, +\infty) \rightarrow U$ donde $U \in \text{cmp}(\mathbb{R}^m)$:

$$\|f_u\|_E = \text{máx}\{f(x, u) : x \in E, u \in U\} \quad (4.22)$$

El caso (4.21) sirve para un control $u \in \mathcal{U}$ fijo como supondremos (si $\|f_u\|_E < \infty$), pero de todas formas si contamos con una definición como la del caso (4.22) también podemos extender los resultados de los Lemas 49 y 50 y el Teorema 59 para familias de entradas no necesariamente determinadas a priori. Luego, dichos Lemas y Teorema quedan expresados como sigue:

Lema 63 Sean γ, ϵ números positivos y sea que el sistema (4.19) es γ -observable (con respecto a un $u \in \mathcal{U}$ dado) con espacio de búsqueda $D \subset E$ con $E \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ el espacio ambiente para las trayectorias del sistema sobre el intervalo de tiempo de interés¹⁹. Consideremos el $\epsilon - \gamma$ -descartador $\mathbf{D}_{\epsilon, \gamma}^{\bar{t}, \infty}(D) = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \phi_\gamma, \mathcal{Z})$ donde $\mathcal{T} = \{t_k = t_0 + k\Delta T, k \in \mathbb{N}_0\}$. Si $\Delta T > 0$ cumple con:

$$\Delta T < \frac{\gamma}{2L_h^E \|f_u\|_E}$$

entonces la condición de descarte se verifica.

Ya que el Lema 50 depende de la constante de Lipschitz de f , para el caso no autónomo debemos reformular dicha constante considerando que no solo depende de los estados sino también de la entrada u . Luego, dado un $u \in \mathcal{U}$ fijo, $\|f_u\|_E := \sup_{x \in E} \{f(x, u(t)) : t \in [t_0, +\infty)\} < \infty$ Entonces estamos en condiciones de establecer el siguiente

Lema 64 Dados $\epsilon > 0$, $\gamma > 0$, y el correspondiente $\epsilon - \gamma$ -descartador, con $\bar{t} = t_0$, $\tilde{t} = +\infty$, y D , y E como en el Lema 49, si $\bar{t} \in \mathcal{T}$ verifica que:

$$\bar{t} - t_0 < \frac{1}{L_{f_u}^E} \log \left(\frac{\gamma}{\epsilon L_h^E} \right)$$

entonces si $\bar{t} = t_k$,

$$\langle \phi_\gamma(\bar{t}, t_{k-1}, \xi_{k-1}, y_k), S_{\mathcal{F}_\epsilon(D)}(c(C^*)) \rangle = 1$$

donde el estado real del sistema observado pertenece a $C^* \in H^\epsilon(\mathcal{F}_\epsilon(D))$.

¹⁹Debido a la γ -observabilidad (con respecto a u) se sigue de la Proposición 41 que este intervalo es finito.

Por último, reestablecemos el resultado del Teorema 59 para sistemas con controles a lazo abierto como sigue:

Teorema 65 Consideremos al sistema (4.19). Sea un conjunto D el espacio de búsqueda inicial que verifica la Suposición 37, y sean $x_0 \in D$ y t_0 los estado y tiempo iniciales, respectivamente. Consideremos además al conjunto $E \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ que contiene a D ($D \subset E$), un espacio ambiente lo suficientemente grande donde el sistema pueda evolucionar. Sea $\kappa \in (L_h^E, 2L_h^E)$, y

$$\gamma_0 = \frac{2L_h^E \|f_u\|_E}{L_{f_u}^E} \ln \left(\frac{\kappa}{L_h^E} \right),$$

Supongamos que el sistema (4.19) es γ_0 -observable (con respecto a un $u \in \mathcal{U}$ dado) y que existe un número positivo $\gamma_\star < \gamma_0/4$ tal que $t^\star(\gamma_\star, \frac{3\gamma_\star}{8\kappa}, E^\star) < t^\star(\gamma_\star, \frac{\gamma_\star}{4\kappa}, E^\star)$, donde $E^\star = \{(x_1, x_2) \in E \times E : |h(x_1) - h(x_2)| \leq \gamma_\star/2\}$. Entonces, existen dos sucesiones estrictamente crecientes $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_k, \dots\}$ y $\Upsilon = \{\tau_i = t_{k_i}, i \in \mathbb{N}_0, k_0 = 0\} \subset \mathcal{T}$ y dos sucesiones decrecientes de números positivos $\Sigma = \{\epsilon_i, i \in \mathbb{N}_0\}$ y $\Gamma = \{\gamma_i, i \in \mathbb{N}_0\}$ con $\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i = \epsilon_\star$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = \gamma_\star$ tales que para $\mathcal{Y} = \{y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_k), \dots\} \subset \mathbb{R}^p$, la sucesión de muestras de salida del sistema (4.19) correspondientes al estado inicial $x(t_0) = x_0$, el error final de estimación de estado del observador

$$\mathbf{O}(D, \mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma, \mathcal{Y}) = \mathbf{D}_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\tau_0, \tau_1} \triangleright \mathbf{D}_{\epsilon_1, \gamma_1}^{\tau_1, \tau_2} \triangleright \dots \triangleright \mathbf{D}_{\epsilon_i, \gamma_i}^{\tau_i, \tau_{i+1}} \triangleright \dots (D)$$

es menor o igual a $6\epsilon_\star$. Más aún, la convergencia (en el sentido de que sólo sobreviva al descarte la celda C que contenga al estado real x del sistema y tal que $\text{diam}(C) \leq 6\epsilon_\star$) se alcanza en tiempo finito.

Observación 66 Las demostraciones de estos resultados siguen las mismas líneas que para los Lemas 49, 50 y el Teorema 59. Por otro lado estos resultados también dependen de la Proposición 41. Esta última no pierde validez para sistemas como

(4.19) ya que para controles a lazo abierto $u \in \mathcal{U}$ como los que admite dicho sistema la función μ en la demostración de dicho resultado sigue siendo una función continua sobre $E \times [t_0, +\infty)$.

4.5. Ejemplos Numéricos

4.5.1. Sistemas Autónomos

Como primer ejemplo de este enfoque alternativo al problema de observación de estados utilizaremos el siguiente sistema Lipschitz continuo autónomo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = x_1(\rho - x_3) - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - \beta x_3 \\ y = h(x) \end{cases}$$

para

$$h(x) = \begin{cases} x_1, & \text{si } x_1 > 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.23)$$

y con $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$. Para esta configuración de valores de los parámetros el sistema exhibe comportamiento caótico ([28]). Los parámetros del observador ΔT y $\Delta \tau$ se eligen suficientemente pequeños acorde a las condiciones impuestas por el Teorema 59 y ϵ_0 es lo suficientemente grande como para reducir la carga computacional en las primeras iteraciones para las cuales el espacio de búsqueda es más grande. La dinámica del observador puede ser vista en la Figura 4.12: el observador comienza con un espacio de búsqueda “grande” (un plano $[-3, 3] \times [-3, 3]$ inmerso en $h^{-1}(y(t_0))$) que por supuesto incluye la condición inicial del sistema observado ($x_0 = [0, 6, -1, 2, 1, 2]$).

Este conjunto reduce su tamaño a medida que el tiempo avanza, de esta manera el algoritmo reduce su esfuerzo rápidamente. Como se puede ver en las Figuras 4.13-4.14, el error de estimación²⁰ se reduce rápidamente, en especial cuando los

²⁰ Para cada $t \in \mathcal{T}$ el error de estimación se define como la máxima de las distancias entre los elementos del espacio de búsqueda y la correspondiente trayectoria de la variable de estados

$\epsilon - \gamma$ -descartadores conmutan²¹ donde la resolución se incrementa y se siguen futuros descartes. Por último, notamos que el error de estimación para x_1 es inicialmente cero ya que $h^{-1}(y(t_0)) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}, x_1 = y(t_0)\}$.

4.5.2. Sistemas con Controles

Con el propósito de exhibir cómo funciona el observador para el caso con controles a lazo abierto consideramos el siguiente sistema Lipschitz continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= ux_2 \\ \dot{x}_2 &= -ux_1 \\ y &= h(x) \end{cases}$$

donde $h(x)$ está definida como en (4.23). La entrada es una función diente de sierra definida como $u(t) = t/3 - \lfloor t/3 \rfloor$. Se ve claramente que $f(x, u)$ es una función localmente Lipschitz continua uniformemente sobre los valores de las entradas u con constante de Lipschitz $L_{fu}^E = \sup_{t \in [t_0, \infty)} \{|u(t)|\}$ ($L_{fu}^E = 1$ en este caso). Por otro lado h tiene constante de Lipschitz igual a 1.

Los parámetros ΔT y $\Delta \tau$ del observador se eligen lo suficientemente pequeños de acuerdo a las condiciones impuestas por el Teorema 65 y ϵ_0 es lo suficientemente grande como para reducir la carga computacional de las primeras iteraciones del algoritmo observador mientras el espacio de búsqueda es grande.

La evolución de la dinámica del observador se puede ver en las Figuras 4.15-4.16: el observador comienza con un espacio de búsqueda suficientemente grande (un segmento $[-2, 2]$ contenido en $h^{-1}(y(t_0))$) que incluya la condición inicial del sistema observado ($x_0 = [0, 1]$). Este conjunto reduce su tamaño al transcurrir el tiempo, reduciendo rápidamente el esfuerzo computacional del algoritmo. Como puede ser observado en la Figura 4.17, el error de estimación se reduce rápidamente, en particular cuando los $\epsilon - \gamma$ -descartadores conmutan y se incrementa la resolución del mallado y se continúa de futuros descartes. Por último, notamos que el error de estimación para x_1 es inicialmente cero ya que $h^{-1}(y(t_0)) = \{(x_1, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}, x_1 = y(t_0)\}$.

(coordenada a coordenada).

²¹Las primeras tres conmutaciones se indican con zonas grises alternadas.

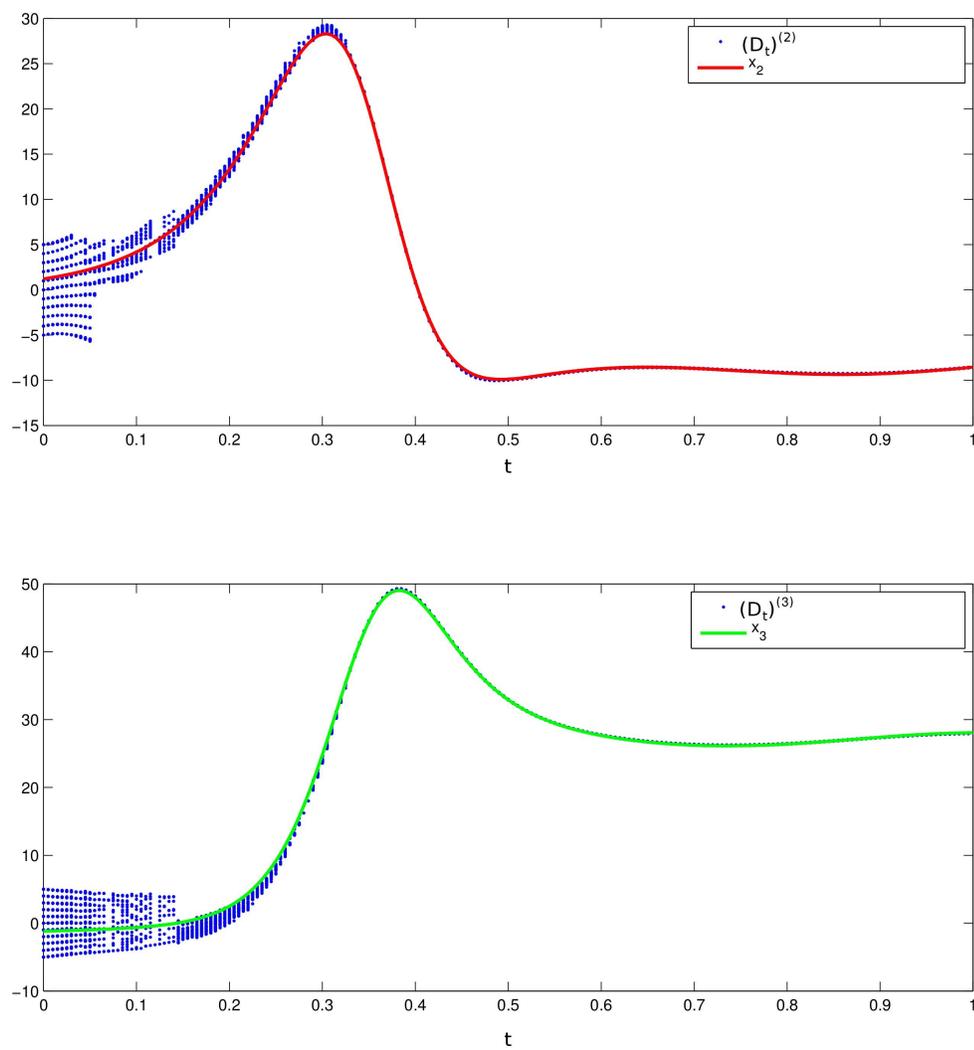


Figura 4.12: Espacio de búsqueda vs. x_2 (arriba) y x_3 (abajo) vs. tiempo.

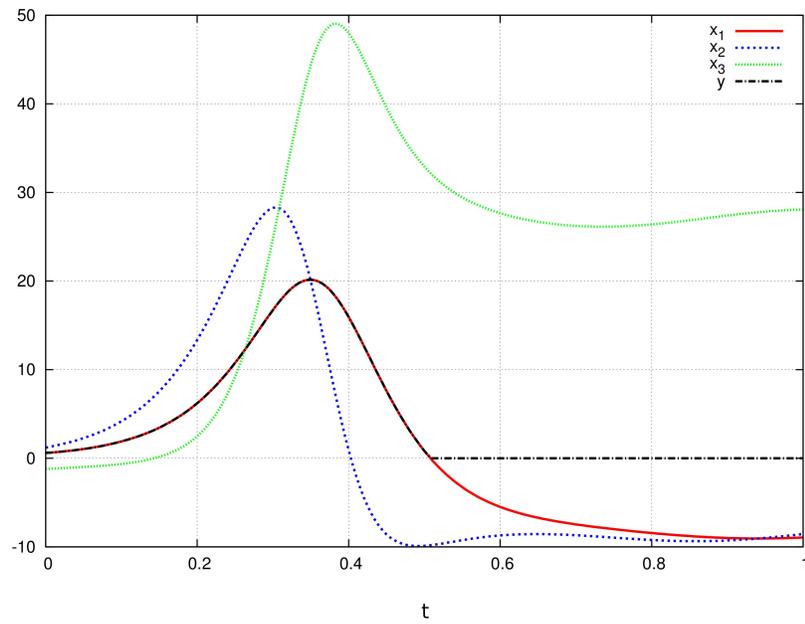


Figura 4.13: Estados del sistema y salida vs. tiempo.

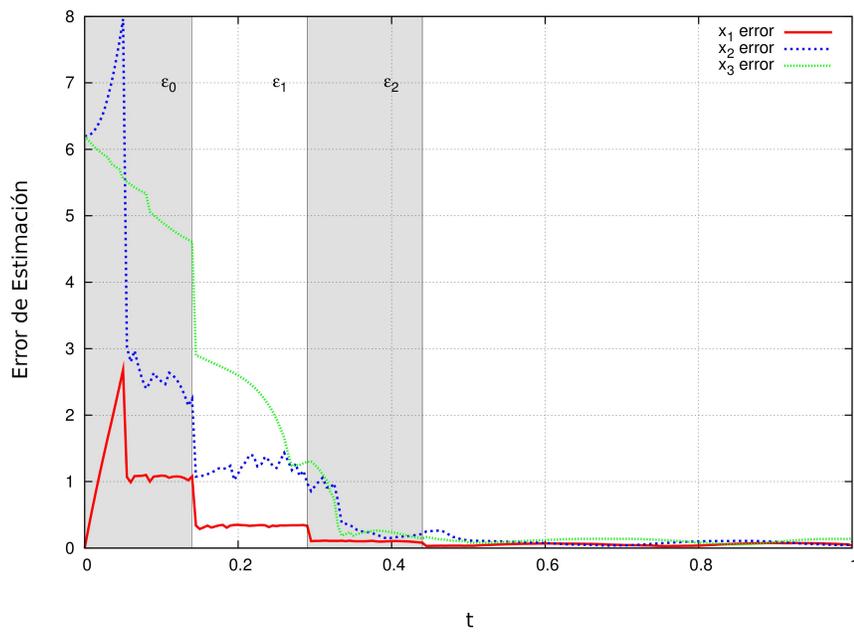


Figura 4.14: Error de estimación vs. tiempo.

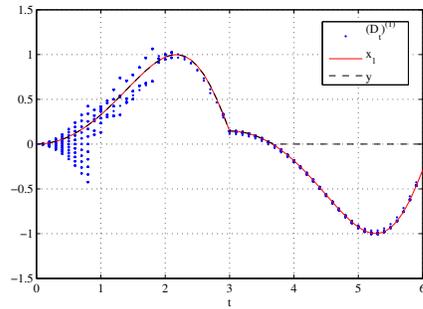


Figura 4.15: Espacio de búsqueda y salida vs. x_1 vs. tiempo.

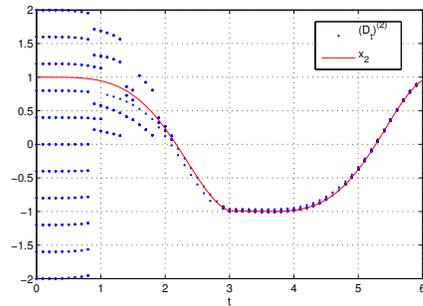


Figura 4.16: Espacio de búsqueda vs. x_2 vs. tiempo.

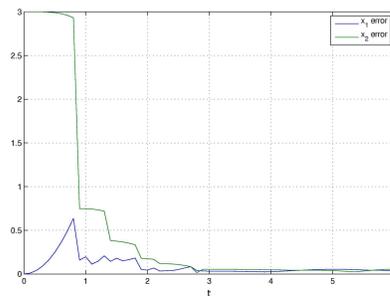


Figura 4.17: Error de estimación vs. tiempo.

4.6. Conclusiones

En este capítulo hemos propuesto un observador que converge bajo pocas suposiciones “estructurales” respecto del sistema observado. Esto fue logrado a expensas de un método que es “paralelo” en el sentido de que varios estados posibles son evaluados al mismo tiempo. No obstante, tal estructura paralela está lejos de ser de fuerza bruta y puede ser aplicada sin mayores inconvenientes en computadoras modernas. Se han presentado ejemplos numéricos que validan dicho diseño para los casos autónomo y con controles a lazo abierto.

Capítulo 5

Método Alternativo – Sistemas Conmutados

5.1. Introducción

En la última década, el estudio de sistemas conmutados ha recibido gran atención por parte de la comunidad científica especializada. Mayormente motivada por el rápido desarrollo del área de control inteligente (Véase [38] y las referencias allí citadas para mayores detalles). De hecho, los sistemas conmutados nos permiten, por ejemplo, modelar la parte continua de un sistema híbrido (Véase [8, 41]). Un sistema conmutado es un sistema dinámico que consiste en una familia de subsistemas, que en este capítulo asumimos que evolucionan en tiempo continuo, y una regla lógica (dependiente del tiempo o del estado) que orquesta la conmutación entre estos diferentes subsistemas.

A pesar de su aparente simplicidad los sistemas conmutados a veces pueden comportarse de maneras muy complejas. Por ejemplo, una trayectoria obtenida de entre subsistemas asintóticamente estables puede ser divergente (Véase [38])

El problema de estimación de estados ha sido investigado por varias décadas como ya hemos mencionado antes. Para el caso específico de los sistemas conmutados el diseño de un observador para el caso lineal (*i.e.* cuando cada uno de los subsistemas es lineal) ha sido estudiado durante la década pasada y se han desarrollado diferentes estrategias de diseño. En [2, 4] y [47] se asume que cada subsistema es observable y

admite un observador, forzando de esta manera la existencia de una función de Lyapunov común o de un dwell-time fijo. En [13], [54] y [57] no se asume observabilidad para cada subsistema en particular, pero los autores recurren a la noción de obtener la observabilidad mediante la conmutación, y se propone una condición suficiente para recuperar la información del estado completo luego de una o múltiples conmutaciones. La salida y sus derivadas son utilizadas para recuperar el estado del sistema.

Por otro lado, no hay mucho en la literatura sobre el diseño de observadores para sistemas conmutados no-lineales. En [5] se presenta un observador para sistemas conmutados no-lineales autónomos con saltos, mientras que en [50] se dan condiciones para la observabilidad y el diseño de observadores para sistemas conmutados no-lineales. En ambos casos los campos vectoriales y las funciones de salida que describen la evolución y salida de cada subsistema se suponen suaves. En [56] se presenta el diseño de un observador robusto para sistemas conmutados no-lineales en tiempo discreto, donde los subsistemas que lo componen son del tipo Lipschitz continuo.

En este capítulo presentamos un observador para sistemas conmutados no-lineales en tiempo continuo compuesto por subsistemas cuya dinámica está descrita por campos vectoriales Lipschitz continuos (véase [27]). Las estrategias mencionadas arriba no pueden ser aplicadas al diseño de observadores para esta clase de sistemas conmutados a no ser que se apliquen restricciones severas sobre la señal de conmutación.

El enfoque que tomamos aquí para el problema de observación de estados es similar al desarrollado en el capítulo anterior.

5.1.1. Clases de Sistemas Conmutados

La teoría de control tradicionalmente se dedicó al estudio de sistemas dinámicos continuos o discretos por separado, sin embargo una “mezcla” de ambos se encuentra frecuentemente en el mundo real.

Cuando un modelo matemático consiste en la interacción entre un sistema cuya dinámica está descrita por una variable continua con otro cuya dinámica en cambio es discreta se tiene lo que en la literatura se conoce como un *sistema híbrido*. La parte

continua puede estar representada por un sistema de control en variable de estado de la forma $\dot{x} = f(x, u)$ con estado $x \in \mathbb{R}^n$ y variable de control o entrada $u \in \mathbb{R}^m$. Por otro lado tendremos la dinámica discreta, esta bien podría estar descrita por una máquina finita de estados, *i.e.* con una variable m que toma valores en algún conjunto finito \mathcal{S} , y donde las transiciones entre los distintos estados son disparadas por una variable de entrada apropiada v . Un sistema híbrido propiamente dicho surge cuando la variable u de entrada al sistema continuo es de alguna manera función del estado m del sistema discreto y, por otro lado, la entrada v al sistema discreto es por su parte función del estado x del sistema continuo.

Veamos el siguiente ejemplo ilustrativo ([9])

Ejemplo 67 Un modelo muy sencillo para describir el movimiento de un automóvil podría ser

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(a, m)\end{aligned}$$

donde x_1 es la posición, x_2 la velocidad, a la entrada de aceleración y $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, -1, 0\}$ es la posición de la caja de cambios. La función f debería ser negativa y decreciente en a cuando $m = -1$, negativa e independiente de a cuando $m = 0$, y creciente en a , positiva para un a lo suficientemente grande, y decreciente en m cuando $m > 0$. En este sistema x_1 y x_2 son los estados continuos y m es el estado discreto. Las transiciones o cambios en la variable discreta claramente afectarán la trayectoria continua. En el caso de un automóvil con transmisión automática la evolución de la variable discreta estará por su lado determinada por la evolución de la velocidad, *i.e.* de la variable continua x_2 . En caso de que el automóvil tenga transmisión manual las transiciones serán controladas por el conductor. También es natural considerar variables de salida que dependan tanto de la variable continua como de la discreta, como puede ser un tacómetro que mide las revoluciones por minuto del motor y que es función tanto de x_2 como de m .

En este capítulo, como suele ser en la mayoría de los trabajos en Teoría de Control y Sistemas, centraremos nuestra atención a sistemas híbridos para los cuales la parte discreta está gobernada por eventos de conmutación aislados (a diferencia de la óptica de las Ciencias de la Computación adonde la dinámica de la parte discreta juega un rol mucho más relevante en el análisis). Estos sistemas son conocidos en la literatura como *Sistemas Conmutados*.

Los eventos de conmutación de un sistema conmutado son típicamente clasificados en:

- *Estado-dependientes* versus *tiempo-dependientes*.
- *Autónomos (no controlados)* versus *controlados*.

Por supuesto se pueden dar combinaciones entre estas categorías. Las repasamos brevemente.

Conmutación estado-dependiente

Supongamos que al espacio de estados continuos (*e.g.*, \mathbb{R}^n) se lo particiona en un número finito o no de *regiones de operación* mediante el uso de una familia de *superficies de conmutación*. Cada una de estas regiones estará gobernada por un subsistema dinámico continuo (con o sin controles). Cada vez que una trayectoria toca una de estas superficies de conmutación el estado continuo *salta* a un nuevo valor especificado por un *mapa de reposicionamiento*.

Cuando hay saltos instantáneos inducidos por el mapa de reposicionamiento en el estado continuo se habla de un *efecto impulsivo*. Un caso particular es aquel en el que tales efectos impulsivos están ausentes, *i.e.*, el mapa de reposicionamiento es la identidad. Esto significa que la trayectoria es continua en todas partes, aunque en general pierda la diferenciabilidad cuando atraviesa una superficie de conmutación. En lo que sigue sólo prestaremos atención a la construcción de observadores para sistemas sin efectos impulsivos.

Reglas de conmutación estado-dependientes más complicadas también son posibles. Por ejemplo, las regiones de operación del sistema podrían superponerse y una

dada superficie de conmutación podría ser solo reconocida si el sistema se encuentra en un estado discreto determinado. La conmutación con histéresis da a lugar a este tipo de comportamiento.

Conmutación tiempo-dependiente

Supongamos que se da una familia $\{f_i : i \in \mathbf{m}\}$ de campos vectoriales de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n , donde típicamente $\mathbf{m} = \{1, \dots, m\}$ es un conjunto de índices. Esto da lugar a la familia de sistemas

$$\dot{x} = f_i(x), \quad i \in \mathbf{m}. \quad (5.1)$$

Las funciones f_i se suponen suficientemente regulares, *i.e.* como mínimo localmente Lipschitz continuas.

Para definir un sistema conmutado generado por la familia de arriba necesitamos de la noción de *señal de conmutación*.

Definición 68 Una *señal de conmutación* es una función $\sigma : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbf{m}$ constante a tramos que tiene una cantidad finita de discontinuidades a las que llamamos *instantes (o eventos) de conmutación* sobre cada intervalo acotado de tiempo, y que permanece constante (*i.e.* no hay otras discontinuidades) entre dos instantes de conmutación.

El rol de σ es el de especificar para cada instante de tiempo t un índice $\sigma(t) \in \mathbf{m}$ que indica el *subsistema activo* en dicho instante, *i.e.*, el sistema de la familia (5.1) que se está siguiendo. Adicionalmente, las señales de conmutación se suponen continuas desde la derecha, *i.e.*: $\sigma(t) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} \sigma(\tau)$ para todo $\tau \in [t_0, +\infty)$.

Nótese que de hecho es difícil hacer una distinción formal entre conmutación estado-dependiente o tiempo-dependiente. Si los elementos de \mathbf{m} tienen una correspondencia biunívoca con las regiones de operación que fueron discutidas arriba y a su vez con los subsistemas de la familia correspondiente, luego toda posible trayectoria del sistema con conmutación estado-dependiente también es solución del sistema con

conmutación tiempo-dependiente para una señal de conmutación definida apropiadamente¹ (como veremos más adelante). Sin embargo, al revés no vale por lo que el sistema con conmutaciones tiempo-dependientes puede verse como un modelo “más amplio” del sistema con conmutaciones estado-dependientes que podría describir, por ejemplo, incertidumbre en la ubicación de las superficies de conmutación.

Conmutación autónoma versus controlada

Por conmutación autónoma entendemos a aquellos sistemas adonde no hay control sobre el mecanismo que dispara los eventos de conmutación del estado discreto. Esta categoría incluye por ejemplo a los sistemas estado-dependientes cuyas superficies de conmutación están predeterminadas. El problema de observación de estados para sistemas de estas características será analizado en la Sección 5.4.

Por el contrario, en muchas situaciones la conmutación es impuesta en la etapa de diseño con un determinado objetivo. En este caso se tiene control directo sobre el mecanismo de conmutación (que puede ser estado-dependiente o tiempo-dependiente). A este caso también lo denominamos *no-autónomo* y será del que nos ocuparemos en la Sección 5.3, específicamente el caso tiempo-dependiente con señal de conmutación conocida por el observador.

5.2. Formulación del Problema

Entonces en este capítulo nos concentraremos en construir un observador para un sistema conmutado con salidas de la forma descrita por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (5.2)$$

donde $\mathcal{P} = \{f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, i \in \mathbf{m}\}$, con $\mathbf{m} = \{1, \dots, m\}$, es una familia finita de campos vectoriales localmente Lipschitz continuos, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ donde $p \leq n$ es un mapeo localmente Lipschitz continuo y $\sigma : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbf{m}$.

¹Aunque en este caso, en general, se pierde la continuidad por derecha.

De acuerdo a la naturaleza de la función σ consideraremos dos clases de sistemas conmutados:

- I. Sistemas conmutados *no-autónomos*, cuando $\sigma(t)$ no dependa del estado del sistema.
- II. Sistemas conmutados *autónomos*, cuando exista una función $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{m}$ tal que $\sigma(t) = \omega(x(t))$ donde $x(t)$ es el estado del sistema (5.2) en el instante t .

En este capítulo propondremos la utilización del método alternativo de observación de estados a ambos casos. Sin embargo, como se podrá verificar luego, este marco de trabajo será aplicable sin dificultades para el primer caso sólo cuando σ sea una señal conocida para el observador (el caso denominado como *modo conocido* en la literatura).

En primer lugar, nos concentraremos en resolver el problema para un sistema conmutado no-autónomo. Luego, mediante modificaciones y suposiciones adicionales extenderemos el método al caso autónomo.

5.3. El Observador – caso no-autónomo

Para este caso haremos la siguiente suposición sobre $\sigma(t)$:

Suposición 69 σ es una señal de conmutación (Def. 68).

Observación 70 Debido a la regularidad de los campos $f_i(x)$, $i \in \mathbf{m}$, para cada condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y cada señal de conmutación σ que verifique la Suposición 69, existe una única solución clásica de la ecuación diferencial en (5.2), *i.e.*, una función absolutamente continua $x(t, t_0, x_0)$ definida en un intervalo maximal $I_{x_0} = [t_0, t_1)$ tal que $\dot{x}(t, t_0, x_0) = f_{\sigma(t)}(x(t, t_0, x_0))$ para caso todo $t \in I_{x_0}$ y donde $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

La solución $x(t, t_0, x_0)$ es *completa hacia adelante* si $I_{x_0} = [t_0, \infty)$. Denominaremos \mathcal{S} a la clase de señales de conmutación que verifican la Suposición 69 y tales que las soluciones $x(t, t_0, x_0)$ sean completas hacia adelante para cada x_0 .

Por simplicidad, supondremos que t_0 está fijo y, haciendo uso de una notación similar a la del capítulo anterior, denotaremos $T_{f_\sigma}^{t_0, t}(x_0) = x(t, t_0, x_0)$. También, cuando quede claro del contexto, $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ e $y(t) = h(x(t))$.

El objetivo sigue siendo el mismo, *i.e.* producir una estimación $\hat{x}(t)$ del estado del sistema (5.2) basándonos en una noción de observabilidad tan débil como sea posible compatible con la hipótesis ciertamente generales del sistema.

En este caso la noción de observabilidad que surge de las definiciones de [23] debe ser adaptada para el caso conmutado no-autónomo: *i.e.*, debido a que la señal de conmutación entra en juego la definición de observabilidad necesariamente tendrá que ser reforzada.

Definición 71

- Un par de estados x_0, x'_0 tales que $x_0 \neq x'_0$ son *indistinguibles* para el sistema (5.2) si $\forall \sigma \in \mathcal{S}, \forall t \geq t_0, h(T_{f_\sigma}^{t_0, t}(x_0)) = h(T_{f_\sigma}^{t_0, t}(x'_0))$.
- El sistema (5.2) es *observable en x_0* si no existe un x'_0 tal que el par (x_0, x'_0) sea indistinguible. El sistema es *observable* si lo es en x_0 , para todo estado x_0 .

Observación 72 Ahora si consideramos a la señal de conmutación $\sigma \in \mathcal{S}$ como una entrada, la noción de *entradas universales* (aquellas que arrojan estados indistinguibles) subyace a la observabilidad: no pueden haber entradas singulares si la observabilidad se verifica.

El principio básico de funcionamiento del observador para estos sistemas será el mismo que para el capítulo 4 por lo que necesariamente también haremos la Suposición 37.

También, como en el capítulo previo y por las mismas razones, es necesario adecuar la noción de observabilidad introduciendo una región de incerteza en la medición.

Definición 73 Dados $\gamma > 0$, $\sigma \in \mathcal{S}$,

- Un par de estados (x_1, x_2) se dice γ -*indistinguishible* (con respecto a σ) para el sistema (5.2) si para cada $t \geq t_0$, $|h(T_{f_\sigma}^{t_0,t}(x_1)) - h(T_{f_\sigma}^{t_0,t}(x_2))| < \gamma$.
- El sistema (5.2) es γ -*observable* (con respecto a σ) si para todo (x_1, x_2) , $x_1 \neq x_2$ existe $t^* > t_0$ tal que $|h(T_{f_\sigma}^{t_0,t^*}(x_1)) - h(T_{f_\sigma}^{t_0,t^*}(x_2))| > 2\gamma$.

Aquí también vale la Observación 40.

En lo que sigue se supondrá que una entrada de conmutación $\sigma \in \mathcal{S}$ arbitraria pero fija se aplica a (5.2) y que todas las propiedades σ -dependientes estarán referidas a esta señal de conmutación, por lo que omitiremos mayores referencias a ella.

Observación 74 El resultado de la Proposición 41, dado que se verifique que el sistema (5.2) sea γ -observable como en la Definición 73, es válido sin modificaciones adicionales a la de considerar el operador evolución T_{f_σ} en lugar de T_f . Esto se debe a que, aunque las funciones $\sigma \in \mathcal{S}$ puedan no ser continuas, $T_{f_\sigma}^{t_0,t}(\cdot) \in \mathcal{C}(E)$.

No es necesario redefinir el observador, baste con mencionar que se construye igual que en la Definición 51 con la salvedad de utilizar el operador de evolución T_{f_σ} .

Previsiblemente, para el caso de sistemas conmutados no-autónomos los resultados de descarte y consistencia son completamente análogos al caso del observador con controles a lazo abierto. La única salvedad es que en lugar de considerar $\|f_u\|_E$ y $L_{f_u}^E$ como fuera definido en aquella instancia, en el presente capítulo dichas constantes se definen como $\|f_\sigma\|_E = \max_{i \in \mathbf{m}} \|f_i\|_E$ y $L_{f_\sigma}^E = \max_{i \in \mathbf{m}} L_{f_i}^E$ respectivamente.

Por esta razón pasamos directamente a enunciar el resultado principal de esta sección cuya demostración es completamente análoga a la del Teorema 65. También utilizaremos la noción de γ -observabilidad sobre $\Lambda(\epsilon, K)$ de la Definición 55. Tenemos en este caso un ejemplo ilustrativo como en 2. de la Observación 56 sobre dicha noción, como mostramos en la siguiente

Observación 75 Consideremos el caso en que el sistema conmutado (5.2) sea lineal, *i.e.* $f_i(x) = A_i x \forall i \in \mathbf{m}$ y $h(x) = Cx$ y supongamos que cada par (C, A_i) sea observable. Luego, para cada $K \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n) \times \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ dado, el sistema es γ -observable sobre $\Lambda(\gamma/\mu, K)$ para algún $\mu > 0$. De hecho, sea \mathcal{T} una sucesión fija de tiempos de muestreo como en (4.6) y sea $\tau > t_0$ arbitrario, y consideremos para $t \geq t_k$ que

$$\eta(t) := C e^{A_{i_k}(t-t_k)} e^{A_{i_{k-1}}(t_k-t_{k-1})} \dots e^{A_{i_0}(t_1-t_0)}.$$

Como cada par (C, A_i) es observable, se sigue fácilmente que $W(\tau, t_0) = \int_{t_0}^{\tau} \eta^T(t) \eta(t) dt$ es definida positiva. Por lo tanto, existe t^* tal que $t^* \in (t_0, \tau)$ y $|y(t^*, t_0, \bar{x}) - y(t^*, t_0, x_0)|^2 \geq s(\tau, t_0) |\bar{x} - x_0|^2 / (2(\tau - t_0))$ para cada par $(\bar{x}, x_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, siendo $s(\tau, t_0)$ el menor valor singular de $W(\tau, t_0)$. Entonces, si tomamos $\mu \leq \sqrt{s(\tau, t_0) / (8(\tau - t_0))}$ el sistema es γ -observable sobre los conjuntos $\Lambda(\gamma/\mu, K)$ para todo $K \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n) \times \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$.

Tenemos entonces el siguiente

Teorema 76 Consideremos el sistema (5.2) y sea D , que verifica la Suposición 37, el espacio de búsqueda inicial. Sea también $x_0 \in D$ el estado inicial y sea t_0 el instante inicial. Consideremos adicionalmente que $E \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio ambiente. Para $\kappa \in (L_h^E, 2L_h^E)$ sea

$$\gamma_0 = \frac{2L_h^E \|f_\sigma\|_E}{L_{f_\sigma}^E} \ln \left(\frac{\kappa}{L_h^E} \right),$$

y supóngase que el sistema (5.2) es γ_0 -observable y que existe un número positivo $\gamma^* < \gamma_0/4$ tal que $t^*(\nu, \gamma_*, \frac{3\gamma_*}{8\kappa}, E^*) < t^*(\nu, \gamma_*, \frac{\gamma_*}{4\kappa}, E^*)$ para todo $\nu \in [t_0, t^*(t_0, \gamma_*, \frac{\gamma_*}{4\kappa}, E^*)]$,

donde $E^* = \{(x_1, x_2) \in E \times E : |h(x_1) - h(x_2)| \leq \gamma_*/2\}$.

Luego existen dos sucesiones estrictamente crecientes $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_k, \dots\}$ y $\Upsilon = \{\tau_i = t_{k_i}, i \in \mathbb{N}_0, k_0 = 0\} \subset \mathcal{T}$ y dos sucesiones decrecientes de números positivos $\Sigma = \{\epsilon_i, i \in \mathbb{N}_0\}$ y $\Gamma = \{\gamma_i, i \in \mathbb{N}_0\}$ con $\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i = \epsilon_*$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = \gamma_*$ tal que para $\mathcal{Y} = \{y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_k), \dots\} \subset \mathbb{R}^p$, la sucesión de muestras de salida del sistema (5.2) correspondientes al estado inicial $x(t_0) = x_0$, el observador

$$\mathbf{O}(D, \mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma, \mathcal{Y}) = \mathbf{D}_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\tau_0, \tau_1} \triangleright \mathbf{D}_{\epsilon_1, \gamma_1}^{\tau_1, \tau_2} \triangleright \dots \triangleright \mathbf{D}_{\epsilon_i, \gamma_i}^{\tau_i, \tau_{i+1}} \triangleright \dots (D)$$

converge con error de estimación final $6\epsilon_*$.

La demostración sigue las misma líneas que la del Teorema 59.

5.4. El caso autónomo

De ahora en adelante suponemos que un mapa sobreyectivo fijo $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{m}$ está dado, y notamos que éste induce una partición $\mathbb{R}^n = \cup_{i \in \mathbf{m}} \omega^{-1}(i)$. También supondremos que en (5.2) la señal de conmutación es $\sigma(t) = \omega(x(t))$. Para esta señal de conmutación, denotamos al sistema (5.2) como sigue

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_{\omega(x(t))}(x(t)) \\ y(t) = h(x(t)), \end{cases} \quad (5.3)$$

Observación 77 Dado que cualquier mapa como ω necesariamente es discontinuo $f_{\omega(x)}(x)$ también es discontinua. En consecuencia:

- I. El sistema a lazo cerrado (5.3) puede no tener soluciones clásicas *i.e.* soluciones de Caratheodory para algunas condiciones iniciales;
- II. aún en el caso en que existan soluciones clásicas $x(t)$ para toda condición inicial, ni la unicidad de una solución, ni la dependencia continua con respecto a las condiciones iniciales pueden ser aseguradas;

- III. $\sigma(t) = \omega(x(t))$ puede no necesariamente ser una señal de conmutación ya que, por ejemplo, σ podría tener un punto de acumulación de instantes de conmutación (comportamiento de Zenón) o aún un conjunto más complejo de discontinuidades (Véase *e.g.* [11]).

En lo que sigue supondremos lo siguiente

Suposición 78 ω es tal que para toda condición inicial x_0 y cada instante inicial t_0

- I. Existe una única solución clásica $x(t)$ *i.e.* una función absolutamente continua $x(t, t_0, x_0)$ definida en un intervalo maximal $I_{x_0} = [t_0, t_1)$ tal que $\dot{x}(t, t_0, x_0) = f_{\omega(x(t, t_0, x_0))}(x(t, t_0, x_0))$ para casi todo $t \in I_{x_0}$ y que $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$.
- II. $\sigma(t) = \omega(x(t, t_0, x_0))$ es una señal de conmutación.
- III. $x(t, t_0, x_0)$ es completa hacia adelante. Es decir, $I_{x_0} = [t_0, +\infty)$.

Observación 79 Aún bajo estas hipótesis, en general la solución $x(t)$ no depende en forma continua con respecto a la condición inicial x_0 . Por lo tanto, $T_{f_\omega}^{t_0, t}(\cdot)$ ya no será más un mapa continuo.

Abusando de la notación, de ahora en adelante denotaremos con \mathcal{S} a la familia de señales de conmutación σ definidas por $\sigma(t) = \omega(x(t))$ correspondientes a funciones ω que verifican la Suposición 78. También denotaremos $f_{\sigma(t)}(x(t)) = f_{\omega(x(t))}(x(t))$.

Con esta notación, las definiciones y la mayoría de los resultados que se verifican para el caso no-autónomo, también se verifican para el autónomo. Seguidamente, listamos cuales de los resultados ya no son válidos.

- I. La Proposición 41 ya no se verifica, y en consecuencia t^* no puede ser definido. Por ende, el espacio ambiente E no puede ser prefijado cuantitativamente, como sugiere el punto 2. de la Observación 48.

- II. El Lema 50 debe ser reformulado.
- III. En la Proposición 57, $t^*(t_0, \gamma, \epsilon, D \times D) \neq \max \mathcal{A}$.
- IV. También el Teorema 76 debe ser reformulado.

En lo que sigue presentamos una reformulación del Lema 50 para el caso autónomo.

Lema 80 Dados $\epsilon > 0$, $\gamma > 0$, y el correspondiente $\epsilon - \gamma$ -descartador, con $\bar{t} = t_0$, $\tilde{\tau} = +\infty$, y D , y E como en el Lema 49, si $\bar{t} \in \mathcal{T}$ verifica:

$$\bar{t} - t_0 < \frac{1}{L_{f_\sigma}^E} \ln \left(\frac{\gamma}{(\epsilon + \mu_E)L_h^E} \right), \text{ donde } \mu_E = \frac{2\|f_\sigma\|_E}{L_{f_\sigma}^E}$$

y con $L_{f_\sigma}^E = \max_{i \in \mathbf{m}} L_{f_i}^E$, luego si $\bar{t} = t_k$,

$$\langle \phi_\gamma(\bar{t}, t_{k-1}, \xi_{k-1}, y_k), S_{\mathcal{F}_\epsilon(D)}(C^\epsilon(r^*)) \rangle = 1$$

suponiendo que el estado real del sistema observado pertenece a $r^* \in H^\epsilon(\mathcal{F}_\epsilon(D))$.

Demostración: Sea $c^* = C^\epsilon(r^*)$ el centro de r^* , y sea $x \in r^*$. Denotemos también $x_1(t) = x(t, t_0, c^*)$ y $x_2(t) = x(t, t_0, x)$. Entonces si $\sigma_1(t) = \omega(x_1(t))$ y $\sigma_2(t) = \omega(x_2(t))$, se sigue que

$$\begin{aligned} |T_{f_{\sigma_1}}^{t_0, \bar{t}}(c^*) - T_{f_{\sigma_2}}^{t_0, \bar{t}}(x)| &= \left| c^* - x + \int_{t_0}^{\bar{t}} [f_{\sigma_1}(x_1(s)) - f_{\sigma_2}(x_2(s))] ds \right| \\ &\leq \epsilon + L_{f_\sigma}^E \int_{t_0}^{\bar{t}} |x_1(s) - x_2(s)| ds + 2(\bar{t} - t_0) \|f_\sigma\|_E. \end{aligned}$$

Del lema de Gronwall se deduce que

$$|T_{f_{\sigma_1}}^{t_0, \bar{t}}(c^*) - T_{f_{\sigma_2}}^{t_0, \bar{t}}(x)| \leq (\epsilon + \mu_E) e^{L_{f_\sigma}^E(\bar{t}-t_0)}. \quad (5.4)$$

Por otro lado, r^* no será descartado del espacio de búsqueda (según la definición de ϕ_γ) siempre y cuando

$$|h(T_{f_{\sigma_1}}^{t_0, \bar{t}}(c^*)) - h(T_{f_{\sigma_2}}^{t_0, \bar{t}}(x))| \leq \gamma.$$

De la condición de Lipschitz de h y (5.4) deducimos:

$$|h(T_{f_\sigma}^{t_0, \bar{t}}(c^*)) - h(T_{f_\sigma}^{t_0, \bar{t}}(x))| \leq L_h^E |T_{f_\sigma}^{t_0, \bar{t}}(c^*) - T_{f_\sigma}^{t_0, \bar{t}}(x)| \leq L_h^E \cdot (\epsilon + \mu) \cdot e^{L_{f_\sigma}^E(\bar{t}-t_0)} < \gamma.$$

En consecuencia, siempre que $t \leq \bar{t}$, r^* no será descartado por el $\epsilon - \gamma$ -descartador, y la consistencia se verificará. ■

Finalmente, reformulamos el Teorema 76 como a continuación.

Teorema 81 Considérese el sistema (5.3) y sea D , el espacio de búsqueda inicial, un conjunto que verifica la Suposición 37. Sea también $x_0 \in D$ el estado inicial y sea t_0 el correspondiente instante inicial. Considérese adicionalmente el espacio ambiente $E \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$. Sea $\gamma_0 > 0$ tal que el sistema (5.3) sea γ_0 -observable y que existe un número positivo $\gamma^* < \gamma_0/4$ tal que $t^*(\nu, \gamma_*, \frac{3\gamma_*}{8\kappa}, E^*) < t^*(\nu, \gamma_*, \frac{\gamma_*}{4\kappa}, E^*)$ para todo $\nu \in [t_0, t^*(t_0, \gamma_*, \frac{\gamma_*}{4\kappa}, E^*)]$, donde $E^* = \{(x_1, x_2) \in E \times E : |h(x_1) - h(x_2)| \leq \gamma_*/2\}$. Luego existen dos sucesiones estrictamente crecientes $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_k, \dots\}$ y $\Upsilon = \{\tau_i = t_{k_i}, i \in \mathbb{N}_0, k_0 = 0\} \subset \mathcal{T}$ y dos sucesiones decrecientes de números positivos $\Sigma = \{\epsilon_i, i \in \mathbb{N}_0\}$ y $\Gamma = \{\gamma_i, i \in \mathbb{N}_0\}$ con $\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i = \epsilon_*$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = \gamma_*$ tal que para $\mathcal{Y} = \{y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_k), \dots\} \subset \mathbb{R}^p$, la sucesión de muestras de salida del sistema (5.3) correspondientes al estado inicial $x(t_0) = x_0$, el observador

$$\mathbf{O}(D, \mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma, \mathcal{Y}) = \mathbf{D}_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\tau_0, \tau_1} \triangleright \mathbf{D}_{\epsilon_1, \gamma_1}^{\tau_1, \tau_2} \triangleright \dots \triangleright \mathbf{D}_{\epsilon_i, \gamma_i}^{\tau_i, \tau_{i+1}} \triangleright \dots (D)$$

converge con error de estimación final $6\epsilon_*$.

Demostración: Para $\alpha, \delta \in (0, 1)$ consideremos

$$K = \left\lceil \frac{\mu_E L_h^E}{\gamma_0} \ln \left(\frac{\delta}{\left(\delta + \frac{\mu_E}{\gamma_0}\right) L_h^E} \right)^\alpha \right\rceil, \quad (5.5)$$

Definimos Γ mediante la recursión

$$\gamma_{i+1} = \max \left\{ \frac{\gamma_i}{2}, \gamma_* \right\}, \quad i \geq 0,$$

y notamos que existe un número mínimo que verifica $i^* \geq \left\lceil \log_2 \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_*} \right) \right\rceil + 1$, tal que $\gamma_i = \gamma_*$ para todo $i \geq i^*$. Luego $\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{i^*}\}$.

Ahora, definimos $\Sigma = \{\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{i^*}\}$ como a continuación

$$\epsilon_i = \begin{cases} \frac{\gamma_i}{\delta} & \text{si } 0 \leq i < i^* - 1 \\ \frac{\gamma_{i^*}}{2\delta} & \text{si } i = i^* - 1 \\ \frac{\gamma_{i^*}}{4\delta} & \text{si } i = i^* \end{cases} \quad (5.6)$$

Seguidamente, y con el propósito de definir $\Upsilon = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{i^*}\}$, sea $\tau_0 = t_0$ y para cada $i \in \{0, 1, \dots, i^* - 1\}$, $\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta\tau_i$, donde

$$\Delta\tau_i = \begin{cases} \frac{1}{L_{f\sigma}^E} \ln \left(\frac{\delta}{(\delta + \frac{\mu E}{\gamma_i}) L_h^E} \right)^\alpha & \text{si } 0 \leq i < i^* \\ +\infty & \text{si } i = i^*. \end{cases} \quad (5.7)$$

Finalmente, con el propósito de definir \mathcal{T} , sea

$$\mu = \frac{1}{2} \left(t^*(\tau_{i^*}, \gamma_{i^*}, \frac{\gamma_{i^*}}{4\kappa}, E^*) - t^*(\tau_{i^*}, \gamma_{i^*}, \frac{3\gamma_{i^*}}{8\kappa}, E^*) \right),$$

que según las Observaciones 56.1. y 58 es un número positivo. Luego si $\tau_i = t_{k_i}$, definimos $\Delta T_i = t_{j+1} - t_j$ con $t_{k_i} \leq t_j < t_{k_{i+1}}$ como

$$\Delta T_i = \begin{cases} \frac{\Delta\tau_i}{K} & \text{si } 0 \leq i < i^*, \\ \min\{\mu, \frac{\Delta\tau_{i^*}}{K}\} & \text{si } i \geq i^*. \end{cases} \quad (5.8)$$

La demostración del teorema continúa sobre las mismas líneas que el Teorema 76, y la omitiremos. ■

Observación 82 Notamos que debido al cambio en la condición que asegura la consistencia, dada por el Lema 80, ya no es posible mantener constante el tiempo $\Delta\tau$ adonde cada descartador está “activo” y encoger simultáneamente al par $\epsilon - \gamma$.

5.5. Ejemplos Numéricos

Para ilustrar como funciona este enfoque de observación de estados para sistemas conmutados daremos dos ejemplos, uno por cada caso considerado arriba.

5.5.1. No-autónomo con una señal de conmutación conocida

En el caso de un sistema conmutado no-autónomo Lipschitz continuo de la forma dada por (5.2) proponemos como ejemplo una dinámica $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $i \in \mathbf{m} = \{1, 2, 3, 4\}$ donde cada $f_i(x)$ es respectivamente

$$\begin{pmatrix} (x^{(3)})^2 \cdot x^{(2)} \\ -(x^{(3)})^2 \cdot x^{(1)} \\ -(x^{(3)})^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (x^{(2)})^2 \cdot x^{(3)} \\ -(x^{(2)})^3 \\ -(x^{(2)})^2 \cdot x^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -x^{(1)} + 2 + x^{(2)} \\ -(x^{(2)})^3 \\ -(x^{(2)})^2 \cdot x^{(1)} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -x^{(1)} + 1 \\ 0 \\ -(x^{(3)})^3 \end{pmatrix},$$

y donde $\sigma : [t_0, \infty) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ es una función del tiempo conocida con *tiempo entre conmutaciones*² mínimo y máximo de $10 \cdot \Delta T$ y $20 \cdot \Delta T$ respectivamente. La salida es la siguiente función lineal a tramos

$$h(x) = \begin{cases} 2 \cdot x^{(1)} & \text{si } |x^{(1)}| < 0,5 \\ x^{(1)} + 0,5 & \text{si } x^{(1)} \geq 0,5 \\ x^{(1)} - 0,5 & \text{si } x^{(1)} \leq -0,5 \end{cases}$$

La simulación comienza en $x_0 = (-0,974, ,83172, 1,12393)$ para $t_0 = 0$ y los parámetros específicos del observador son $\Delta\tau = 1$, $K = 20$, $\Delta T = 0,05$, $\gamma_0 = 0,6$,

$$\gamma_{i+1} = \text{máx}\{0,5 \cdot \gamma_i, 0,012\} \quad i \geq 0$$

y $\epsilon_i = 0,833 \cdot \gamma_i \forall i$. Dado que en este caso $y(t_0) = x_0^{(1)}$, nuestra elección para D_{t_0} es $\{x_0^{(1)}\} \times [-3, 3] \times [-3, 3]$.

El comportamiento del observador puede ser visto en las Figuras 5.1–5.3. Vale la pena notar el comportamiento no-homogéneo visto en la Figura 5.1c, *i.e.* hay dos

²Es decir, el tiempo que transcurre entre dos eventos de conmutación sucesivos.

caminos γ -indistinguibles hasta que γ cae por debajo de cierto valor dado en $t = 5$. Este tipo de comportamiento puede ser difícil de superar aún para enfoques tan generales como aquellos que involucran un proceso de optimización sobre un intervalo de tiempo.

Observación 83 El enfoque que hemos propuesto está lejos de ser por fuerza bruta. Aunque funcione evaluando conjuntos de puntos (que representan el espacio de búsqueda) “en paralelo”, su característica principal es que la resolución crece, en general, cuando el hiper-volumen de la cápsula convexa del espacio de búsqueda disminuye. Tomemos como ejemplo lo que sucede en el ejemplo previo. El error de estimación final es, como esperábamos, del orden de 0,01. Un cálculo simple arroja que para alcanzar este error de estimación mediante evaluación por fuerza bruta habría sido necesario comenzar con $(3 - (-3)) \cdot (3 - (-3)) / 0,01 = 3600$ puntos diferentes, mientras que en nuestro enfoque aquello asciende a un mero número de 72 puntos; el esfuerzo inicial es exactamente $0,5 / 0,01 = 50$ veces menor.

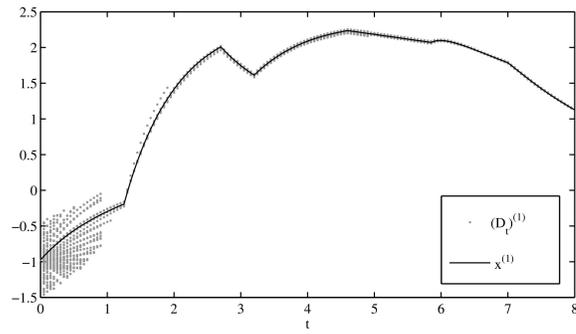
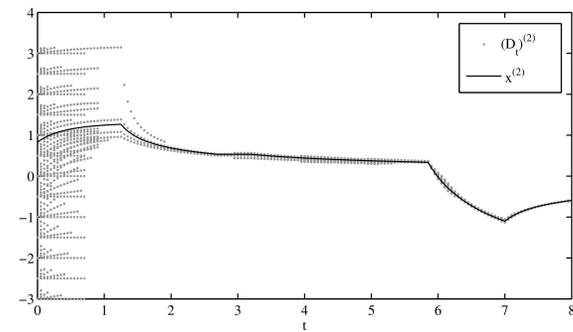
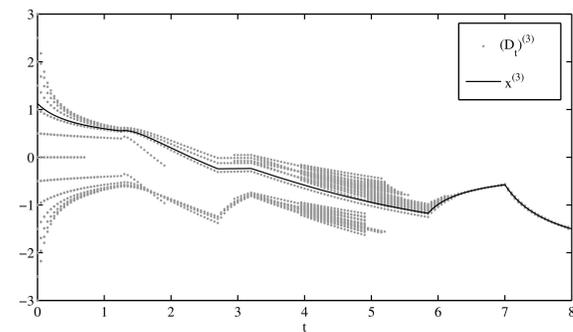
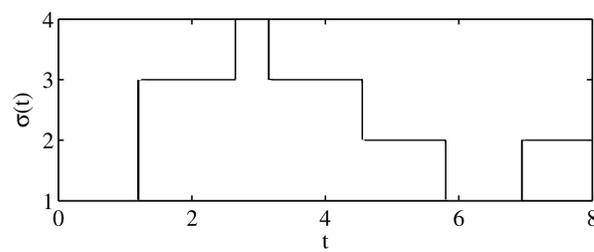
5.5.2. Sistema conmutado autónomo

Para este otro caso hemos elegido un sistema definido por (5.3), con dimensión del espacio de estados $n = 2$ y $\mathbf{m} = \{1, 2, 3, 4\}$. El mapa ω está definido, para cada $x \in \mathbb{R}^2$, como

$$\omega(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } \langle (1, -1), x \rangle > 0 \text{ y } \langle (1, 1), \mu \rangle > 0 \\ 2 & \text{si } \langle (1, -1), x \rangle > 0 \text{ y } \langle (1, 1), \mu \rangle \leq 0 \\ 3 & \text{si } \langle (1, -1), x \rangle \leq 0 \text{ y } \langle (1, 1), \mu \rangle > 0 \\ 4 & \text{si } \langle (1, -1), x \rangle \leq 0 \text{ y } \langle (1, 1), \mu \rangle \leq 0 \end{cases}$$

Luego, para cada $i \in \mathbf{m}$ y cada estado $x \in \mathbb{R}^2$, las dinámicas correspondientes están dadas por

$$f_i(x) = a_i \cdot \begin{bmatrix} -x^{(2)} \\ x^{(1)} \end{bmatrix}$$

(a) $x^{(1)}$ vs. Espacio de búsqueda.(b) $x^{(2)}$ vs. Espacio de búsqueda.(c) $x^{(3)}$ vs. Espacio de búsqueda.

(d) Señal de conmutación.

Figura 5.1: Estados reales del sistema vs. espacios de búsqueda, y señal de conmutación.

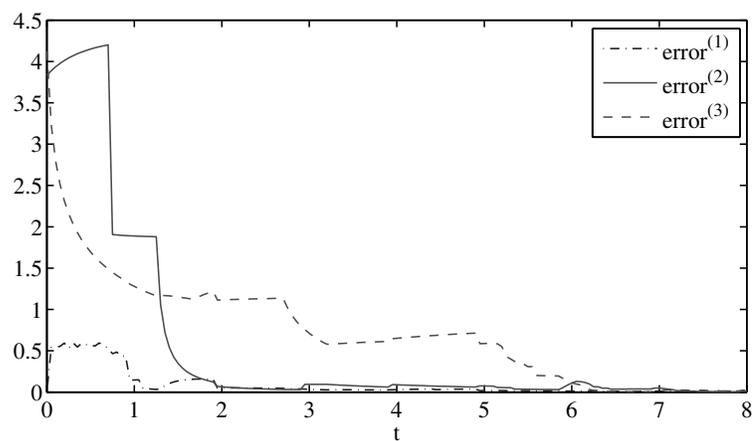


Figura 5.2: Error de estimación.

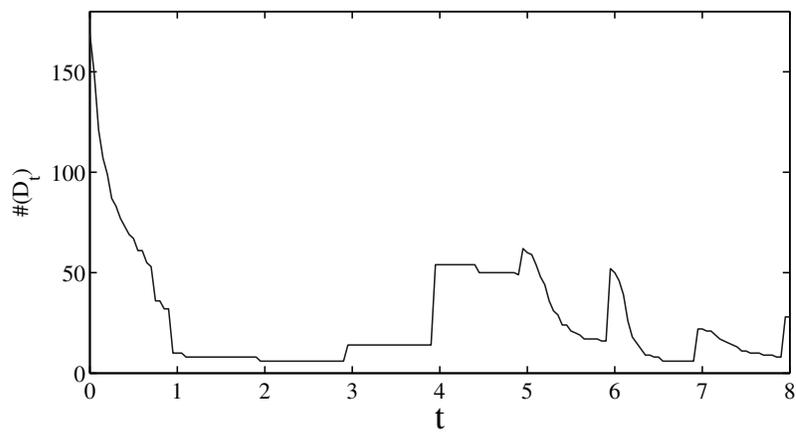


Figura 5.3: Tamaño del espacio de búsqueda.

adonde $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1,5$ y $a_4 = 2,5$ ³. La función de salida $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por

$$h(x) = \begin{cases} x^{(1)} & \text{si } x^{(1)} > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este tipo de función de salida impone una barrera difícil de superar por otros enfoques encontrados en la literatura, fundamentalmente por las dos razones siguientes: (i) su no-suavidad; y (ii), su zona “oscura”, *i.e.* siempre que una trayectoria entra en el semiplano izquierdo de \mathbb{R}^2 la salida mapea toda esta área a 0. Como se ve en nuestras simulaciones nuestro enfoque evita con éxito este problema.

Para la simulación tomamos como estado inicial $x_0 = (-0,735, 0)$ en $t_0 = 0$. También, para los parámetros específicos del observador, tenemos Γ variando desde $\gamma_0 = 0,45$ hasta $\gamma_\star = 0,009$ y $\Delta\tau = 1$ que con $K = 50$, arroja un paso mínimo para la simulación del observador $\Delta T = 0,02$. La sucesión Γ completa viene dada por $\{\gamma_{i+1} = \text{máx}\{0,7 \cdot \gamma_i, 0,009\} : i \in \mathbb{N}_0\}$ y la sucesión Σ se obtiene fácilmente con $\epsilon_i = 1,11 \cdot \gamma_i \forall i$. Como x_0 cae en el semiplano izquierdo (*i.e.*, dentro de la zona “oscura”), luego $h^{-1}(x_0) = \{(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) \in \mathbb{R}^2 : \xi^{(1)} \leq 0\}$ que no es un conjunto compacto. Para nuestros propósitos alcanza con tomar un conjunto compacto D_0 suficientemente grande que contenga x_0 y que esté intersecado con $h^{-1}(x_0)$. Elegimos $D_{t_0} = [-1, 0] \times [-3, 3]$. También notamos que x_0 no coincide con ningún elemento del espacio de búsqueda inicial. Dicha elección de x_0 fue hecha con la intención de que el observador no resuelva trivialmente la *consistencia*.

Dado el espacio ambiente adonde las trayectorias evolucionan y la constante de Lipschitz del sistema, puede ser verificado fácilmente que los parámetros que han sido elegidos para el observador no son tan restrictivos como los que surgen del Teorema 81. Esto se debe a que dichas condiciones aseguran convergencia en un escenario de peor caso. Podemos⁴ elegir parámetros menos restrictivos a expensas de perder el *descarte* en el sentido del Lema 49, cuando alcanzamos valores de error de estimación finales.

³Este sistema se asemeja a un “frequency hopper”, *i.e.* a un sistema de saltos de frecuencia como los que se pueden encontrar en diversos sistemas de comunicaciones.

⁴Y de hecho lo hacemos. *e.g.*, en la recursión que define a Γ utilizamos un factor de 0,7 en lugar de 0,5 como es requerido por el Teorema 81.

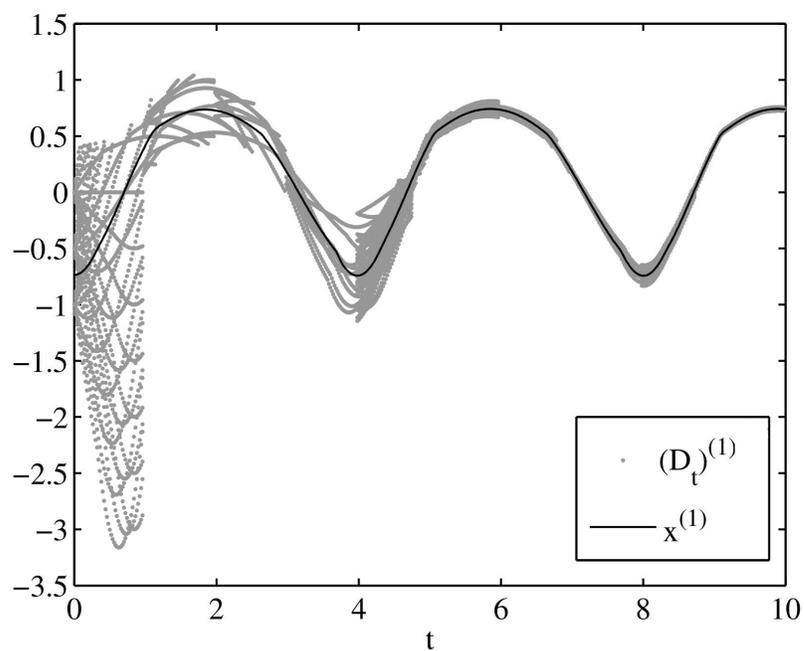
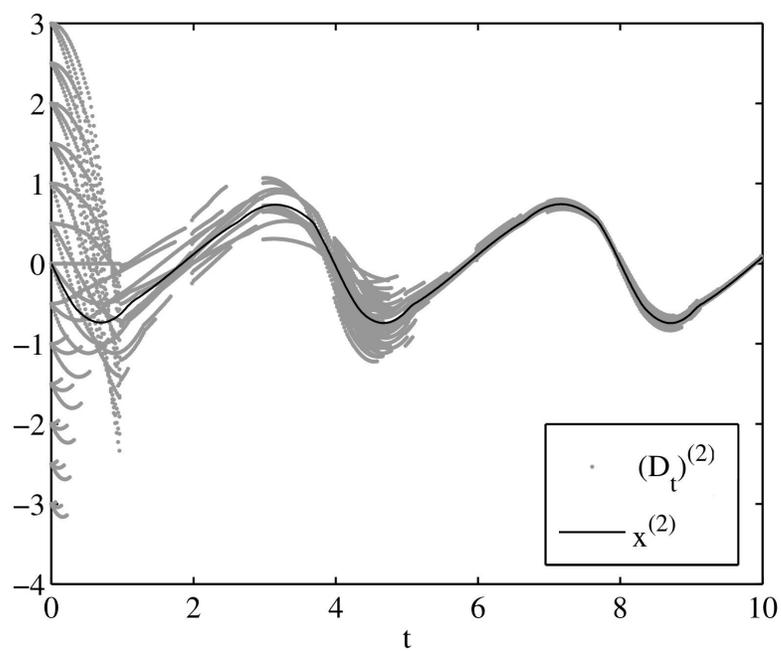
(a) $x^{(1)}$ vs. Espacio de búsqueda.(b) $x^{(2)}$ vs. Espacio de búsqueda.

Figura 5.4: Estados reales del sistema vs. espacios de búsqueda.

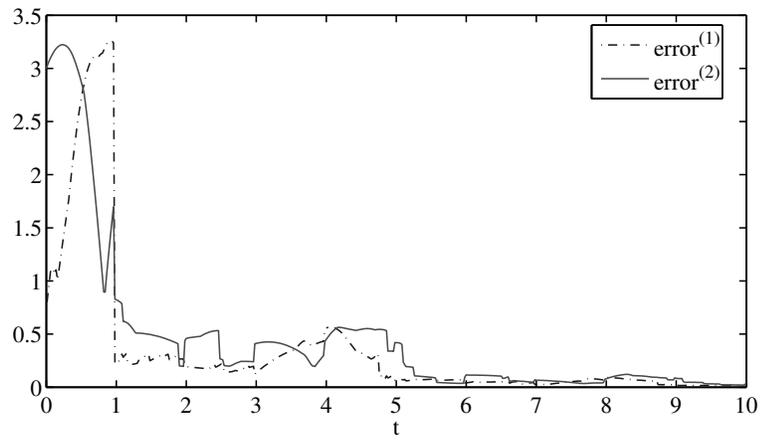


Figura 5.5: Error de estimación.

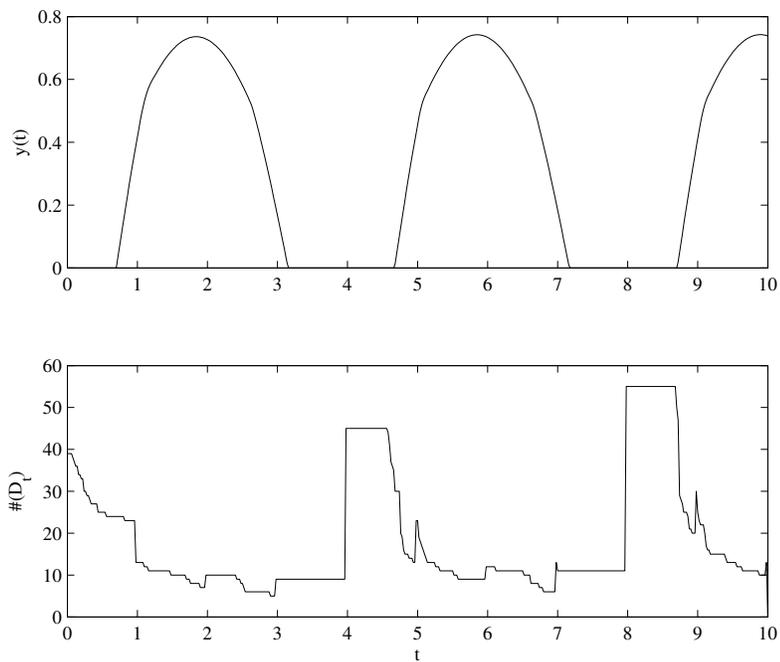


Figura 5.6: Salida del sistema (arriba) vs. tamaño del espacio de búsqueda (abajo).

Desde un punto de vista práctico esto no es un problema (como sí lo sería perder la *consistencia*), siempre y cuando el número de elementos del último conjunto de salida del observador, \hat{D}_{i^*} no sea “demasiado grande” (como puede verse en el valor final de la Figura 5.6), *i.e.* se puede afrontar el esfuerzo computacional. Por otro lado, con esta elección de parámetros podemos disminuir el número pico de elementos de D_t , fundamentalmente en el comienzo cuando es más grande el “volumen” del espacio de búsqueda. Esta reducción cobra especial importancia en casos como el de este ejemplo adonde el sistema comienza con su evolución en la zona “oscura” y, en consecuencia, no pudiéndose descartar la mayoría de los elementos de D_t por algún tiempo. Este hecho se puede observar en las Figuras 5.4 (a)–(b) donde el descarte se incrementa dramáticamente luego de que la señal de salida sube por encima de cero. Esto también es notable en el error de estimación (véase Fig. 5.5) que se define como

$$\text{error}^{(i)}(t) := \text{máx}\{|\eta^{(i)} - x^{(i)}(t)| : \eta \in D_t\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

y en el cardinal de D_t , como se observa en la Figura 5.6. En esta última Figura también podemos notar que casi no ocurren descartes cuando el sistema tiene salida cero.

5.6. Conclusiones

En este capítulo hemos presentado una extensión de los resultados presentados en el capítulo anterior para obtener un observador para sistemas conmutados no-lineales que converge bajo hipótesis no tan restrictivas para los casos de que la señal de conmutación sea dependiente de los estados (caso autónomo) y cuando dicha señal es una función dependiente del tiempo conocida (caso no-autónomo).

También se presentaron ejemplos numéricos que exhiben el funcionamiento de dicho observador en ambos casos.

Capítulo 6

Método Alternativo – Estabilización Mediante Realimentación de Salidas

6.1. Introducción

En este capítulo trataremos el problema de estabilización mediante realimentación (o inyección) de salidas para sistemas localmente Lipschitz continuos. Más específicamente, consideraremos el caso simplificado para el cuál ya se conoce una ley de realimentación de estados que estabiliza al sistema de interés pero que en lugar de realimentar el estado real utiliza una estimación del mismo, obtenida de un observador como el que hemos tratado en los capítulos previos.

Si bien en control suele haber muchos otros objetivos además de la estabilización, hemos elegido este problema por su generalidad. Por ejemplo, podríamos estar interesados solamente en hacer que una parte de la variable de estados se aproxime a un “punto de regulación” en cuyo caso, luego de aplicar una traslación de dicho punto al origen de coordenadas de manera tal que el punto de interés sea cero, se trataría de un problema de estabilización parcial (o estabilización de salida). También se podría querer resolver un problema de seguimiento, *i.e.* que la salida del sistema $y(t)$ se aproxime asintóticamente a una función $y_s(t)$ a seguir. Considerando el error de seguimiento $e(t) = y(t) - y_s(t)$ se tendría ese caso un problema de estabilización de salida.

El problema de estabilización mediante realimentación de salidas es un problema de gran motivación en teoría de control. Se han propuesto resultados interesantes para algunas clases de sistemas no lineales de fase mínima ([49, 48, 37, 42]) como así también para algunas clases de sistemas no lineales de fase no mínima ([29, 30, 43]).

Sin embargo, en nuestro caso nos apartamos de los enfoques tratados en dichos trabajos y buscamos adaptar el observador alternativo que hemos propuesto al problema de estabilización por realimentación de estados.

6.1.1. Sistemas Considerados

Consideramos sistemas dinámicos controlados con salidas de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (6.1)$$

donde asumimos que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función localmente Lipschitz continua en (x, u) y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ también es localmente Lipschitz continua, x es el estado, u el control e y las mediciones a las que tenemos acceso. Además consideramos $f(0, 0) = 0$ y llamamos a $x = 0$ el *origen*.

Los controles o “entradas” son mapas medibles localmente esencialmente acotados

$$u(\cdot) : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^m$$

adonde el espacio de valores de control \mathbb{U} es algún subconjunto apropiado del espacio euclídeo \mathbb{R}^m .

Para un estado inicial $x(t_0) = x_0$ y una función de control u dada se tiene una solución $x(t, x_0, u(t))$ ($x(t)$ para simplificar) que verifica $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ en casi todo punto de un intervalo maximal $I_{u, x_0, t_0} = [t_0, t_{\max})$. En particular, para sistemas sin entradas como

$$\dot{x} = \bar{f}(x) \quad (6.2)$$

denotamos su solución como $x(t, x_0)$. Un sistema como (6.2) podría surgir de considerar un sistema con entrada fija (e.g., $u \equiv 0$) o bien cuando el control es una función de x , siendo este último caso el que nos interesará más adelante.

Nos proponemos estabilizar el sistema utilizando como información la salida del sistema y a lo largo del tiempo. Sin embargo, antes de adentrarnos en el problema repasemos los conceptos de controlabilidad asintótica y estabilización por realimentación de estados pues dan un marco adecuado para el planteo.

6.1.2. Controlabilidad Asintótica y Estabilización por realimentación

Como nos interesa el problema de estabilización en primer lugar recordemos que un sistema sin entradas como (6.2) se dice *globalmente asintóticamente estable* cuando

$$\exists \beta \in \mathcal{KL} \quad |x(t, x_0)| \leq \beta(|x_0|, t - t_0) \quad \forall x_0, \forall t \geq t_0. \quad (6.3)$$

Mientras que $|x(t, x_0)| \leq \beta(|x_0|, 0)$ nos da la propiedad de estabilidad (“pequeño sobrepico”), $|x(t, x_0)| \leq \beta(|x_0|, t - t_0) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$ nos provee la atractividad.

Ahora bien, cuando el sistema tiene controles como (6.1) debemos definir una noción más general, aquella de *controlabilidad asintótica* (a lazo abierto, globalmente). Siguiendo la intuición de la definición de estabilidad asintótica para sistemas sin controles, en este nuevo marco lo que se busca es que para cada condición inicial x_0 exista un control u definido en $[t_0, +\infty)$, que en general dependerá de dicha condición inicial, definido para todo $t \geq t_0$ y que genere una solución $x(t, x_0, u(t))$ también definida para todo $t \geq t_0$ que converja a cero y que tenga “pequeño” sobrepico. También deseamos descartar la posibilidad de valores de control no acotados para x cerca de cero. En términos más precisos decimos que existe una función $\beta \in \mathcal{KL}$ y otra función no decreciente $\sigma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \exists u : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{U}, \|u\|_\infty \leq \sigma(|x_0|), \\ |x(t, x_0, u(t))| \leq \beta(|x_0|, t - t_0) \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Como nuestro propósito será estabilizar al sistema (6.1) al menos debemos exigir la existencia de un control “a lazo abierto” como en (6.4). Luego tenemos la siguiente

Hipótesis 84 El sistema (6.1) es *asintóticamente controlable*.

Por otro lado, como fuera consignado la intención es la de estabilizar el sistema (6.1) utilizando las salidas del mismo o, más específicamente, utilizando alguna estimación lo suficientemente buena de los estados del sistema. En consecuencia, se hace evidente la importancia de lo que se conoce como un *estabilizador por realimentación*.

Un *estabilizador por realimentación* para un sistema con entradas (6.1) es una función localmente acotada $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{U}$, que verifica $\alpha(0) = 0$, y que hace que el sistema a lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x, \alpha(x)) =: \bar{f}(x) \quad (6.5)$$

sea globalmente asintóticamente estable.

La existencia de dicho mapa será fundamental en nuestro desarrollo. Se puede ver fácilmente que la existencia de un estabilizador por realimentación implica que el sistema (6.1) es asintóticamente controlable: baste con definir al control como $u(t) := \alpha(x(t, x_0))$ donde $x(t, x_0)$ es la solución del sistema (6.5) con $x(t_0, x_0) = x_0$. Es natural preguntarse lo contrario, *i.e.* si existe tal mapa de realimentación estabilizante en caso de que el sistema fuera asintóticamente controlable.

Para el caso especial de los sistemas lineales $\dot{x} = Ax + Bu$ esta relación está bien establecida, es decir que es equivalente la controlabilidad asintótica a la existencia de una función de realimentación estabilizante, más aún esta no sólo es continua sino que también lineal. Sin embargo para sistemas no lineales de estructura simple una función de realimentación estabilizante puede no existir como se discute en [52]. Resultados generales respecto de la no existencia de una realimentación continua fueron presentados en [10].

Esto impulsó la búsqueda de leyes de realimentación que no fueran necesariamente $u = \alpha(x)$ con $\alpha \in \mathcal{C}$. Una posibilidad es la de utilizar leyes dinámicas $\alpha(t, x)$, *i.e.* con una memoria. Esto fue explorado en [52] donde se demostró que siempre es posible asegurar su existencia para sistemas con $n = 1$, así como en [14, 15] donde se muestra la existencia de tales leyes dinámicas continuas para sistemas sin *deriva* (*i.e.*, $f(x, 0) = 0$). Para sistemas asintóticamente controlables con deriva se demuestra en ([12]), haciendo uso de una nueva noción de solución, que efectivamente también existe un estabilizador asintótico de la forma $\alpha(x)$ pero donde α ya no puede ser en

general una función continua.

En lo que sigue asumiremos que dicha ley de realimentación viene dada; el objetivo será que el sistema para el cuál fuera diseñado dicho mapa estabilizante también pueda ser estabilizado solamente utilizando la información de la salida junto con el método alternativo de observación de estados que hemos tratado en capítulos anteriores. Además, por el momento sólo consideraremos funciones de realimentación que sean continuas dejando una posible extensión a casos particulares de funciones estabilizantes no continuas para un trabajo futuro.

6.1.3. Funciones de control de Lyapunov

Un concepto fundamental en la obtención de resultados sobre funciones de realimentación estabilizantes es el de las *funciones de control de Lyapunov* o *clf's*¹. Aunque, como ya mencionáramos, no es nuestro propósito encontrar dichas leyes de realimentación de todas formas el uso de dichas clf's será central en nuestro desarrollo para hallar márgenes que permitan asegurar la convergencia del sistema (6.1) cuando en lugar de aplicar el control estabilizante $u = \alpha(x)$ apliquemos $u = \alpha(\hat{x})$ siendo \hat{x} una estimación del estado provista por el observador.

Antes de definir las *clf's*, repasemos brevemente conceptos de las funciones de Lyapunov clásicas. Considérese un sistema masa resorte amortiguado $\ddot{y} + \dot{y} + y = 0$, o bien, en forma de variables de estado $x_1 = y$ y $x_2 = \dot{y}$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$. Para verificar que el equilibrio $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable podemos tomar la función $V(x_1, x_2) := 3/2x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2$, y luego notar que $\nabla V(x) \cdot f(x) = -|x|^2 < 0$ si $x \neq 0$, de manera tal que $dV(x(t))/dt = -|x(t)|^2 < 0$ sobre las soluciones no nulas. Luego la función símil energía V decrece sobre las trayectorias y como a su vez esta es definida positiva esto implica que $x(t)$ decrece, de hecho tiende a cero. Por supuesto que para verificar esto hubiese alcanzado con calcular la parte real de los autovalores del sistema pero las funciones de Lyapunov son una técnica general.

Ahora bien, para introducir el concepto de funciones de control de Lyapunov hagamos la siguiente modificación al ejemplo anterior. Consideremos un oscilador armónico forzado $\ddot{x} + x = u$, *i.e.* $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1 + u$. Como ya hemos visto la

¹Sigla de su denominación en inglés “control Lyapunov functions”.

realimentación amortiguante $u = -x_2$ estabiliza al sistema, pero hagamos de cuenta por un momento que no lo sabemos. Si tomamos la misma V y denotamos $\dot{V}(x, u) = \nabla V(x) \cdot f(x, u)$, las derivadas sobre las trayectorias omitiendo los argumentos t en $x(t)$ y $u(t)$ vienen dadas por:

$$\dot{V}(x, u) = -x_2^2 + x_1x_2 + x_2^2 - (x_1 + 2x_2)u \quad (6.6)$$

Como esta expresión es afín en u cuando el estado x es tal que $x_1 + 2x_2 \neq 0$ podemos elegir un valor de control u (que depende de este estado presente x) tal que $\dot{V} < 0$. Por otro lado, si $x_1 + 2x_2 = 0$ luego $\nabla V(x) \cdot f(x, u) = -5x_2^2$ para todo u , la cuál es negativa a no ser que $x_2 = 0$ (en cuyo caso también $x_1 = 0$).

En definitiva, para cada $x \neq 0$ se puede elegir un valor de control que hace que $\dot{V}(x, u) < 0$. Esto es, salvo por detalles técnicos, la característica principal de las funciones de control de Lyapunov. Ahora bien, para cualquier conjunto compacto $D \subset \mathbb{R}^n$ podemos escoger para (6.6) un conjunto compacto $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ tal que

$$\forall x \in D, x \neq 0, \exists u \in \mathbb{U} \text{ tal que } \dot{V}(x, u) < 0.$$

Por lo tanto, se podría estabilizar al sistema para los estados en D usando una ley de realimentación de descenso de máxima pendiente, *i.e.*:

$$\alpha(x) := \operatorname{argmin}_{u \in \mathbb{U}} \nabla V(x) \cdot f(x, u)$$

(“argmin” significa “escoja cualquier u adonde el mínimo sea alcanzado”) donde se restringe \mathbb{U} a un conjunto compacto para asegurar que $\dot{V}(x, u)$ alcance un mínimo. En este sentido el problema de estabilización se convierte en un conjunto de problemas de programación no lineal estáticos, *i.e.*: minimizar una función de u para cada x fijo. La estabilización global también es posible mediante una elección apropiada de \mathbb{U} como función de la norma de x^2 .

Ya visto el ejemplo ilustrativo de los párrafos anteriores, pasemos a una definición precisa de funciones de control de Lyapunov:

²*e.g.*, elegir a \mathbb{U} como a una bola cerrada de radio $\sigma(|x|)$ donde $\sigma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función no decreciente.

Definición 85 Un par de control-Lyapunov para (6.1) consiste de dos funciones continuas $V, W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que se cumplen las siguientes propiedades.

- I. (*definidas positivas*) $V(x) > 0$ y $W(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, y $V(0) = 0$;
- II. (*propia*) el conjunto $\{x | V(x) \leq \beta\}$ es acotado para cada β ;
- III. (*decrecimiento infinitesimal*) para cada subconjunto acotado $G \subset \mathbb{R}^n$, existe un subconjunto compacto $\mathbb{U} \in \text{cmp}(\mathbb{R}^m)$ tal que³

$$\min_{v \in \text{co}(f(x, \mathbb{U}))} DV(x; v) \leq -W(x) \quad (6.7)$$

para cada $x \in G$ y donde $\text{co}(f(x, \mathbb{U}))$ es la cápsula convexa del conjunto $\{f(x, u) : u \in \mathbb{U}\}$.

De [12] sabemos que:

Teorema 86 El sistema (6.1) es asintóticamente controlable si y sólo si admite un par V, W de funciones de control de Lyapunov (*clf's*).

Observación 87 Para sistemas generales como (6.1) puede no existir una V suave. Esto está íntimamente relacionado con el hecho de que, de la existencia de tal *clf*, no pueda inferirse una ley de realimentación de estados estabilizante que sea continua.

La hipótesis 84 además implica la existencia de la ley de realimentación de estados α que asegura que:

$$\dot{x} = \bar{f}(x)$$

³ Dados una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y un vector $v \in \mathbb{R}^n$, la *derivada direccional baja* de V en la dirección de v está dada por

$$DV(x; v) := \liminf_{\substack{t \downarrow 0 \\ v' \rightarrow v}} \frac{1}{t} (V(x + tv') - V(x)).$$

es asintóticamente estable para todo $x \in E$ con $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Tanto la controlabilidad asintótica, como la existencia de una ley de realimentación (posiblemente no regular) así como la existencia de funciones de control de Lyapunov son todas afirmaciones equivalentes. Sin embargo, como lo que deseamos es estabilizar al sistema (6.1) con estimaciones que están sujetas a errores de observación es imprescindible la existencia de una ley de realimentación α *robusta*. La existencia de una ley de tales características solamente es equivalente a la existencia de funciones de control de Lyapunov suaves (*i.e.*, continuamente diferenciables).

Imagínese por un momento que se tiene un error de observación pequeño ($|e| = |\hat{x} - x| \ll x$), luego si la ley de realimentación α es continua tenemos (informalmente) que $\alpha(x + e) \approx \alpha(x)$ con lo que la estabilidad se preservará en vistas de que $\nabla V(x) \cdot f(x, \alpha(x + e)) \approx \nabla V(x) \cdot f(x, \alpha(x)) < 0$. Desafortunadamente cuando α no es continua este argumento se cae, pero puede ser modificado para evitar la continuidad de la realimentación. Asumiendo que V es continuamente diferenciable se puede argumentar que

$$\nabla V(x) \cdot f(x, \alpha(x + e)) \approx \nabla V(x + e) \cdot f(x, \alpha(x + e)) < 0$$

adonde la propiedad de Lyapunov se usa en $x + e$ en lugar de x . Entonces, dado un sistema con posibles errores de observación y de actuadores

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \alpha(x(t) + e(t)) + d(t)) \quad (6.8)$$

tenemos el siguiente resultado de [12]:

Teorema 88 Existe una ley de realimentación que estabiliza al sistema (6.8) si y sólo si existe para el sistema sin perturbaciones (6.1) una función de control de Lyapunov \mathcal{C}^1 .

Observación 89 Cabe aclarar que este último resultado trata sobre la existencia de una ley de realimentación continua. Si se utiliza una caracterización “híbrida” del

problema (véase [53]) en el sentido de que los controles pueden cambiar sólo sobre la base de un “schedule” discreto del tiempo, existen condiciones de tiempo mínimo de cambio entre controles que aseguran la existencia de una ley de realimentación estabilizante sólo partiendo de la controlabilidad asintótica. Aunque este esquema híbrido es en cierto sentido compatible con lo que haremos más adelante, no consideraremos esta situación pues las herramientas que se precisan para describir dicho tiempo mínimo escapan largamente al alcance del presente capítulo.

Por lo dicho anteriormente, en adelante haremos la siguiente

Suposición 90 Disponemos para el sistema (6.1) de un par de funciones de control de Lyapunov V, W suaves (*i.e.*, continuamente diferenciables) y una ley de realimentación α continua que estabiliza asintóticamente al sistema para todo $x \in E \subseteq \mathbb{R}^n$ (donde E es un espacio ambiente lo suficientemente grande).

Observamos que si la *clf* V definida arriba es suave, entonces (6.7) puede ser escrito de la forma ([12]):

$$\min_{u \in \mathbb{U}} \nabla V(x) \cdot f(x, u) \leq -W(x) \quad (6.9)$$

Para poder abordar el problema debemos definir un último concepto que relaciona el comportamiento de la variable de estados del sistema con respecto al “tamaño” de la entrada, y que resulta de importancia pues será necesario para poder establecer condiciones bajo las cuales tendremos una solución.

6.1.4. Estabilidad Entrada Estados

Se suelen distinguir dos caminos diferentes en la formulación de la noción de estabilidad para sistemas de control. Una de ellas es la noción de estabilidad entrada-salida que depende del uso de técnicas provenientes del área de teoría de operadores. Este paradigma considera al sistema como a un operador causal cuyo argumento es la entrada (o control) y el valor de la evaluación de dicho argumento, la salida. Las definiciones en este ámbito se circunscriben a considerar comportamientos de

entrada acotada/salida acotada (BIBO por sus siglas en inglés), utilizando normas (o métricas) convenientes al problema considerado (*e.g.*, podría ser conveniente para un dado problema considerar entradas acotadas en norma infinito y salidas acotadas en norma 2). Sin embargo, estas nociones de estabilidad, aunque muy útiles y exitosas en el análisis de robustez de sistemas lineales sujetos a realimentación no lineal y/o bajo incertezas no lineales leves (entre otras aplicaciones), presenta limitaciones al considerar un sistema no lineal con su respectiva descripción en variables de estado.

Si tenemos un sistema con su representación en variables de estado se ve claramente que el paradigma “entrada-salida” no necesariamente capta lo que pueda ocurrir con las variables internas del sistema. Para caracterizar estabilidad en sistemas con representación en variables de estado se suele utilizar como noción estándar el enfoque de Lyapunov para la estabilidad asintótica en sistemas no forzados. Si en cambio el sistema está forzado tener un mapa que relacione una entrada (para cada condición inicial) con una trayectoria en el espacio de estados resultaría de interés, sobre todo a la hora de caracterizar si dicho mapa es estable (en el sentido de lo expuesto en el párrafo anterior para mapas entrada/salida). Más aún, los conceptos de estabilidad entrada estados fueron desarrollados con la intención de ir más allá y explorar hasta que punto los conceptos de estabilidad Lyapunov están relacionados con aquellos de la estabilidad entrada salida considerados en el párrafo anterior, para el operador que representa al sistema. Para sistemas lineales esta relación se puede establecer sin mayores dificultades, sin embargo para sistemas no lineales generales la cuestión ya no resulta evidente.

En el caso que nos ocupa, la necesidad de suponer estabilidad entrada estados para cierta instancia del problema estará relacionada con lo siguiente: como se verá más adelante la utilización de estimaciones para la realimentación de estados hará necesario que se contemplen márgenes de robustez los cuales estarán definidos siempre que las trayectorias se muevan en espacios acotados (*i.e.*, el espacio ambiente debe ser un conjunto compacto), propiedad que se desprenderá de la hipótesis de estabilidad entrada estados.

Veamos en detalle a qué nos referimos con esta noción. La manera más simple de introducir este concepto es como generalización del concepto (6.3).

Definición 91 Sea un sistema con entradas $\dot{x} = g(x, u)$ cuyas soluciones vienen dadas por $x(t, x_0, u)$ donde $x(t_0, x_0, u) = x_0$. Se dice que este sistema con entradas es *estable entrada estados* si existen $\beta \in \mathcal{KL}$ y $\gamma \in \mathcal{K}$ tales que, para todos los estados iniciales y todos los controles, y para todo $t \geq t_0$:

$$|x(t, x_0, u)| \leq \beta(|x_0|, t - t_0) + \gamma(\|u\|_\infty). \quad (6.10)$$

Partiendo de (6.10) se puede demostrar fácilmente la siguiente

Propiedad 92 Dado un sistema cualquiera como (6.1), si éste es estable entrada estados entonces el espacio ambiente adonde evolucionan las trayectorias es un conjunto compacto siempre que tanto el conjunto de posibles condiciones iniciales como el espacio de valores de control sean compactos.

que será utilizada para establecer el resultado principal de este capítulo.

Hay varias definiciones equivalentes para la estabilidad entrada estados (véase [53]). Si bien todas tienen alguna ventaja con respecto a las otras, nos interesa exponer aquí sólo una más. La Definición 91 resulta práctica para tener una intuición del concepto de estabilidad entrada estados y para demostrar fácilmente la Propiedad 92, sin embargo no resulta útil para verificar si un dado sistema posee dicha propiedad. Vale decir, sería necesario probar que se verifica para cada una de todas las soluciones del mismo. De manera análoga a cómo los métodos directos de Lyapunov nos permiten estudiar la estabilidad de un sistema dado sin calcular sus soluciones existe también una función de Lyapunov de estabilidad entrada estados que nos permite estudiar esta propiedad sin que sea necesario conocer las soluciones del sistema.

Definición 93 Una función de *Lyapunov de estabilidad entrada estados* es una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que es continuamente diferenciable, propia (*i.e.*, radialmente no

acotada) y definida positiva (esto es, $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ para $x \neq 0$) para la cual existen funciones ω y θ de clase \mathcal{K}_∞ tal que:

$$\nabla V(x) \cdot f(x, u) \leq \theta(|u|) - \omega(|x|) \quad (6.11)$$

Como ya mencionáramos, entre otras propiedades equivalentes, en ([53]) se demuestra que la existencia de una función de Lyapunov de estabilidad entrada estados es equivalente a que el sistema en cuestión sea estable entrada estados según fuera consignado en la Definición 91. Aunque en ambos casos las hemos nombrado V en general la función de Lyapunov de estabilidad entrada estados no tiene porqué coincidir con la *clf*.

6.2. El problema de estabilización por realimentación de salidas

Dados f, h, α , deseamos obtener una estimación $\hat{x}(t)$ del estado real del sistema $x(t)$ tal que se verifique que:

$$\dot{x} = f(x, \alpha(\hat{x}(t))) \quad (6.12)$$

es asintóticamente estable para todo $x(t_0) \in E \subseteq \mathbb{R}^n$.

6.2.1. El Tándem Observador/Realimentación

En nuestro caso, como dispondremos de una ley de realimentación de estados que estabiliza asintóticamente al sistema, realimentación de salidas es en realidad una realimentación de un estado estimado (como en (6.12)) en base a una salida que se “inyecta” al observador.

Es decir que todo el problema de estimación lo resuelve el observador y la ley de realimentación sólo resuelve el problema de estabilización.

Intuitivamente, se espera que si el observador arroja una estimación “muy buena” o, más específicamente, si esta estimación converge al valor real del estado del sistema a una velocidad mayor con la que dicho sistema podría desestabilizarse en el caso de

que la realimentación no fuese la correcta, entonces el tándem observador / sistema con ley de realimentación α convergerá. En esta idea existe implícita una noción de separabilidad que nos permitiría analizar ambos casos por separado, pero para el tipo de observador alternativo que proponemos tal noción no es evidente. Sobre todo porque no manejamos parámetros tradicionales (por ejemplo velocidad de convergencia según alguna ley exponencial o funciones de Lyapunov, etc) para caracterizar el funcionamiento de nuestro observador. Es necesario pues realizar otro tipo de análisis para encontrar las condiciones que aseguren la convergencia.

Separaremos al problema en dos de la siguiente manera:

- I. Se buscará que tan pequeño puede ser el error en la estimación que se realimenta al sistema para lograr estabilizar con un error final acotado al que llamaremos e_e y que tomará un valor que resulte conveniente para la aplicación de interés.
- II. Se encontrarán las condiciones para que el observador asegure que a un dado tiempo finito se tiene un error de estimación menor o igual al valor hallado en el punto anterior.

Consideremos en primer lugar los efectos de tener un error de estimación en la señal de realimentación.

6.2.2. Error en la señal de control

Para nuestra ley de realimentación de estados se cumple que:

$$\nabla V(x) \cdot f(x, \alpha(x)) \leq -W(x) \quad (6.13)$$

para todo $x \in E$, con lo cual el problema estaría resuelto de conocerse el estado real del sistema $x(t)$ para cada $t \geq t_0$. Sin embargo, como para un instante t dado sólo tenemos una aproximación $\hat{x}(t)$ del estado real del sistema, si lo que realimentamos es:

$$\alpha(\hat{x}) = \alpha(x + e_x) \quad (6.14)$$

donde $e_x = \hat{x} - x$ es el error de estimación, entonces lo que tenemos es un error en el control. Este error en el control $e_u \in \mathbb{R}^m$ se puede expresar como:

$$e_u = \alpha(x + e_x) - \alpha(x) \quad (6.15)$$

Observación 94 Considerar que e_u no va a ser en general constante.

Manipulando (6.13) vemos que:

$$\nabla V(x) \cdot [f(x, \alpha(x)) + f(x, \alpha(x) + e_u) - f(x, \alpha(x) + e_u)] \leq -W(x)$$

$$\nabla V(x) \cdot f(x, \alpha(x) + e_u) \leq -W(x) + \nabla V(x)[f(x, \alpha(x) + e_u) - f(x, \alpha(x))] \quad (6.16)$$

El último término de la ecuación de arriba se debe al error en el control. Como puede verse, si este error es suficientemente grande se puede perder la estabilidad asintótica del sistema realimentado.

Tenemos el siguiente escenario que nos permitirá separar el problema en dos: por un lado encontraremos las condiciones para que nuestro observador asegure que a un dado tiempo finito se tenga un error de estimación en los estados menor o igual a cierto valor, que por otro lado tendrá que ser suficientemente pequeño como para lograr la estabilización. Entonces el diseño tendrá lugar en dos pasos, primero extraemos una condición de máximo error tolerado en la realimentación y partiendo de ese valor diseñamos un observador que cumpla con la meta de alcanzar tal error en un tiempo finito.

Supongamos entonces que deseamos que el error de estabilización para todo tiempo $t > T_e$ sea menor a e_e para algún $T_e > t_0$. Es decir que para todo $t > T_e$

$$|x(t)| < e_e$$

Por lo tanto, para que se cumpla que dicho error es alcanzable asintóticamente debemos poder “disminuir” el valor de V siempre que nos encontremos en $E_{e_e} :=$

$E \setminus B(0, e_e)$. Esto ocurrirá siempre que en (6.16) se verifique que:

$$W(x) > \nabla V(x)[f(x, \alpha(x) + e_u) - f(x, \alpha(x))] \quad (6.17)$$

y nótese que se pide que la desigualdad se menor estricta porque de ser menor o igual solamente se podría garantizar estabilidad pero no convergencia a cero.

Luego precisamos de la siguiente

Suposición 95 El sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha(x) + e_u),$$

es estable entrada estados⁴.

Para nuestro propósito, el aspecto más importante de que se cumpla la Suposición 95 es que, según se enuncia en la Propiedad 92, nos autoriza a afirmar que siendo $\mathbb{U} \in \text{cmp}(\mathbb{R}^m)$ y $E \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ podremos encontrar un “margen de estabilidad” que nos permita utilizar aproximaciones de los estados en lugar del estado mismo en la realimentación.

Calculemos dicho margen, pero antes hagamos la siguiente

Suposición 96 La ley de realimentación α es localmente Lipschitz continua con constante de Lipschitz L_α .

Entonces, partiendo de (6.17), si $x \in E_{e_e}$ se debe cumplir que

$$\min_{x \in E_{e_e}} W(x) > \max_{x \in E_{e_e}} \{\nabla V(x)[f(x, \alpha(x) + e_u) - f(x, \alpha(x))]\} \quad (6.18)$$

Si volvemos a expresar a $\alpha(x) + e_u$ como $\alpha(\hat{x})$ es fácil ver que (6.18) vale si

$$\min_{x \in E_{e_e}} W(x) > (\max_{x \in E_{e_e}} \|\nabla V(x)\|) \cdot L_f L_\alpha |\hat{x} - x|. \quad (6.19)$$

⁴Se considera que e_u es la entrada por lo que, respecto de la Definición 91, $g(x, u) = f(x, \alpha(x) + u)$.

Luego se tiene que si queremos lograr un error de estabilización menor o igual a e_e , la estimación que realimentamos a (6.1) (para algún instante previo a T_e) debe estar acotada de la siguiente manera:

$$|\hat{x} - x| < \frac{\min_{x \in E_{e_e}} W(x)}{L_f L_\alpha \max_{x \in E_{e_e}} \|\nabla V(x)\|} \quad (6.20)$$

Observación 97 Vale decir que solamente precisamos de un observador que arroje una estimación $\hat{x}(t)$ tal que $|\hat{x}(t) - x(t)|$ cumpla con la condición (6.20) para todo $t > T_o$ donde $t_0 < T_o < T_e$. Como T_e es arbitrario, bastará con que el observador arribe a dicho error de estimación en un tiempo finito y permanezca por debajo de ese nivel de ahí en más.

Observación 98 Aunque sea natural suponer que $\mathbb{U} \in \text{cmp}(\mathbb{R}^m)$ (la acción de control en la práctica siempre será acotada), esta suposición es más intrincada de lo que puede parecer a primera vista. Recuérdese que para poder asegurar que el espacio ambiente es un compacto debemos suponer que el sistema auxiliar $\dot{x} = f(x, \alpha(x) + e_u)$ es estable entrada estados siendo e_u la entrada (no estamos suponiendo que $\dot{x} = f(x, u)$ es estable entrada estados, suposición que por otro lado convertiría en trivial al problema de estabilización en cuestión pues bastaría con realimentar $u \equiv 0$). Luego, como la acción de control se supone confinada a un compacto (\mathbb{U}) entonces $\alpha(x + e_x) \in \mathbb{U}$ por lo que no se podrá admitir una excursión arbitraria del error de estimación e_x para una ley de realimentación α en general.

Aunque difícil de comprobar *a priori*, esta situación se podrá dar perfectamente al utilizar un observador como el que hemos propuesto en capítulos anteriores. Para clarificar este hecho respondamos a la siguiente pregunta: ¿Qué tendría que ocurrir para que esto no pase? Una vez fijadas las cotas del espacio de controles, como hemos dicho transgredirlas significaría que el estado real se aleje lo suficiente del estado realimentado. Como el estado realimentado depende de una selección realizada sobre

el espacio de búsqueda, para que esto ocurra (para cualquier función de selección \mathcal{S}), al menos un estado de dicho espacio (digamos, *e.g.* el más lejano) deberá superar cierta distancia con respecto al estado real. Pero suponer que esta distancia permanecerá acotada no resulta tan artificial fundamentalmente por lo siguiente: que dicha distancia crezca sin límites querría decir que hay estados pertenecientes al espacio de búsqueda que no son descartados por un tiempo indeterminado cosa que violaría la observabilidad. Además obsérvese que si la función de selección escoge un estado muy alejado del verdadero es de esperar que la estabilización falle, con lo cuál el aumento en la excursión del error entre dicho estado y el verdadero hará que la diferencia (dado que se verifica la observabilidad) a la salida del sistema sea más notable aún permitiendo un descarte temprano.

6.2.3. Diseño del observador

Por consiguiente, se tendrá un observador con parámetros a definir pero con estructura básica idéntica a la que hemos definido en el Capítulo 4. Es decir, una función \mathcal{O} que para un espacio temporal $\mathcal{T} = \{t_i\}_{\mathbb{N}_0}$ arroja una sucesión de espacios de búsqueda

$$\{D_{t_i} : i \in \mathbb{N}_0\}$$

La diferencia fundamental con lo visto anteriormente radica en la evolución de los espacios de búsqueda entre instantes de muestreo. Para ello utilizaremos la siguiente formulación: dado un cierto instante $t_i \in \mathcal{T}$ tenemos el espacio de búsqueda D_{t_i} , luego para el instante siguiente t_{i+1} tenemos que:

$$D_{t_{i+1}} = T_{f(\cdot, u(\tau))}^{t_i, t_{i+1}}(D_{t_i}), \quad (6.21)$$

adonde, para $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$,

$$u(\tau) := \alpha(T_{\bar{f}}^{t_i, \tau}(\mathcal{S}(D_{t_i}))) \quad (6.22)$$

Como se puede ver, hemos introducido una nueva función \mathcal{S} a la que denominamos *selector* y que se define como:

Definición 99 La función selector $\mathcal{S} : \text{cmp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ toma como argumento un conjunto $D \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ y arroja como resultado un elemento $\eta \in D$ siguiendo alguna *ley de selección* que lo define.

De (6.21)-(6.22) surge que la idea aplicada es la siguiente: para cada intervalo de tiempo $[t_i, t_{i+1})$ se hace evolucionar a cada elemento de D_{t_i} con el mismo control $u(t)$ con $t \in [t_i, t_{i+1})$ que a su vez corresponde a la evolución de \bar{f} partiendo de una condición inicial $\mathcal{S}(D_{t_i})$ para $t = t_i$. Es decir que a cada elemento de D_{t_i} no se le realimenta el estado correspondiente (*i.e.*, sí mismo) que lo estabilizaría sino que a todos se les aplica el control realimentado que surge de un único estado $\mathcal{S}(D_{t_i})$. Esto es porque no buscamos estabilizar a los estados del espacio de búsqueda: lo que se busca es estabilizar al sistema realimentado (6.12) del cuál solo conocemos la salida $y = h(x)$ y no su estado actual. Entonces lo que ocurrirá es que eventualmente (cuando el espacio de búsqueda esté lo suficientemente cerca del estado real de (6.12)) el valor que tome $\mathcal{S}(D_{t_i})$ será lo suficientemente cercano al estado real como para lograr estabilizar (6.12).

Respecto del selector o ley de selección se puede decir que podría seguir alguna heurística apropiada para cada sistema en particular, vale decir que se podría aprovechar algún aspecto de la estructura matemática subyacente a cada sistema para optimizar la velocidad de descarte o algún otro parámetro que se traduzca en performance del observador/regulador, pero no estará dentro del alcance de nuestra primera aproximación a este problema. Es por ello que nuestra función *selector* será elegir arbitrariamente un elemento de su conjunto argumento. Debemos encontrar las condiciones para que haya convergencia en este contexto.

Luego lo que se tiene es un sistema como (6.12) adonde $\hat{x}(t)$ se construye seleccionando en cada instante perteneciente a \mathcal{T} un elemento de D_t . Debemos expresar formalmente dicha situación. Para ello definimos el siguiente sistema auxiliar

$$\dot{x} = g_\eta(t, x) \tag{6.23}$$

donde $g_\eta : \mathbb{R}_{\geq t_0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\eta \in \mathcal{E}$ que es un conjunto de indexación definido por

$$\mathcal{E} := \mathcal{T} \times E \quad (6.24)$$

donde E es el espacio ambiente. De esta manera se tiene una familia de subsistemas $\{g_\eta : \eta \in \mathcal{E}\}$ adonde

$$g_\eta(t, x) := f(x, \hat{u}(t)) \quad (6.25)$$

con

$$\hat{u}(t) = \alpha(T_f^{\pi_1(\eta), t}(\pi_2(\eta))) \quad (6.26)$$

donde para $\eta = (t^*, x^*) \in \mathcal{E}$ $\pi_1(\eta) = t^*$ y $\pi_2(\eta) = x^*$.

Por otro lado, sea

$$\{s_i = \mathcal{S}(D_{t_i}) : t_i \in \mathcal{T}\} \quad (6.27)$$

la sucesión de selecciones realizadas sobre los espacios de búsqueda para cada instante de tiempo de \mathcal{T} . Definamos la función $\sigma : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathcal{E}$ de la siguiente manera

$$\sigma(t) = (t_i, s_i) \quad \text{cuando } t \in [t_i, t_{i+1}). \quad (6.28)$$

Es decir que σ es una función constante a tramos que para cada instante $t \in \mathbb{R}_{\geq t_0}$ toma valores en \mathcal{E} y que puede cambiar de valor solamente en los instantes $t \in \mathcal{T}$.

Luego la solución que buscamos para (6.12) será la de “integrar”

$$\dot{x}(t) = g_{\sigma(t)}(t, x(t)) \quad (6.29)$$

con una cierta condición inicial x_0 en $t = t_0$ arbitraria y desconocida.

Observación 100 Dada la sucesión de selecciones $\{s_i\}$ hechas sobre el espacio de búsqueda para los distintos instantes de \mathcal{T} , luego σ queda perfectamente definida como una función del tiempo con la que se puede generar una solución de (6.29). Sin embargo, esto no debe confundirnos pues dicha sucesión depende de $x(t)$: esto se

puede ver al notar que si el observador converge a un error pequeño del estado real $x(t)$ luego el espacio de búsqueda “seguirá” esa señal salvo por un pequeño error por lo que sea cual fuere la selección realizada sobre D_t el resultado será una $\hat{x}(t)$ cercana a $x(t)$. Teniendo esto en mente no podemos pensar a este sistema como a un sistema que tiene continuidad con respecto a las condiciones iniciales. Como era el caso de (5.3).

Luego, teniendo esta representación del sistema podemos enunciar los resultados correspondientes a los lemas de descarte y consistencia y ensayar demostraciones por caminos parecidos a los utilizados en capítulos anteriores.

Lema 101 Sean γ, ϵ números positivos y sea que el sistema (6.1) es γ -observable con espacio de búsqueda $D \subset E$ con $E \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ el espacio ambiente para las trayectorias del sistema sobre el intervalo de tiempo de interés y $\mathbb{U} \in \text{cmp}(\mathbb{R}^m)$ el espacio de valores de control. Consideremos el $\epsilon - \gamma$ -descartador $\mathbf{D}_{\epsilon, \gamma}^{\bar{\tau}, \infty}(D) = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \phi_\gamma, \mathcal{Z})$ donde $\mathcal{T} = \{t_k = t_0 + k\Delta T, k \in \mathbb{N}_0\}$. Si $\Delta T > 0$ cumple con:

$$\Delta T < \frac{\gamma}{2L_h^E M_E}$$

adonde

$$M_E = \max_{\substack{x \in E \\ u \in \mathbb{U}}} \{f(x, u)\} \quad (6.30)$$

entonces la condición de descarte se verifica.

Demostración:

Sea $x(t)$ con $t \in [t_0, +\infty)$ una solución del sistema (6.29). Sea $\tau \in [t_0, \infty)$ arbitrario y $k \in \mathbb{N}$ tal que $t_{k-1} \leq \tau < t_k$, adicionalmente $\bar{x} = x(\tau)$. Se sigue que $t_k \leq \tau + \Delta T$ y

$$\begin{aligned} |\bar{x} - T_{g_{\sigma(t_{k-1})}}^{\tau, t_k}(\bar{x})| &= \left| \int_{\tau}^{t_k} g_{\sigma(t_{k-1})}(s, x(s, \tau, \bar{x})) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{\tau}^{\tau + \Delta T} |g_{\sigma(t_{k-1})}(s, x(s, \tau, \bar{x}))| ds \leq M_E \cdot \Delta T. \end{aligned}$$

adonde $M_E > 0$ se encuentra bien definido y es finito ya que se verifica: $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ y que $E \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ en virtud de la estabilidad entrada estados de la Suposición 95 juntamente con el hecho de que $\mathbb{U} \in \text{cmp}(\mathbb{R}^m)$.

El resto de la demostración sigue la misma línea de razonamiento que la demostración del Lema 49.

■

En cuanto a la consistencia tenemos el siguiente

Lema 102 Dados $\epsilon > 0$, $\gamma > 0$, y el correspondiente $\epsilon - \gamma$ -descartador, con $\bar{\tau} = t_0$, $\tilde{\tau} = +\infty$, y D , E y \mathbb{U} como en el Lema 101, si $\bar{t} \in \mathcal{T}$ verifica:

$$\bar{t} - t_0 < \frac{1}{L_f^{E \times \mathbb{U}}} \ln \left(\frac{\gamma}{\epsilon L_h^E} \right),$$

luego si $\bar{t} = t_k$,

$$\langle \phi_\gamma(\bar{t}, t_{k-1}, \xi_{k-1}, y_k), S_{\mathcal{F}_\epsilon(D)}(C^\epsilon(r^*)) \rangle = 1$$

suponiendo que el estado real del sistema observado pertenece a $r^* \in H^\epsilon(\mathcal{F}_\epsilon(D))$.

Como vimos en la Observación 100 en un sistema de las características de (6.12), adonde la estimación se obtiene de un observador que converge, no tiene porqué haber continuidad en las condiciones iniciales. Dicha propiedad (o falta de) puede sugerirnos que para obtener un resultado de consistencia tenemos que utilizar una aproximación similar a la realizada en el Lema (80) para sistemas conmutados autónomos. Sin embargo, éste no será el caso pues allí la ley que regía la selección del subsistema activo a cada instante dependía (y en general era distinta) para cada condición inicial. Aquí, si bien la función σ con la que elegimos el subsistema g_η que gobierna la dinámica para cada instante depende de D_t (que a su vez depende de $h(x(t))$ siendo $x(t)$ el estado real del sistema), tenemos que para todos los elementos de D_t y para el sistema real el estado $\hat{x}(t)$ que se realimenta es el mismo por lo que hay un único subsistema que dicta la evolución de todos los estados considerados (i.e., los del espacio de búsqueda y el estado del sistema real). Luego procedamos con la demostración.

Demostración: Sea $c^* = c(C^*)$, el centro de C^* . Entonces, para todo $x \in C^*$,

$$|T_{g_\sigma}^{t_0, \bar{t}}(c^*) - T_{g_\sigma}^{t_0, \bar{t}}(x)| \leq \epsilon \cdot e^{L_f^{E \times \mathbb{U}}(\bar{t} - t_0)} \quad (6.31)$$

y C^* no será descartado del espacio de búsqueda (como fuera definido por ϕ_γ) siempre y cuando

$$|h(T_{g_\sigma}^{t_0, \bar{t}}(c^*)) - h(T_{g_\sigma}^{t_0, \bar{t}}(x))| \leq \gamma.$$

De la condición de Lipschitz de h y (6.31) deducimos que:

$$\begin{aligned} |h(T_{g_\sigma}^{t_0, \bar{t}}(c^*)) - h(T_{g_\sigma}^{t_0, \bar{t}}(x))| &\leq L_h^E |T_{g_\sigma}^{t_0, \bar{t}}(c^*) - T_{g_\sigma}^{t_0, \bar{t}}(x)| \\ &= L_h^E |T_{g_\sigma}^{t_0, \bar{t}}(c^*) - T_{g_\sigma}^{t_0, \bar{t}}(x)| \leq L_h^E \cdot \epsilon \cdot e^{L_f^{E \times U}(\bar{t} - t_0)} < \gamma. \end{aligned}$$

En consecuencia, siempre y cuando $t \leq \bar{t}$, C^* no será descartado por el $\epsilon - \gamma$ descartador, y se cumplirá con la consistencia. ■

Antes de enunciar el resultado principal de este Capítulo que surge de conjugar las condiciones para la consistencia y el descarte con la condición para que el error de regulación se mantenga acotado, hagamos una breve definición auxiliar:

Definición 103 Dada una sucesión

$$\{(t_i, s_i) : i \in \mathbb{N}_0, t_i < t_{i+1}, s_i \in E \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

definimos la \bar{f} -interpolación como a la función continua a tramos $\hat{x} : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\hat{x}(t) = T_{\bar{f}}^{t_i, t}(s_i) \text{ cuando } t \in [t_i, t_{i+1})$$

Ahora sí, enunciamos el

Teorema 104 Consideremos al sistema (6.1) y que se cumplen las siguientes condiciones:

- El espacio de búsqueda inicial D verifica la Suposición 37.
- El sistema (6.1) es asintóticamente controlable.
- Se tiene una función $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ localmente Lipschitz continua tal que $\dot{x} = f(x, \alpha(x))$ es globalmente asintóticamente estable.

- El espacio de valores de control es un conjunto $\mathbb{U} \in \text{cmp}(\mathbb{R}^m)$.
- El sistema $\dot{x} = f(x, \alpha(x) + e_u)$ es estable entrada estados, cuando la entrada es $e_u \in \mathbb{R}^m$.

Sea también $x_0 \in D$ el estado inicial para un dado instante inicial t_0 . Consideremos también que $E \in \text{cmp}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio ambiente. Para $\kappa \in (L_h^E, 2L_h^E)$ sean

$$\gamma_0 = \frac{2L_h^E M_E}{L_f^{E \times \mathbb{U}}} \ln \left(\frac{\kappa}{L_h^E} \right), \quad (6.32)$$

y $e_e > 0$ tal que

$$\gamma_0 \leq \frac{16\kappa}{6L_f^{E \times \mathbb{U}} L_\alpha^E} \frac{\min_{x \in E_{e_e}} W(x)}{\max_{x \in E_{e_e}} \|\nabla V(x)\|}. \quad (6.33)$$

con M_E como en el Lema 101 y supóngase que el sistema (6.1) es γ_0 -observable y que existe un número positivo $\gamma^* < \gamma_0/4$ tal que $t^*(\nu, \gamma_*, \frac{3\gamma^*}{8\kappa}, E^*) < t^*(\nu, \gamma_*, \frac{\gamma^*}{4\kappa}, E^*)$ para todo $\nu \in [t_0, t^*(t_0, \gamma_*, \frac{\gamma^*}{4\kappa}, E^*)]$, donde $E^* = \{(x_1, x_2) \in E \times E : |h(x_1) - h(x_2)| \leq \gamma^*/2\}$.

Luego existen dos sucesiones estrictamente crecientes

$$\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_k, \dots\} \text{ y}$$

$$\Upsilon = \{\tau_i = t_{k_i}, i \in \mathbb{N}_0, k_0 = 0\} \subset \mathcal{T}$$

y dos sucesiones decrecientes de números positivos

$$\Sigma = \{\epsilon_i, i \in \mathbb{N}_0\} \text{ y}$$

$$\Gamma = \{\gamma_i, i \in \mathbb{N}_0\}$$

con $\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i = \epsilon_*$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = \gamma_*$ tales que, dada la sucesión de muestras de salida del sistema (6.1) correspondientes al estado inicial $x(t_0) = x_0$,

$$\mathcal{Y} = \{y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_k), \dots\} \subset \mathbb{R}^p$$

si el observador

$$\mathbf{O}(D, \mathcal{T}, \Upsilon, \Sigma, \Gamma, \mathcal{Y}) = \mathbf{D}_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\tau_0, \tau_1} \triangleright \mathbf{D}_{\epsilon_1, \gamma_1}^{\tau_1, \tau_2} \triangleright \dots \triangleright \mathbf{D}_{\epsilon_i, \gamma_i}^{\tau_i, \tau_{i+1}} \triangleright \dots (D)$$

produce una sucesión de espacios de búsqueda $\{D_{t_i} : t_i \in \mathcal{T}, i \in \mathbb{N}_0\}$ que junto con una función de selección cualquiera \mathcal{S} genera la sucesión $\{s_i = \mathcal{S}(D_{t_i}) : t_i \in \mathcal{T}, i \in \mathbb{N}_0\}$, entonces la \bar{f} -interpolación $\hat{x}(t)$, al ser realimentada al sistema (6.1) como $\alpha(\hat{x}(t))$ hace que la solución $x(t)$ del mismo verifique

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| \leq e_e.$$

Demostración: Dadas las hipótesis del Teorema, se verifican las condiciones de los Lemas 101 y 102 por lo que (análogamente a la construcción en la demostración del Teorema 59) al elegir γ_0 como en (6.32) podemos asegurar que existirá un tiempo T_o tal que $t_0 \leq T_o < +\infty$ para el cuál el observador \mathcal{O} arrojará estimaciones tales que

$$\max_{t_i \geq T_o} |\mathcal{S}(D_{t_i}) - x(t_i)| < 6\epsilon^*$$

con lo cual $|\hat{x}(t) - x(t)| < 6\epsilon^*$ para $t \geq T_o$, de manera tal que (véase la demostración del Teorema 59) como $\gamma_0 > 16\kappa\epsilon^*$ entonces para algún $T_e \geq T_o$

$$|\hat{x}(t) - x(t)| < e_e \text{ para todo } t \geq T_e$$

donde $e_e > 0$ verifica (6.33). ■

Observación 105 Dados un espacio ambiente E fijo y dos constantes $0 < e_1 < e_2$, $E_{e_2} \subset E_{e_1}$ por lo que el “mínimo” de la expresión (6.33) es más grande cuanto más grande sea e_e . Lo contrario ocurre con el “máximo” que figura en el denominador. Por lo tanto, se puede ver que la expresión (6.33) no contradice la intuición pues cuanto más pequeño se desea el error de estabilización final más resolución debe tener el

mallado inicial de manera que los errores de estimación del observador se mantengan acotados por valores más pequeños en todo instante. El costo a pagar será, como habitualmente, carga computacional.

6.3. Ejemplo Numérico

A modo de ejemplo buscaremos estabilizar el siguiente sistema de dimensión $n = 3$ descrito por las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = x^{(2)} \\ \dot{x}^{(2)} = -x^{(1)} + x^{(3)} \\ \dot{x}^{(3)} = |x^{(1)}| + |x^{(2)}| + (1 + |x^{(1)}| + |x^{(2)}|) \cdot u \end{cases} \quad (6.34)$$

con salida $y = h(x)$ no suave definida por

$$h(x) = \begin{cases} x^{(1)} & \text{si } x^{(1)} > 0 \\ 0,5 \cdot x^{(1)} & \text{si } x^{(1)} \leq 0. \end{cases} \quad (6.35)$$

La ley de realimentación

$$\alpha(x) = \frac{1}{1 + |x^{(1)}| + |x^{(2)}|} \cdot (-(|x^{(1)}| + |x^{(2)}|) + [0,5 \ 0,5 \ -0,6] \cdot x) \quad (6.36)$$

estabiliza asintóticamente a (6.34). De hecho,

$$f(x, \alpha(x)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & -0,6 \end{bmatrix} \cdot x \quad (6.37)$$

donde la matriz tiene espectro $\{-0,1790 + 0,6175i, -0,1790 - 0,6175i, -0,2419\}$, *i.e.* es Hurwitz y por lo tanto exponencialmente estable. También se puede ver fácilmente que el sistema $\dot{x} = f(x, \alpha(x) + e_u)$ es estable entrada estados.

Tomando al espacio de búsqueda como un conjunto compacto lo suficientemente grande centrado en cero, consideramos que el espacio ambiente es otro compacto (también centrado en cero y que contiene al espacio de búsqueda inicial) cuyo diámetro es 1,5 veces el del espacio de búsqueda. Esta elección se debe a que, dada la dinámica

del sistema estabilizado y a que la salida $h(x)$ que consideramos no tiene “zonas oscuras” (como la que puede producir una función de salida como (3.2)) en cualquier caso la convergencia del observador a “valores estabilizantes” se dará en no más de 5 instantes de descarte por lo que el espacio de búsqueda quedará holgadamente confinado a ese valor.

Tenemos de esta manera una cota superior para γ_0 que surge de evaluar (6.32) para $\kappa = 2L_h^E$. Luego, partiendo de esta cota superior que asegura la convergencia del observador debemos achicar γ_0 hasta alcanzar un valor que satisfaga la cota (6.33) para algún valor de e_e suficientemente pequeño para la aplicación que se considere pero no demasiado pequeño como para comprometer demasiado desde el punto de vista del costo computacional (*i.e.*, achicar excesivamente γ_0 tiene solamente consecuencias en términos de costo computacional).

Para poder evaluar la expresión (6.33) uno debe disponer de funciones de control de Lyapunov para el sistema en cuestión. En este caso podemos hallar fácilmente una función de Lyapunov de la forma $V(x) = x^T P x$ para (6.37) resolviendo la ecuación de Lyapunov (véase *e.g.* [32]):

$$A^T P + P A = -w I \quad (6.38)$$

donde A es la matriz de (6.37), I es una matriz identidad de 3×3 y w una constante positiva. Si recordamos lo expuesto en la sección 6.1.3 las funciones $V(x) = x^T P x$, $W(x) = w|x|^2$ pueden cumplir el rol de funciones de control de Lyapunov para el sistema (6.34). Ahora bien, para distintos valores de w se obtienen distintos pares V, W . Sin embargo, como el error en la estimación que puede tolerar nuestro sistema estabilizado $f(\cdot, \alpha(\cdot))$ es una propiedad estructural que (una vez fija α) no puede depender de la elección de w es esperable que la cota que obtenemos para γ_0 en (6.33) no dependa de dicho parámetro.

Para ver lo que sucede con $\frac{\min_{x \in E_{e_e}} W(x)}{\max_{x \in E_{e_e}} \|\nabla V(x)\|}$, notemos que

$$\min_{x \in E_{e_e}} W(x) = w \cdot e_e^2$$

y que como $\|\nabla V(x)\| \leq 2\|P\|_2 \cdot |x|$ tenemos que

$$\max_{x \in E_{e_e}} \|\nabla V(x)\| \leq \|P\|_2 \cdot \text{diam}(E)$$

por lo que finalmente

$$\frac{\min_{x \in E_{e_e}} W(x)}{\max_{x \in E_{e_e}} \|\nabla V(x)\|} \geq \frac{w \cdot e_e^2}{\|P\|_2 \cdot \text{diam}(E)}$$

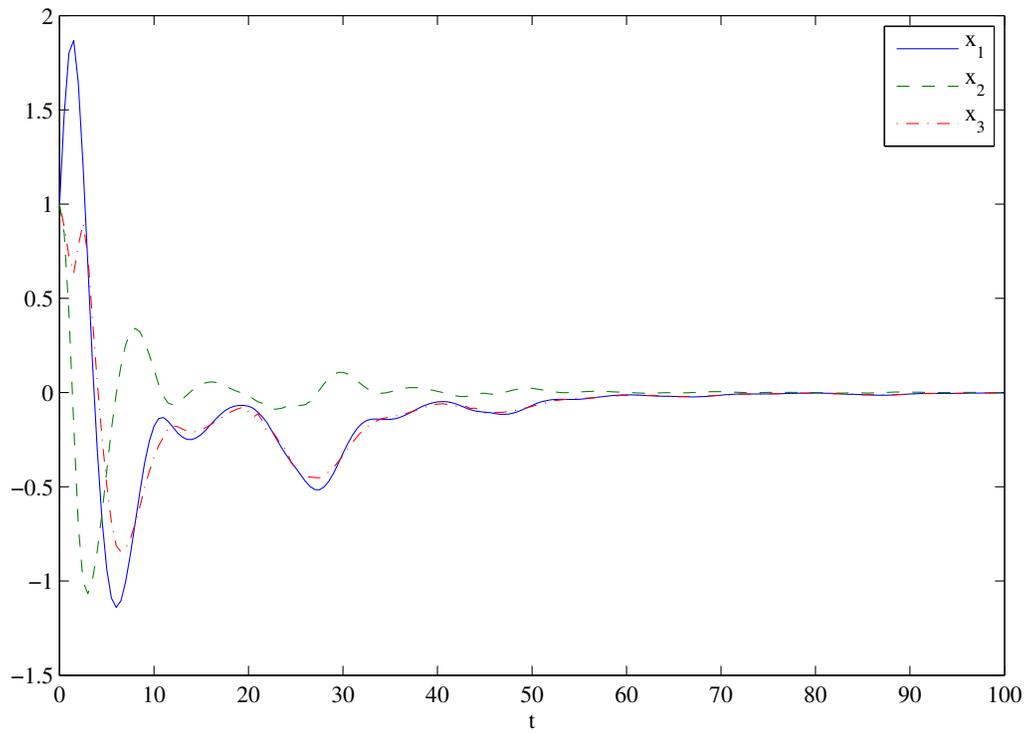
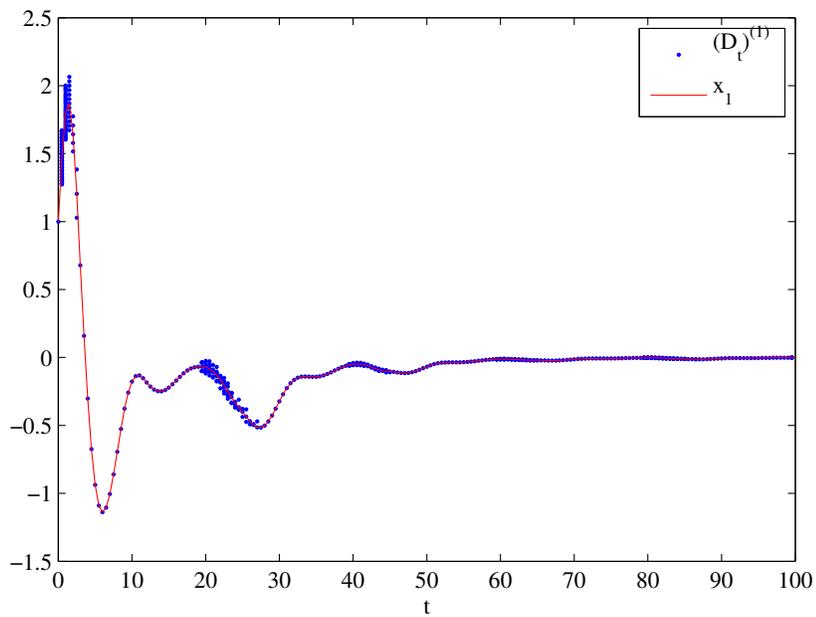
Fijos E y e_e nos interesa ver que sucede con

$$\frac{w}{\|P\|_2}. \quad (6.39)$$

Como tanto $V(x)$ como $W(x)$ son ambas funciones homogéneas de grado 2 que verifican la ecuación (6.38), es fácil ver que la cantidad (6.39) que define la cota de estabilidad sobre γ_0 es una constante. En nuestro caso del orden de 0,02.

Aunque las condiciones dadas por el Teorema 104 puedan resultar muy restrictivas podemos considerar lo siguiente: dado un espacio ambiente E se puede diseñar para un e_e “holgado”, luego si se tiene en cuenta que pasado un tiempo el espacio de búsqueda estará restringido a un espacio más chico (y por lo tanto un espacio ambiente más chico) se puede proponer un e_e más pequeño y seguir iterando hasta obtener un valor de error de estabilización muy pequeño. Esto sucede en el plano teórico, en la práctica (como se verá en la simulación) una vez que se alcanza un error pequeño en la estimación de los estados el sistema se estabiliza a un error arbitrariamente pequeño.

El resultado de la simulación, con un mallado lo suficientemente fino (de acuerdo a las condiciones impuestas por la teoría), $\Delta T = 0,5$ y $\Delta \tau = 40 \cdot \Delta T$ y condición inicial $x_0 = [1, 1, 1]^T$ puede verse en las Figuras 6.1–6.6. En la Figura 6.1 se puede ver la evolución de la variable de estados, mientras que en las Figuras 6.2–6.4 se puede observar la evolución de cada una de las coordenadas de la variable de estados respecto de la coordenada correspondiente de los puntos en el espacio de búsqueda. En cuanto a la Figura 6.5, ésta exhibe la salida del sistema. Finalmente, la Figura 6.6 nos muestra la cantidad de puntos que tiene el espacio de búsqueda a cada instante: como se puede ver, disminuye rápidamente a medida que se van “distinguiendo”; por otro lado, en forma periódica, aumenta en los momentos en los que se producen los refinamientos del mallado.

Figura 6.1: Evolución de la variable de estados x .Figura 6.2: x_1 versus $D_t^{(1)}$.

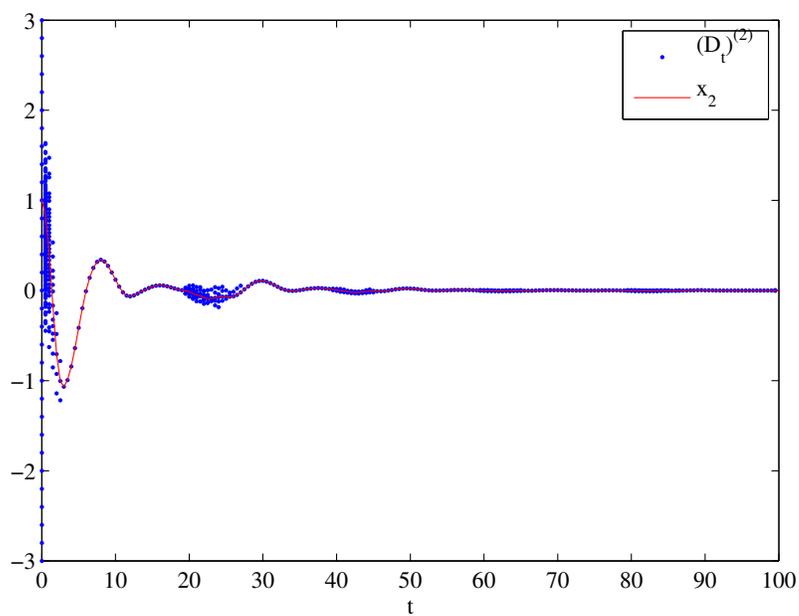


Figura 6.3: x_2 versus $D_t^{(2)}$.

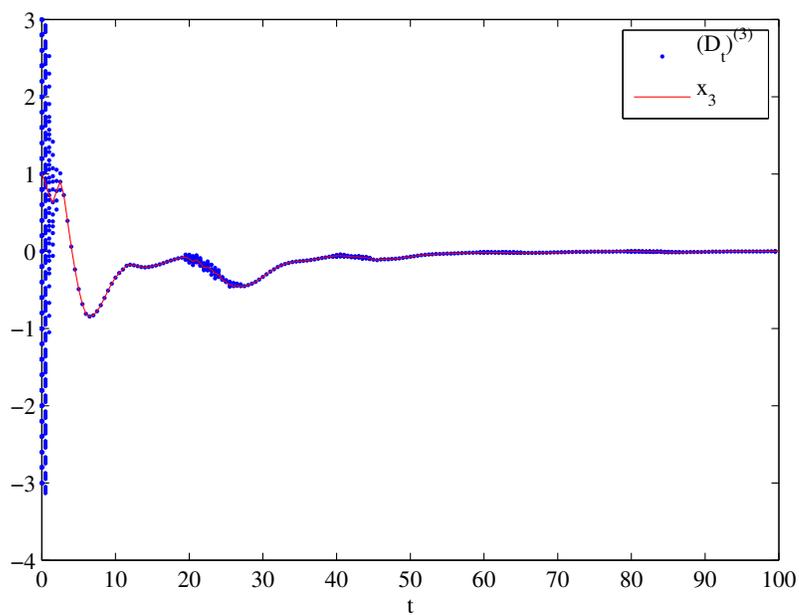
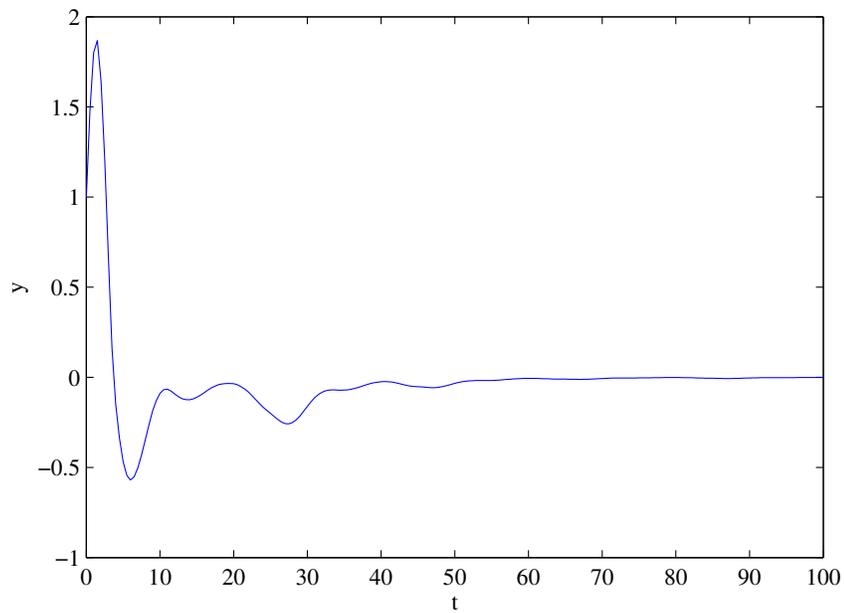
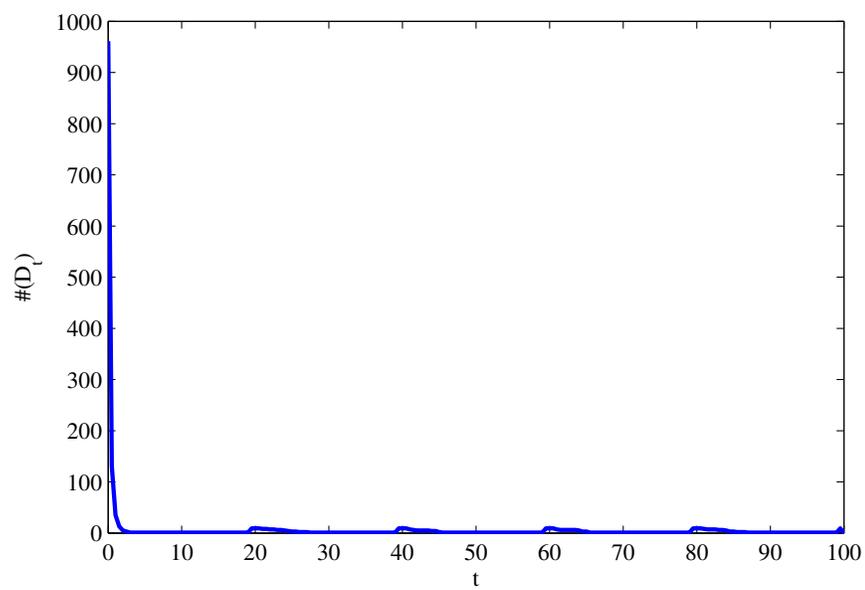


Figura 6.4: x_3 versus $D_t^{(3)}$.

Figura 6.5: Salida $y = h(x)$.Figura 6.6: Evolución del tamaño ($\#(D_t)$) del espacio de búsqueda.

Por último, cabe destacar que aunque el problema elegido sea sencillo desde el punto de vista algebraico sirve perfectamente como ejemplo pues exhibe las limitaciones con las que nos encontramos (el mismo es solamente localmente Lipschitz continuo) lo que para nuestro planteo se erige, dejando de lado la observabilidad, como el único factor estructural limitante.

6.4. Conclusiones

En este capítulo hemos encontrado condiciones bajo las cuales el observador alternativo que hemos presentado en los capítulos anteriores garantiza que un sistema para el cuál existe una ley de realimentación que lo estabiliza asintóticamente cuando realimentamos su estado también lo hace cuando se reemplaza por una estimación de dicho estado. Por las características mismas del observador propuesto aquí también se precisan pocas suposiciones estructurales sobre el sistema, a expensas de un paradigma de observación de naturaleza “paralela”. Asimismo, se presenta un ejemplo numérico que exhibe el comportamiento del sistema realimentado con estimaciones.

Capítulo 7

Conclusiones Generales

En esta tesis se han construido fundamentalmente dos aproximaciones o métodos diferentes para resolver el problema de observación de estados para sistemas Lipschitz continuos.

El primer método parte de otro conocido y lo extiende a sistemas con controles a lazo abierto. Si bien en este método no se exigen suposiciones fuertes sobre la estructura del sistema a observar, su implementación exige la confección de mapas *off-line* que relacionan cada historial de mediciones con un estado y un valor de control que luego se utiliza para parametrizar una función de control genérica. Esto último hace que la utilización de este tipo de observadores no sea conveniente para sistemas a lazo cerrado.

El segundo método de observación de estados que se presentó, que no parte de trabajo previo alguno en la literatura, tiene una estructura de naturaleza “paralela” ya que evalúa al mismo tiempo conjuntos de estados. El carácter general del algoritmo que se obtuvo se debe a que las suposiciones estructurales sobre el sistema a observar son escasas y es por ello que un mismo esquema de observador, salvo pequeñas variaciones en las condiciones de diseño, fue útil para abarcar casos tan variados como sistemas autónomos, sistemas con controles a lazo abierto, sistemas conmutados autónomos y no-autónomos, y el problema de estabilización mediante realimentación de salidas.

Finalmente, es importante remarcar que las condiciones obtenidas para garantizar la convergencia de este método alternativo son más restrictivas de lo que podrían ser para una instancia particular del problema de observación. Es decir, solamente hemos

hecho uso de parámetros que describen globalmente al sistema (*e.g.*, constantes de Lipschitz) sin aprovechar características estructurales de una instancia fija del problema (*i.e.*, qué expresión matemática exacta tiene el campo vectorial f que dicta la evolución del sistema). Esta información nos permitiría por ejemplo elegir un mallado más eficiente que el mallado uniforme propuesto para describir los espacios de búsqueda.

Obtener representaciones (no uniformes) de los espacios de búsqueda que redunden en menor costo computacional y en condiciones menos restrictivas para la convergencia forma parte de las posibles extensiones a futuro del método propuesto.

Apéndice A

Sistemas

Introducimos sucintamente en esta sección la noción abstracta de *sistema* según las definiciones de [51].

Definición 106 Un *sistema* o *máquina* con salidas es una tupla $\Sigma = (T, X, U, \phi, Y, h)$ que consiste de:

- Un *conjunto temporal* T ;
- Un conjunto no vacío X al que llamamos el *espacio de estados* de Σ ;
- Un conjunto no vacío U al que llamamos el *espacio de valores de entrada* de Σ ;
- Un mapa $\phi : \mathcal{D}_\phi \rightarrow X$ al que llamamos el *mapa de transición* de Σ , el cuál se define sobre un subconjunto \mathcal{D}_ϕ de

$$\{(\tau, \sigma, x, \omega) \mid \sigma, \tau \in T, \sigma \leq \tau, x \in X, \omega \in U^{[\sigma, \tau]}\};$$

- Un conjunto Y al que llamamos *espacio de salidas*;
- Un mapa $h : T \times X \rightarrow Y$ al que llamamos *mapa de mediciones*.

tales que se cumplen las siguientes propiedades:

no trivialidad Para cada estado $x \in X$ existe al menos un par $\sigma < \tau$ en T y algún $\omega \in U^{[\sigma, \tau]}$ tal que ω es admisible para x , i.e., tal que $(\tau, \sigma, x, \omega) \in \mathcal{D}_\phi$.

restricción Si $\omega \in U^{[\sigma, \mu]}$ es admisible para x , luego para cada $\tau \in [\sigma, \mu)$ la restricción

$\omega_1 := \omega|_{[\sigma, \tau)}$ de ω al intervalo $[\sigma, \tau)$ también es admisible para x y la restricción

$\omega_2 := \omega|_{[\tau, \mu)}$ es admisible para $\phi(\tau, \sigma, x, \omega_1)$;

semigrupo Si σ, τ, μ son tres elementos cualesquiera de T tales que $\sigma < \tau < \mu$, si

$\omega_1 \in U^{[\sigma, \tau)}$ y $\omega_2 \in U^{[\tau, \mu)}$, y si x es un estado tal que

$$\phi(\tau, \sigma, x, \omega_1) = x_1 \text{ y } \phi(\mu, \tau, x_1, \omega_2) = x_2$$

luego $\omega = \omega_1\omega_2$ también es admisible para x y $\phi(\mu, \sigma, x, \omega) = x_2$;

identidad Para cada $\sigma \in T$ y cada $x \in X$, la sucesión vacía $\diamond \in U^{[\sigma, \sigma]}$ es admisible

para x y $\phi(\sigma, \sigma, x, \diamond) = x$.

Nosotros, a diferencia de [51] en lugar de considerar al *conjunto temporal* T como a un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$ ¹ diremos que T es un subconjunto de \mathbb{R} , en nuestro caso discreto y típicamente de la forma:

$$T = \{t_0 + k\Delta T : k \in \mathbb{N}\}$$

para algún $t_0 > 0$ y algún $\Delta T > 0$. Luego los intervalos en T son de la forma $[a, b) = \{t \in T : a \leq t < b\}$, y para cada conjunto U y un intervalo I , el conjunto de mapas de I a U se denota como

$$U^I = \{\omega|_{\omega} : I \rightarrow U\}. \quad (\text{A.1})$$

En el caso de que I sea el intervalo vacío, el conjunto (A.1) consiste de un único elemento que denotamos \diamond que puede ser pensado como la “sucesión vacía” de longitud cero.

Sean $\sigma, \tau, \mu \in T$ tales que $\sigma \leq \tau \leq \mu$. Si $\omega_1 \in U^{[\sigma, \tau)}$ y $\omega_2 \in U^{[\tau, \mu)}$, su *concatenación*, denotada simplemente como $\omega_1\omega_2$, es la función $\omega \in U^{[\sigma, \mu)}$ definida como

$$\omega(t) := \begin{cases} \omega_1(t) & \text{si } t \in [\sigma, \tau), \\ \omega_2(t) & \text{si } t \in [\tau, \mu). \end{cases}$$

¹Para evitar dificultades al considerar sucesiones finitas.

Nótese que $\omega \diamond = \diamond \omega = \omega$.

Nota: En nuestro contexto quedará claro y siempre definido de la misma manera el mapa de salida por lo que sólo utilizaremos para denotar un sistema a la tupla $((T, X, U, \phi, Y)$.

Bibliografía

- [1] Mazen Alamir, *Optimization based non-linear observers revisited*, International Journal of Control (1999).
- [2] A. Alesandri and P. Coletta, *Switching observers for continuous-time and discrete-time linear systems*, Proc. American Control Conference, 2001, pp. 2516–2521.
- [3] Vincent Andrieu and Laurent Praly, *On the existence of a Kazantzis–Kravaris/Luenberger observer*, SIAM J. Control and Opt. **45** (2006), no. 2, 432–456.
- [4] A. Balluchi, L. Benvenuti, M.D. Di Benedetto, and A. L. Sangiovanni-Vicentinelli, *Design of observers for hybrid systems*, vol. Vol. 2289 of *Lecture Notes in Computer Science*, Berlin/Heidelberg: Springer, 2002.
- [5] J.P. Barbot, H. Saadaoui, M. Djemaï, and N. Manamanni, *Nonlinear observer for autonomous switching systems with jumps*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems **1** (2007), 537–547.
- [6] Gildas Besançon, *Observer design for nonlinear systems*, Advanced Topics in Control Systems Theory (Antonio Loría, Françoise Lamnabhi-Lagarrigue, and Elena Panteley, eds.), Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 328, Springer Berlin / Heidelberg, 2006, pp. 61–89.
- [7] D. Bestle and M. Zeitz, *Canonical form observer design for nonlinear time-variable systems*, International Journal of Control **38**, **Nro. 2** (1983), 419–431.
- [8] M. Branicky, *Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **43** (1998), 475–482.
- [9] R. W. Brockett, *Essays on control: Perspectives in the theory and its applications*, ch. Hybrid models for motion control systems, pp. 29–53, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [10] R.W. Brockett, *Differential geometric control theory*, ch. Asymptotic stability and feedback stabilization, pp. 181–191, Birkhauser, Boston, 1983.
- [11] F. Ceragioli, *Finite valued feedback laws and piecewise classical solutions*, Nonlinear Anal. **65** (2006), 984–998.

- [12] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, E.D. Sontag, and A.I. Subbotin, *Asymptotic controllability implies feedback stabilization*, IEEE Transactions on Automatic Control **42** (1997), 1394–1407.
- [13] P. Collins and J. H. van Schuppen, *Observability of piecewise-affine hybrid systems*, vol. Vol. 2993 of *Lecture Notes in Computer Science*, Berlin: Springer, 2004.
- [14] J-M. Coron, *Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift*, Math of Control, Signals, and Systems **5** (1992), 295–312.
- [15] ———, *Stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback laws*, SIAM J. Control and Opt. **33** (1995), 804–833.
- [16] R. A. García and C. E. D’Attellis, *Trajectory tracking in nonlinear systems via nonlinear reduced observers*, International Journal of Control **62** (1995), 685–715.
- [17] R. A. García and S. M. Hernández, *An observer for controlled Lipschitz continuous systems*, Latin American Applied Research **36** (2006), 109–114.
- [18] R.A. García and S. M. Hernandez, *An observer for controlled Lipschitz continuous systems*, Proceedings de la XI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (RPIC), 2005.
- [19] R.A. García, M.I. Troparevsky, and J.L. Mancilla-Aguilar, *An observer for nonlinear noisy systems*, Latin American Applied Research **20** (2000), 87–92.
- [20] J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman, *A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors*, IEEE Transactions on Automatic Control **37** (1992), 875–880.
- [21] J. P. Gauthier and I. Kupka, *Deterministic observation theory and applications*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
- [22] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [23] R. Hermann and A. Krener, *Nonlinear controllability and observability*, IEEE Transactions on Automatic Control **22** (1977), 728–740.
- [24] S. M. Hernández and R. A. García, *An observer for Lipschitz continuous systems: an alternative approach*, Proceedings de la XIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (RPIC), 2009.
- [25] S. M. Hernandez and R. A. García, *An alternative approach to the state observation problem for Lipschitz continuous systems with controls*, American Control Conference (ACC), 2010, pp. 5272–5277.

- [26] S. M. Hernandez and R.A. García, *An observer for Lipschitz continuous systems – an alternative approach*, Latin American Applied Research (enviado) (2011).
- [27] ———, *An observer for switched Lipschitz continuous systems*, International Journal of Control (enviado) (2012).
- [28] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Academic Press. Boston, MA., 2003.
- [29] A. Isidori, *A tool for semi-global stabilization of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems via output feedback*, IEEE Transactions on Automatic Control **45(10)** (2000), 1817–1827.
- [30] D. Karagiannis, Z. P. Jiang, R. Ortega, and A. Astolfi, *Output-feedback stabilization of a class of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems*, Automatica **41(9)** (2005), 1609–1615.
- [31] Nikolaos Kazantzis and Costas Kravaris, *Nonlinear observer design using Lyapunov’s auxiliary theorem*, Syst. Control Lett. **34** (1998), no. 5, 241–247.
- [32] H.K. Khalil, *Nonlinear systems*, Prentice Hall, 2002.
- [33] G. Kreisselmeier and R. Engel, *Nonlinear observers for autonomous Lipschitz continuous systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **48** (2003), 451–464.
- [34] A. Krener and M. Xiao, *Nonlinear observer design in the Siegel domain*, SIAM J. Control Optim. **41**, Nro. **3** (2002), 932–953.
- [35] ———, *Observers for linearly unobservable nonlinear systems*, Systems & Control Letters **46** (2002), 281–288.
- [36] A. J. Krener and A. Isidori, *Linearization by output injection and nonlinear observers.*, Systems & Control Letters **3** (1983), 47–52.
- [37] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotovic, *Nonlinear and adaptative control design*, New York: Wiley., 1995.
- [38] D. Liberzon, *Switching in systems and control*, Boston, MA: Birkhäuser, 2003.
- [39] D. Luenberger, *Observing the state of a linear system*, IEEE Trans. Military Electronics **8** (1964), 74–80.
- [40] D. G. Luenberger, *Observers for multivariable systems*, IEEE Trans. on Automatic Control **11(2)** (1966), 190–197.

- [41] J. Lygeros, K. H. Johansson, S. N. Simić, J. Zhang, and S. S. Sastry, *Dynamical properties of hybrid automata*, IEEE Trans. Autom. Control **48** (2003), 2–17.
- [42] R. Marino and P. Tomei, *Dynamic output feedback linearization and global stabilization*, Systems & Control Letters **17(2)** (1991), 115–121.
- [43] ———, *A class of globally output feedback stabilizable nonlinear nonminimum phase systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **50(12)** (2005), 2097–2101.
- [44] H. Michalska and D. Q. Mayne, *Moving horizon observers and observer-based control*, IEEE Transactions on Automatic Control **40** (1995), 995–1006.
- [45] P. E. Moraal and J. W. Grizzle, *Observer design for nonlinear systems with discrete-time measurements*, IEEE Transactions on Automatic Control **40(3)** (1995), 395–404.
- [46] H. Nijmeijer and eds. T.I. Fossen, *New directions in nonlinear observer design*, Springer Verlag, London, UK, 1999.
- [47] S. Petterson, *Designing switched observers for switched systems using multiple Lyapunov functions and dwell-time switching*, IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems, 2006, pp. pp. 18–23.
- [48] L. Praly, *Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate*, IEEE Transactions on Automatic Control **48(6)** (2003), 1103–1108.
- [49] L. Praly and Z. P. Jiang, *Stabilization by output feedback for systems with ISS inverse dynamics*, Systems & Control Letters. **21(1)** (1993), 19–33.
- [50] H. Shim and A. Tanwani, *Differential geometric condition for observability of nonlinear switched systems and observer design*, Proc. American Control Conference, 2011.
- [51] E.D. Sontag, *Mathematical control theory. deterministic finite-dimensional systems*, second ed., Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [52] E.D. Sontag and H.J. Sussmann, *Remarks on continuous feedback*, Proc. IEEE Conf. Decision and Control, Albuquerque (Piscataway), IEEE Publications, Dec. 1980, pp. 916–921.
- [53] E.D. Sontag and Y. Wang, *On characterizations of the input-to-state stability property*, Systems & Control Letters **24** (1995), 351–359.
- [54] R. Vidal, A. Chiuso, S. Soatto, and S. Sastri, *Observability of linear hybrid systems*, vol. 2623, Berlin/Heidelberg: Springer, 2003.

- [55] W. Wonham, *Linear multivariable control systems, a geometric approach*, Springer Verlag, New York, 1979.
- [56] W. Xiang, J. Xiao, and M. N. Iqbal, *Robust observer design for nonlinear uncertain switched systems under asynchronous switching*, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* **6** (2011), 754–773.
- [57] W. Xie and L. Wang, *Necessary and sufficient conditions for controllability and observability of switched impulsive control systems*, *IEEE Trans. Autom. Control* **49** (2004), 960–966.
- [58] M. Zeitz, *The extended luenberger observer for nonlinear systems*, *Systems & Control Letters* **9** (1987), 149–156.
- [59] G. Zimmer, *State observation by on-line minimization*, *International Journal of Control* **60** (1994), 595–606.