Some Results for Switched Homogeneous Systems

J. L. M. Aguilar and R. A. García

Abstract— **In this paper, we prove the equivalence of weak attractivity, attractivity, global uniform asymptotic stability and exponential stability of switched homogeneous systems whose switching signals verify a certain property P. In addition we show that these stability properties imply that the system stability is robust with respect to disturbances in a power-like sense, which comprises both, the exponential ISS and iISS.**

Keywords— **switched systems, exponential stability, robust stability, homogeneous systems**

I. INTRODUCCIÓN

LOS SISTEMAS conmutados son un área de investigación en teoría de control, principalmente motivada por su interés teórico y por sus aplicaciones tecnológicas [1]. Varios tipos de sistemas, como por ejemplo los mecánicos, los de potencia eléctrica y los de control, pueden ser modelados como sistema conmutado ([2], [3]). A pesar de que el estudio de estos sistemas puede parecer simple, su comportamiento puede ser muy complejo, siendo el ejemplo más conocido de esto último el hecho que un sistema conmutado con subsistemas estables puede producir trayectorias divergentes ([2]). En consecuencia, la estabilidad de los sistemas conmutados ha sido extensivamente investigada y distintos tipos de estabilidad han sido considerados en la literatura (ver [2], [4], [5] y las referencias en ellos). Es sabido que distintas propiedades de estabilidad de sistemas dinámicos están relacionadas entre sí en algunos casos particulares. Por ejemplo, un sistema lineal tiempo invariante es exponencialmente estable si es atractivo. En el contexto de sistemas conmutados las relaciones entre las diferentes propiedades de estabilidad podrían ser muy complejas, principalmente debido a que esas relaciones también dependen del tipo de señales de conmutación consideradas. Cuando las señales de conmutación son arbitrarias, Angeli *et al.* demostraron en [6] que la estabilidad exponencial global, la estabilidad asintótica global uniforme, la atractividad global y la atractividad global débil, son equivalentes en el caso de sistemas conmutados con subsistemas homogéneos. Un resultado similar, pero para sistemas lineales fue demostrado en [7]. La equivalencia de ciertas propiedades de estabilidad en el caso en que las señales de conmutación pertenecen a ciertas clases particulares fue demostrada en [8], para el caso de sistemas conmutados homogéneos con retardos e incertezas. Las propiedades consideradas en este último trabajo son la estabilidad exponencial global uniforme robusta, la estabilidad asintótica uniforme robusta y la atractividad global uniforme robusta .

J. L. M. Aguilar, Instituto Tecnológico de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina, jmancill@itba.edu.ar

R. A. García, Instituto Tecnológico de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina, ragarcia@itba.edu.ar

Además de la estabilidad, uno de los principales problemas de la teoría de control consiste en comprender la dependencia de la magnitud de los estados respecto de la de las entradas, especialmente cuando éstas representan perturbaciones o incertezas, como por ejemplo errores en los actuadores o errores de medición. Una de las formulaciones más útiles de la estabilidad de un sistema con respecto a las entradas es la dada por la estabilidad entrada-estado (ISS por sus siglas en inglés), introducida por Sontag ([9]). Otra propiedad de estabilidad significativa, aunque más débil que ISS, es la de estabilidad entrada-estado integral (iISS por sus siglas en inglés) que también fue introducida por Sontag ([10], [11]). Las caracterizaciones de ISS y de iISS en términos de funciones de Lyapunov para sistemas conmutados con señales de conmutación arbitrarias fueron obtenidas en [12]. En el caso de señales de conmutación con tiempo de permanencia suficientemente largo, algunos resultados de ISS se basan en la existencia de funciones de Lyapunov para cada subsistema que satisfacen ciertas condiciones ([13]).

En este trabajo demostramos que para sistemas conmutados homogéneos, la estabilidad exponencial global uniforme, la estabilidad asintótica global uniforme, la atractividad global y la atractividad global débil, son equivalentes si las señales de conmutación pertenecen a una clase de señales admisibles que satisface cierta propiedad que denominamos **P**. También probamos que estas propiedades de estabilidad implican que la estabilidad del sistema conmutado es robusta respecto de perturbaciones aditivas que actúan en cada subsistema. Más precisamente, si un sistema conmutado homogéneo con señales de conmutación en una clase de señales admisibles que verifican la propiedad **P** tiene alguna de las propiedades de estabilidad equivalentes enunciadas, entonces el sistema conmutado es finalmente acotado con una cota que depende de la integral de la magnitud de las perturbaciones en intervalos de longitud fija. Además, la forma en la que las magnitudes de los estados decrece hacia la cota final es exponencial. Si las perturbaciones son vistas como entradas, entonces se obtienen, como casos particulares, que el sistema es exponencialmente ISS e iISS. Es importante puntualizar que no se supone la existencia de funciones de Lyapunov de ningún tipo.

El trabajo está organizado de la siguiente forma. La Sección II contiene las definiciones básicas. En la Sección III se presentan los resultados sobre la equivalencia de los diferentes tipos de estabilidad. Los resultados de estabilidad robusta son dados en la Sección IV. Finalmente la Sección V contiene algunas conclusiones.

II. NOTACIÓN Y DEFINICIONES

Denotaremos con $|\xi|$ a la norma euclídea de $\xi \in \mathbb{R}^n$ y para todo $r \geq 0$, $B_r = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq r\}$. Dado el conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$A + B_r = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \exists\, \zeta \in \mathbb{R}^n\ t.q. |\xi - \zeta| \leq r\}.$$

En lo subsecuente consideramos el sistema conmutado

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \sigma(t)) \qquad (1)$$

donde, para $t \in [0, \infty)$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado y donde $\sigma : [0, \infty) \to \Gamma$, con Γ un espacio métrico compacto, es una señal de conmutación (i.e. una función seccionalmente constante y continua por derecha). Suponemos que la función $f : \mathbb{R}^n \times \Gamma \to \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz en el primer argumento, uniformemente con respecto al segundo.
Diremos que el sistema conmutado es homogéneo si para cada $\gamma \in \Gamma$, $f_\gamma(\cdot) = f(\cdot, \gamma)$ es homogénea en el siguiente sentido: $f_\gamma(\lambda \xi) = \lambda f_\gamma(\xi)$ para todo $\lambda \geq 0$ y todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Es claro que $f(0, \gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$, i.e. el origen es un equilibrio para cada subsistema $\dot{x} = f_\gamma(x)$ del sistema conmutado. Notamos que en el caso de un sistema conmutado homogéneo la condición de Lipschitz local es equivalente a una global, i.e. existe $L \geq 0$ (una constante de Lipschitz global para f) tal que $|f(\xi, \gamma) - f(\xi', \gamma)| \leq L|\xi - \xi'|$ para todo $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$ y todo $\gamma \in \Gamma$. También notamos que cuando Γ es finito y para cada $\gamma \in \Gamma$, f_γ es globalmente Lipschitz y homogénea, entonces f satisface la condición general supuesta arriba si en Γ se considera la métrica discreta .
Una clase importante de sistemas conmutados homogéneos es la de los lineales. Más precisamente, si tomamos un conjunto compacto de matrices $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$, con Γ un conjunto de indices, tal que $A_\gamma \neq A_{\gamma'}$ si $\gamma \neq \gamma'$, y definimos la distancia ρ en Γ por $\rho(\gamma, \gamma') = \| A_\gamma - A_{\gamma'} \|$, donde $\|\cdot\|$ es la norma de operador inducida, tenemos que Γ es un espacio métrico compacto y que (1) con $f(\xi, \gamma) = A_\gamma \xi$ es un sistema conmutado homogéneo que satisface las suposiciones hechas.
En lo que sigue $\mathcal{S}$ denotará el conjunto de todas las señales de conmutación. Para $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$ y $\sigma \in \mathcal{S}$ cualesquiera, existe una solution x de (1) maximalmente definida tal que $x(t_0) = \xi$. Denotaremos $x(\cdot, t_0, \xi, \sigma)$ a tal solución. Cuando $t_0 = 0$ simplemente escribiremos $x(t, \xi, \sigma)$.
Observación 1: Para sistemas conmutados homogéneos , se tiene que $x(t,t\_0,\lambda\xi,\sigma) = \lambda\, x(t,t\_0,\xi,\sigma)$, $\forall\, t\_0 \geq 0, \forall\, \xi \in R\^n, \forall\, \lambda \geq 0\ y\ \forall\, \sigma \in \mathcal{S}$.

A lo largo del trabajo supondremos que las señales de conmutación admisibles para (1) pertenecen a una familia $\mathcal{S}^*$ de señales de conmutación y que (1) is completo para toda señal de conmutación admisible, es decir, para cada $\sigma \in \mathcal{S}^*$, $x(\cdot, t_0, \xi, \sigma)$ está definida para todo $t \geq 0$, cualesquiera sean $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $t_0 \geq 0$.
En lo que sigue consideraremos las siguientes propiedades de estabilidad:
Definición 1: Dada una familia de señales de conmutación $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$, diremos que el sistema conmutado (1) es:

1. *Débilmente atractivo respecto de (r.d.)* $\mathcal{S}^*$ si $\liminf_{t \to +\infty} |x(t, t_0, \xi, \sigma)| = 0, \forall\, t_0\ 0,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \forall\ \sigma \in \mathcal{S}^*$.
2. *Atractivo r.d.* $\mathcal{S}^*$ si , $\forall\, t_0 \geq 0, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \forall\, \sigma \in \mathcal{S}^*$,
$$\lim_{t \to +\infty} |x(t, t_0, \xi, \sigma)| = 0.$$
3. *Globalmente uniformemente asintóticamente estable r.d.* $\mathcal{S}^*$ si existe una función $\beta \in \mathcal{KL}$ tal que $|x(t, t_0, \xi, \sigma)| \leq \beta(|\xi|,\ t - t_0), \forall\, t \geq t_0 \geq 0, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \forall\ \sigma \in \mathcal{S}^*$.
4. *Exponencialmente estable r.d.* $\mathcal{S}^*$ si existen $c \geq 0$ y $\alpha \geq 0$ tales que $|x(t, t_0, \xi, \sigma)| \leq c\,|\xi|\, e^{-\alpha(t - t_0)}, \forall\, t \geq t_0 \geq 0, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \forall\ \sigma \in \mathcal{S}^*$.

Recordemos que $\beta \in \mathcal{KL}$ si β: $[0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ es tal que $\beta(\cdot, t)$ es continua estrictamente creciente, $\beta(0, t) = 0$ y $\beta(r, \cdot)$ es decreciente y converge a 0 cuando $t \to \infty$.

Observación 2: Cuando la familia $\mathcal{S}^*$ es invariante por translaciones de tiempos positivos, i.e. para cada $\sigma \in \mathcal{S}^*$ y $\tau > 0$ $\sigma^\tau = \sigma(\cdot + \tau) \in \mathcal{S}^*$, se tiene que $x(t, t_0, \xi, \sigma) = x(t - t_0, \xi, \sigma^{t_0})$ para todo $t \geq t_0$ y todo ξ. En consecuencia, en este caso, se obtienen definiciones equivalentes de las distintas propiedades de estabilidad enunciadas antes, si solo se consideran en esas definiciones soluciones con tiempo inicial $t_0 = 0$.

III.EQUIVALENCIA DE LAS PROPIEDADES DE ESTABILIDAD

En [6] se probó que para sistemas conmutados homogéneos con señales de conmutación arbitrarias, i.e. $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}$, las propiedades de estabilidad enunciadas en la Definición 1 son equivalentes. En este trabajo probaremos que para esa misma clase de sistemas y para ciertas familias de señales de conmutación $\mathcal{S}^*$, que son subconjuntos propios de $\mathcal{S}$, esa equivalencia sigue valiendo. Para hacer eso supondremos que $\mathcal{S}^*$ tiene la siguiente propiedad.

Definición 2: Una familia $\mathcal{S}^*$ de señales de conmutación tiene la propiedad **P** si es invariante por translaciones de tiempos positivos y vale lo siguiente: para toda sucesión $\{\sigma_k\}$, con $\sigma_k \in \mathcal{S}^*$, existen una subsucesión $\{\sigma_{k_l}\}$ y $\sigma \in \mathcal{S}^*$ tales que $\lim_{l \to \infty} \sigma_{k_l}(t) = \sigma(t)$ en casi todo punto $t \geq 0$.

Varias familias de señales de conmutación que aparecen en las aplicaciones tienen la propiedad **P**, entre ellas, aquellas que tienen un tiempo de residencia común o, más generalmente, un tiempo de residencia promedio común (ver [14]).

El siguiente es uno de los resultados principales del artículo.

Teorema 1: Sea (1) un sistema conmutado homogéneo y sea $\mathcal{S}^*$ una familia de señales de conmutación que satisface **P**. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes

1. (1) es débilmente atractivo r.d. $\mathcal{S}^*$.

2. (1) es atractivo r.d. $\mathcal{S}^*$.

3. (1) es globalmente uniformemente asintóticamente estable r.d. $\mathcal{S}^*$.

4. (1) es exponencialmente estable r.d.. $\mathcal{S}^*$.

Para probar el teorema necesitaremos algunos resultados sobre los conjuntos alcanzables del sistema (1). Dado que creemos que estos resultados podrían ser de interés y utilizados en otros contextos, los probaremos para sistemas conmutados generales.

Dada una familia $\mathcal{S}^*$de señales de conmutación, un estado ξ y dos tiempos $T \geq \tau \geq 0$, definimos el conjunto alcanzable $\mathcal{R}_\tau^T = \{w \in \mathbb{R}^n : \exists\, \sigma \in \mathcal{S}^*, \exists\, t \in [\tau, T] : w = x(t, \tau, \xi, \sigma)\}$.

Para un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$, sea $\mathcal{R}_\tau^T(C) = \cup_{\xi \in C} \mathcal{R}_\tau^T(\xi)$. Si $\tau = 0$ escribimos $\mathcal{R}^T(\xi)$ y $\mathcal{R}^T(C)$ en vez de $\mathcal{R}_0^T(\xi)$ y $\mathcal{R}_0^T(C)$ respectivamente.
Cuando $\mathcal{S}^*$ es invariante por translaciones de tiempos positivos , se tiene que $\mathcal{R}_\tau^T(\xi) = \mathcal{R}^{T-\tau}(\xi)$, que $\mathcal{R}_\tau^T(C) = \mathcal{R}^{T-\tau}(C)$ y que $\mathcal{R}^{T+\tau}(C) = \mathcal{R}^\tau(\mathcal{R}^T(C))$. Finalmente definimos $\mathcal{R}(C) = \cup_{T \geq 0} \mathcal{R}^T(C)$.
Cuando $\mathcal{S}^*$ satisface **P**, vale lo siguiente.

Lema 1: Si $\mathcal{S}^*$ tiene la propiedad **P** entonces para todo compacto no vacío $K \subset \mathbb{R}^n$ y todo $T \geq 0$, $\mathcal{R}^T(K)$ es acotado

Demostración: Sea $I = \{\tau \geq 0 : \mathcal{R}^\tau(K) \text{ es acotado}\}$. Como $\mathcal{R}^0(K) = K$ y $\mathcal{R}^\tau(K) \subset \mathcal{R}^{\tau^*}(K)$ si $\tau \leq \tau^*$, resulta que I es un intervalo y que $0 \in I$. Supongamos que $I \neq [0, \infty)$ y sea $T^* = \sup I$. Si $K^* = \overline{\{\mathcal{R}^{T^*}(K)\}}$ es compacto, existe $M > 0$ tal que $|f(\xi, \gamma)| \leq M$ para todo $\xi \in K_1^*$ y todo $\gamma \in \Gamma$. Aquí $K_1^* = K^* + B_1$. Sea $\tau = 1/M$. Entonces, para todo $\xi \in K_1^*$ y $\sigma \in \mathcal{S}^*$, puede probarse que $x(t, \xi, \sigma) \in K_1^*$ para todo $t \in [0, \tau]$.Luego $\mathcal{R}^\tau(K^*) \subset K_1^*$. Como $\mathcal{R}^{T^*+\tau}(K) = \mathcal{R}^\tau\left(\mathcal{R}^{T^*}(K)\right) \subset \mathcal{R}^\tau(K^*)$, sigue que $\mathcal{R}^{T^*+\tau}(K)$ es acotado lo que contradice la definición de T^*. Luego $\mathcal{R}^{T^*}(K)$ es no acotado, pero $\mathcal{R}^s(K)$ es acotado para todo $0 \leq s < T^*$.Entonces existen sucesiones $\{\xi_i\} \subset K$ y $\{\sigma_i\} \subset \mathcal{S}^*$ tales que $x_i(t) = x(t, \xi_i, \sigma_i)$ está definida para todo $t \geq 0$, debido a la hipótesis de completitud supuesta, y la sucesión $\{x_i\}$ satisface:

$$\max_{t \in [0, T^*]} |x_i(t)| \geq i, \quad \forall i \geq 1 \tag{2}$$

Dado que $\mathcal{S}^*$ satisface **P**, podemos suponer sin pérdida de generalidad de que existe $\sigma \in \mathcal{S}^*$ tal que $\sigma_i(t) \longrightarrow \sigma(t)$ para casi todo $t \geq 0$.
Como $\mathcal{R}^s(K)$ es acotado para cada $s \in [0, T^*)$, la sucesión $\{x_i\}$ es uniformemente acotada en $[0, s]$ para cada $s \in [0, T^*)$, i.e. existe $M_s \geq 0$ tal que $|x_i(t)| \leq M_s$ para todo $t \in [0, s]$ y todo $i \geq 1$. De la acotación de f en $B_{M_s} \times \Gamma$, se deduce la existencia de $M_s' \geq 0$ tal que para todo i, $|\dot{x}_i(t)| \leq M_s'$ para casi todo $t \in [0, s]$. Luego $\{x_i\}$ es equiacotada y equicontinua en cada intervalo $[0, s] \subset [0, T^*)$. Por el teorema de Arzela y Ascoli existe una subsucesión $\{x_{i_k}\}$ y una función continua $x: [0, T^*) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $x_{i_k} \longrightarrow x$ uniformemente en cada intervalo $[0, s] \subset [0, T^*)$.
Teniendo en cuenta que

$$x_{i_k}(s) = x_{i_k}(0) + \int_0^s f\left(x_{i_k}(t), \sigma_{i_k}(t)\right) dt, \tag{3}$$

que $x_{i_k} \longrightarrow x$ uniformemente en $[0, s]$, que $\sigma_{i_k} \longrightarrow \sigma$ en casi todo punto de $[0, s]$, que $\lim_{k \to \infty} f\left(x_{i_k}(t), \sigma_{i_k}(t)\right) = f(x(t), \sigma(t))$ para casi todo $t \in [0, s]$ y que $\left|f\left(x_{i_k}(t), \sigma_{i_k}(t)\right)\right| \leq M_s'$ para casi todo $t \in [0, s]$ y todo $k \geq 1$, y el teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue, resulta que

$$x(s) = x(0) + \int_0^s f(x(t), \sigma(t))\, dt \quad \forall\, s \in [0, T^*),$$

o, en otras palabras, $x(s) = x(s, x(0), \sigma)$ para todo $s \in [0, T^*)$. Luego x es acotada en $[0, T^*)$ ya que es la restricción a $[0, T^*)$ de la función $x(\cdot, x(0), \sigma)$ que está definida en $[0, \infty)$. Sea $Q = \overline{x([0, T^*))}$; entonces Q es compacto. Sean $Q_1 = Q + B_1$, M_1 tal que $|f(\xi, \gamma)| \leq M_1$ para todo $(\xi, \gamma) \in Q_1 \times \Gamma$ y sea $\tau = \min\{(2M_1)^{-1}, T^*\}$. Como $x_{i_k}(T^* - \tau) \longrightarrow x(T^* - \tau)$ existe k^* tal que para todo $k \geq k^*$ $\left|x_{i_k}(T^* - \tau) - x(T^* - \tau)\right| < 1/2$. Se puede ver que $x_{i_k}\left(t, \xi_{i_k}, \sigma_{i_k}\right) \in Q_1$ para todo $t \in [T^* - \tau, T^*]$ y todo $k \geq k^*$. Como $\{x_{i_k}\}$ es uniformemente acotada en $[0, T^* - \tau]$, se sigue que $\{x_{i_k}\}_{k \geq k^*}$ es uniformemente acotada en $[0, T^*]$, lo que contradice (2). Q.E.D

El siguiente resultado es válido cuando $\mathcal{S}^*$ tiene la propiedad **P** y (1) es débilmente atractivo r.d. $\mathcal{S}^*$

.**Lema 2:** Supongamos que (1) es débilmente atractivo r.d. una familia $\mathcal{S}^*$ de señales de conmutación que tiene la propiedad **P**. Para $\varepsilon > 0, \xi \in \mathbb{R}^n$ y $\sigma \in \mathcal{S}^*$, sea $\tau(\xi, \sigma, \varepsilon) = \inf\{t \geq 0 : x(t, \xi, \sigma) \in B_\varepsilon\}$. Entonces $\tau(\xi, \sigma, \varepsilon)$ es uniformemente acotado cuando (ξ, σ) pertenece a $B_R \times \mathcal{S}^*$, con $R > 0$.

Demostración: Para $\varepsilon > 0, \xi \in \mathbb{R}^n$ y $\sigma \in \mathcal{S}^*$, $\tau(\xi,\sigma,\varepsilon)$ está bien definido porque (1) es débilmente atractivo r.d. $\mathcal{S}^*$. Supongamos que para cierto $R > 0$, τ es no acotado en $B_R \times \mathcal{S}^*$. Entonces existen sucesiones $\{\xi_i\} \subset B_R$ y $\{\sigma_i\} \subset \mathcal{S}^*$tales que $\lim_{i\to\infty} \tau(\xi_i, \sigma_i, \varepsilon) = +\infty$. Podemos suponer que existe $\sigma \in \mathcal{S}^*$ tal que $\sigma_i \longrightarrow \sigma$ en casi todo punto de $[0,\infty)$. Como $\mathcal{R}^T(B_R)$ es acotado para todo $T \geq 0$, usando argumentos similares a los usados en la prueba del Lema 1, podemos asegurar la existencia de una subsucesión $\{x_{i_k}\}$, de una señal de conmutación $\sigma \in \mathcal{S}^*$ y de una condición inicial ξ tal que $\{x_{i_k}\}$ converge a $x(\cdot,\xi,\sigma)$ uniformemente en intervalos de la forma $[0,T]$. Por la atractividad débil existe T^* tal que $|x(T^*,\xi,\sigma)| \leq \varepsilon/2$. En consecuencia, para k suficientemente grande resulta que $|x(T^*,\xi_{i_k}, \sigma_{i_k})| \leq |x(T^*,\xi,\sigma)| + \varepsilon/2 < \varepsilon$. Luego, tenemos que $\tau(\xi_{i_k}, \sigma_{i_k}, \varepsilon) \leq T^*$ para k suficientemente grande, lo que contradice la no acotación de τ en $B_R \times \mathcal{S}^*$. Q.E.D.

Observación 3: Si consideramos a las señales de conmutación como perturbaciones, el Lema 1 es análogo a la Proposición 5.2 en [15] y el Lema 2 es análogo al Corolario III.3 en [16] que es consecuencia del Lema III.2 en ese artículo. Sin embargo, las demostraciones dadas en esos trabajos no pueden ser adaptadas para probar los lemas 1 y 2, pues en ambas demostraciones es necesario construir una perturbación concatenando una sucesión de perturbaciones, lo que no es posible en nuestro caso, porque la concatenación de señales de conmutación en $\mathcal{S}^*$no necesariamente pertenece a $\mathcal{S}^*$. Las demostraciones que damos explotan la compacidad secuencial de las trayectorias del sistema conmutado cuando las señales de conmutación pertenecen a una familia $\mathcal{S}^*$ que tiene la propiedad **P**.

El siguiente lema es análogo al Corolario III.4 en [15], y puede ser demostrado de la misma manera.

Lema 3: Supongamos que (1) es débilmente atractivo r.d. una familia $\mathcal{S}^*$ de señales de conmutación que satisfacen **P**. Entonces $\mathcal{R}(B_R)$ es acotado para todo $R > 0$.

Usando el Lema 3 y la homogeneidad de (1) es posible probar el Teorema 1 en la misma forma que es probado el Teorema 2 de [6]. Sin embargo, para hacer más autocontenido el trabajo proporcionaremos una demostración que es más corta y directa que la dada en [6].

Demostración del Teorema 1: Las implicaciones 4.$\Longrightarrow$ 3.$\Longrightarrow$ 2.$\Longrightarrow$ 1. son directas. Probaremos 1.$\Longrightarrow$ 4. Supongamos que vale 1.; entonces por el Lema 3 existe $M_1 > 0$ tal que $\mathcal{R}(B_1) \subset B_{M_1}$. Notamos que por la Observación 1 se tiene que $|x(t,\xi,\sigma)| = |\xi||x(t,\xi/|\xi|,\sigma)| \leq M_1|\xi|$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y todo $\sigma \in \mathcal{S}^*$. Como $\mathcal{S}^*$ tiene la propiedad **P**, de la Observación 2 se sigue que $|x(t,\xi,\sigma)| = |x(t-t_0, x(t_0,\xi,\sigma), \sigma^{t_0})| \leq M_1\, |x(t_0,\xi,\sigma)|$ para todo $t \geq t_0$. Por otra parte, por el Lema 2 existe $T > 0$ tal que para todo $\xi \in B_1$ y todo $\sigma \in \mathcal{S}^*$, existe $0 \leq t_\xi \leq T$ tal que $|x(t_\xi,\xi,\sigma)| \leq 1/(2M_1)$. Sea $t_l = lT\ \forall l \in \mathbb{N}_0$. Entonces vale lo siguiente:
(a) Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y todo $\sigma \in \mathcal{S}^*$, $|x(t,\xi,\sigma)| \leq \frac{M_1}{2^k}|\xi|$ para todo $t \geq t_k$ y todo $k \in \mathbb{N}_0$.

1. Para $\xi = 0$, dado que $x(t,0,\sigma) = 0$ para todo $t \geq 0$, (a) vale trivialmente.
2. Sea $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En este caso probamos (a) por inducción en $k \in \mathbb{N}_0$.
Caso $k = 0$. Como $|x(t,\xi,\sigma)| = |\xi||x(t,\xi/|\xi|,\sigma)| \leq M_1|\xi|$ para todo $t \geq 0$, (a) se cumple en este caso.
Paso inductivo. Supongamos que (a) vale para $k \in \mathbb{N}_0$. Entonces $|x(t,\xi,\sigma)| \leq \frac{M_1}{2^k}|\xi|$ para todo $t \geq t_k$. Sean $\xi_k = x(t_k,\xi,\sigma)$ y $z_k = \xi_k/|\xi_k|$ (por la condición de Lipschitz, $x(t,\xi,\sigma) \neq 0$ para todo $t \geq 0$ porque $\xi_k \neq 0$). Notar que $|\xi_k| \leq \frac{M_1}{2^k}|\xi|$. Por lo tanto $x(t,\xi,\sigma) = |\xi_k|\, x(t,z_k,\sigma) = |\xi_k|\, x(t-t_k, z_k, \sigma^{t_k})$ para todo $t \geq t_k$. Dado que $|z_k| = 1$, existe $0 \leq t^* \leq T$ tal que $|x(t^*,z_k,\sigma^{t_k})| \leq \frac{1}{2\,M_1}$.
Consecuentemente, $|x(t,z_k,\sigma^{t_k})| \leq \frac{1}{2\,M_1} M_1 = \frac{1}{2}$ para todo $t \geq T$. Luego, para todo $t \geq t_{k+1}$ tenemos

$$|x(t,\xi,\sigma)| = |\xi_k|\,|x(t-t_k, z_k, \sigma^{t_k})| \leq \frac{M_1}{2^{k+1}}\,|\xi|,$$

y (a) vale para $k+1$.
Sean ahora $t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^n$ and $\sigma \in \mathcal{S}^*$, y sea t_k tal que $t \in [t_k, t_{k+1}]$. De (a) se sigue que si $\alpha = \ln(2)/T$ y $c = 2\,M_1$, entonces
$|x(t,\xi,\sigma)| \leq \frac{M_1}{2^k}\,|\xi| = M_1|\xi|e^{-\alpha t_k} = M_1|\xi|e^{\alpha T}e^{-\alpha t_{k+1}} \quad = 2\,M_1|\xi|e^{-\alpha t_{k+1}} \leq c|\xi|e^{-\alpha t}$. Q.E.D.

IV. PROPIEDADES DE ESTABILIDAD ROBUSTA

En lo que sigue, probaremos que la estabilidad de un sistema conmutado homogéneo es robusta frente a perturbaciones aditivas. Para hacerlo consideramos el sistema conmutado perturbado

$$\dot{x} = f(x,\sigma) + u \tag{4}$$

donde u: $[0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ es una perturbación medible Lebesgue y localmente esencialmente acotada y f: $\mathbb{R}^m \times \Gamma \to \mathbb{R}^n$ es globalmente Lipschitz en el primer argumento uniformemente respecto del segundo y $f(0,\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$.
Para acotar los estados de (4) en términos del estado inicial y la perturbación u introducimos las normas:

Para $p \geq 1$ y $T > 0$, $\| u \|_{p,T} = \sup_{t\geq 0} \left(\int_t^{t+T} |u(s)|^p \, ds \right)^{1/p}$.
También consideramos $\| u \|_\infty =$ ess.sup.$\{|u(\tau)|: \tau > 0\}$.
Admitimos la posibilidad de que alguna de ellas sea infinita.

Observación 4: Vale lo siguiente:

1. Dados dos números positivos T y T', existe $k = k(T, T')$ tal que $\| u \|_{1,T} \leq k \| u \|_{1,T'}$. Por ende, si $\| u \|_{1,T}$ es finita para un $T > 0$, $\| u \|_{1,T'}$ es finita para todo $T' > 0$.

2. Teniendo en cuenta que para $p > 1, T > 0$ y $t \geq 0$, $\int_t^{t+T} |u(s)| \, ds \leq T^{1/q} \left(\int_t^{t+T} |u(s)|^p \, ds \right)^{1/p}$, donde q satisface $1/p + 1/q = 1$, resulta que $\| u \|_{1,T} \leq T^{1/q} \| u \|_{p,T}$.

3. Dado que para $T > 0$ y $t \geq 0$, $\int_t^{t+T} |u(s)| \, ds \leq T(\text{ess.sup.}\{|u(\tau)|: t \leq \tau \leq t + T\}) \leq T \| u \|_\infty$, se sigue que $\| u \|_{1,T} \leq T \| u \|_\infty$.

4. Si para $t \geq 0$, u_t es la función $u_t(s) = u(s)$, para $0 \leq s \leq t$ y $u(s) = 0$ si $s > t$, entonces $\| u_t \|_{p,T}$ es finita para todo $p \geq 1$ y todo $T > 0$. Además, las desigualdades en 1., 2. y 3. siguen valiendo con u_t en lugar de u.

Para estudiar la estabilidad de (4) consideramos el sistema más general

$$\dot{x} = f(x, u, \sigma) \tag{5}$$

con $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Gamma \to \mathbb{R}^n$ y $f(0,0,\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Probaremos lo siguiente:

Teorema 2: Supongamos que f en (5) es globalmente Lipschitz en los dos primeros argumentos, uniformemente con respecto al tercero. También supongamos que

$$\dot{x} = f(x, 0, \sigma) \tag{6}$$

es exponencialmente estable r.d. una familia $\mathcal{S}^*$ de señales de conmutación que es invariante por translaciones de tiempos positivos. Sean $T' > 0$ y $p \geq 1$ o $p = \infty$. Entonces existen constantes positivas c^*, α^* y μ^* tales que para toda perturbación $u: [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$, toda $\sigma \in \mathcal{S}^*$ y todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, si $x(t, \xi, \sigma, u)$ es la única solución de (5) tal que $x(0, \xi, \sigma, u) = \xi$, entonces

$$|x(t, \xi, \sigma, u)| \leq c^* |\xi| e^{-\alpha^* t} + \mu^* \| u_t \|_{p,T'}, \ \forall\, t \geq 0, \tag{7}$$

donde $\| u_t \|_{\infty,T'} = \| u_t \|_\infty$.

Demostración: Por causalidad, podemos suponer que las perturbaciones u son tales que $\| u \|_{p,T'}$ es finita, y en consecuencia $\| u \|_{1,T'}$ también es finita.
En lo siguiente $x(\cdot, \xi, \sigma)$ denota la solución del sistema no perturbado (6) correspondiente a $\sigma \in \mathcal{S}^*$ tal que $x(0, \xi, \sigma) = \xi \in \mathbb{R}^n$. Como (6) es exponencialmente estable r.d. $\mathcal{S}^*$ existe $c > 0$ y $\alpha > 0$ tales que
$|x(t, \xi, \sigma)| \leq c|\xi| e^{-\alpha t} \ \forall\, t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathcal{S}^*$.
Sea $T > 0$ tal que $ce^{-\alpha T} = 1/2$ y sea $\mu = Le^{LT}$, donde L es una constante de Lispchitz global para f. Entonce para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y toda perturbación u, si $x(t) = x(t, \xi, \sigma, u)$, lo siguiente vale para todo $k \in \mathbb{N}_0$

1. $|x(t_k + t)| \leq \frac{c}{2^k} |\xi| \, \mu\left(c \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-j} + 1\right) \| u_t \|_{1,T}, \ \forall t \in [0, T)$.

2. $|x(t_{k+1})| \leq \frac{c}{2^{k+1}} |\xi| + \mu \| u_T \|_{1,T} \sum_{j=0}^{k} 2^{-j}$.

donde $t_k = kT \ \forall k \in \mathbb{N}_0$ y, por convención, $\sum_{j=0}^{-1} a_j = 0$.
Probaremos la afirmación por inducción en $k \in \mathbb{N}_0$.

Caso $k = 0$. Sea $z(t) = x(t, \xi, \sigma)$, luego, como

$$x(t) = \xi + \int_0^t f(x(s), u(s), \sigma(s)) \, ds \quad \forall\, t \geq 0, \ \ y$$

$$z(t) = \xi + \int_0^t f(z(s), 0, \sigma(s)) \, ds \quad \forall\, t \geq 0,$$

tenemos que para todo $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} |x(t) - z(t)| &\leq \int_0^t |f(x(s), u(s), \sigma(s)) - f(z(s), 0, \sigma(s))| \, ds \\ &\leq \int_0^t (L|x(s) - z(s)| + L|u_t(s)|) \, ds \\ &\leq \int_0^t L|x(s) - z(s)| \, ds + L \| u_t \|_{1,T}. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema de Gronwall obtenemos

$|x(t) - z(t)| \leq L \| u_t \|_{1,T} \, e^{Lt}, \forall t \in [0, T]$

y, usando que $|x(t)| \leq |z(t)| + |x(t) - z(t)|$, la estabilidad exponencial del sistema no perturbado y las definiciones de T y μ, tenemos que para todo $t \in [0, T)$

$|x(t)| \leq c|\xi| e^{-\alpha t} + \mu \| u_t \|_{1,T} \leq c|\xi| + \mu \| u_t \|_{1,T}$,

y $|x(T)| \leq \frac{1}{2} |\xi| + \mu \| u_T \|_{1,T}$.

Por lo tanto 1. y 2. de la afirmación valen para $k = 0$.
Paso inductivo. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que 1. y 2. valen para $k - 1$.
Sea $x_k(t) = x(t_k + t, \xi, \sigma, u)$. Entonces $x_k(t) =$

$x(t, x(t_k), \sigma^{t_k}, u^k)$ para todo $t \geq 0$, donde $u^k = u(\cdot + t_k)$. Notamos que $u_t^k(\cdot) = u_{t+t_k}(\cdot)$. Sea $z_k(t) = x(t, x(t_k), \sigma^{t_k})$. Dado que $\mathcal{S}^*$ es invariante por translaciones $\sigma^{t_k} \in \mathcal{S}^*$. Con los mismos pasos que en el caso $k = 0$, pero con $x_k, z_k, \sigma^{t_k}, u^k$ y $x(t_k)$ en lugar de, respectivamente, x, z, σ, u y ξ, obtenemos para todo $t \in [0, T)$:

$$|x_k(t)| \leq c|x(t_k)|e^{-\alpha t} + \mu \parallel u_t^k \parallel_{1,T} \leq c|x_k(t)| + \mu \parallel u_t^k \parallel_{1,T}$$

y $|x_k(T)| \leq \frac{1}{2}|x(t_k)| + \mu \parallel u_T^k \parallel_{1,T}$.

Teniendo en cuenta que $|x(kT)| \leq \frac{1}{2^k}|\xi| + \mu \parallel u_t \parallel_{1,T} \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-j}$ y que $\parallel u_t^k \parallel_{1,T} \leq \parallel u_t \parallel_{1,T}$, obtenemos para todo $t \in [0, T)$

$$|x_k(t)| \leq \frac{c}{2^k}|\xi| \, \mu\left(c\sum_{j=0}^{k-1} 2^{-j} + 1\right) \parallel u_t \parallel_{1,T}, \text{ y}$$

$$|x(t_{k+1})| \leq \frac{1}{2^{k+1}}|\xi| + \mu \parallel u_T \parallel_{1,T} \sum_{j=0}^{k} 2^{-j}$$

Por lo tanto 1. y 2. De la afirmación valen para k.
Como para todo $k \geq 0, \sum_{j=0}^{k} 2^{-j} < \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = 2$, considerando 1. de la afirmación y razonando como en la demostración del Teorema 1, se sigue que

$$|x(t)| \leq c^*|\xi|e^{-\alpha^* t} + \hat{\mu} \parallel u_t \parallel_{1,T}, \qquad \forall t \geq 0,$$

con $c^* = 2\,c, \alpha^* = \ln(2)/T$ y $\hat{\mu} = (2c + 1)\mu$. Teniendo en cuenta 1., 2. y 3. de la Observación 4, la tesis del teorema se cumple con $\mu^* = k(T, T')\hat{\mu}$ si $p = 1$, $\mu^* = T^{1/q}k(T, T')\hat{\mu}$ si $p > 1$ y $\mu^* = Tk(T, T')\hat{\mu}$ cuando $p = \infty$. Q.E.D.

Observación 5: Si pensamos a u en (5) como una entrada al sistema, el Teorema 2 muestra que (5) es tanto ISS como iISS, cuando el sistema no perturbado (6) es globalmente Lipschitz y exponencialmente estable. En [17] este resultado (solo para ISS) se prueba para sistemas no conmutados usando un teorema inverso de Lyapunov y las caracterizaciones de ISS. Esa demostración no puede adaptarse a nuestro caso porque no existe un teorema inverso de Lyapunov como el usado en [17], excepto para el caso de señales de conmutación arbitrarias (ver [18]).

Corolario 1: Supongamos que (1) es un sistema conmutado homogéneo y que $\mathcal{S}^*$ es una familia de señales de conmutación que satisface **P** . Entonces, si (1) tiene alguna de las propiedades de estabilidad enunciadas en el Teorema 1, las conclusiones de Teorema 2 son válidas para el sistema perturbado (4).

Demostración: Por el Teorema 1, (1) es exponencialmente estable r.d. $\mathcal{S}^*$. Como cualquier sistema conmutado homogéneo localmente Lipschitz es globalmente Lipschitz y $\mathcal{S}^*$ es invariante por translaciones por tener la propiedad **P,** el corolario es consecuencia del Teorema 2. Q.E.D.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos mostrado que para sistemas conmutados homogéneos con señales de conmutación en una clase que satisface cierta propiedad denominada **P** , las propiedades de atractividad débil, de atractividad, de estabilidad global asintótica y de estabilidad global exponencial son equivalentes. Luego, hemos aplicado esta equivalencia para probar que estas propiedades de estabilidad son robustas en el siguiente sentido: si se aplica al sistema una perturbación aditiva, entonces los estados convergen exponencialmente hacia una bola cuyo radio depende de las integrales de la perturbación en intervalos de longitud finita. En particular se obtiene la estabilidad ISS y la iISS del sistema cuando las perturbaciones son vistas como entradas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialemente financiado por el proyecto PICT-2014-2599 del FONCyT.

REFERENCIAS

[1] X. Xao, L.Zhang and P.Shi. "Stability of a class of positive linear time-delay systems." *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 23, no. 5, pp. 578-589, 2013.
[2] D. Liberzon. *Switching in Systems and Control.* Boston, USA: Birkhauser, 2003.
[3] D. Liberzon and S, Morse. " Basic problems in stability and design of switched systems." *IEEE Control Syst. Mag.*, vol. 19, no. 5, pp. 59-70, 1999.
[4] R. de Carlo, M. Branicky, S. Petterson and B. Lennartson. "Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems." *Proc. IEEE*, vol. 88, no. 7, pp. 1069-1082, 2009.
[5] H. Lin and P. Antsaklis. "Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results." *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 54, no. 2, pp. 308-322, 2009.
[6] D. Angeli, P.D. de Leenheer and E. Sontag. "Chemical networks with inflows and outflows: a positive differential inclusions approach." *Biotechnol. Progr.*, vol. 25, no. 3, pp. 632-642, 2009.
[7] Z. Sun and S. Ge. *Stability Theory of Switched Dynamical Systems*. London, UK: Springer-Verlag, 2011.
[8] X. Liu and D. Liu. "Links between different stabilities of switched homogeneous systems with delays and uncertainties." *Int. J. Robust Nonlinear Control*, DOI:10.1002/rnc.3311, 2015.
[9] E. Sontag. "Smooth stabilization implies coprime factorization." *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 34, no. 4, pp. 435-443, 1989.
[10] E. Sontag. "Comments on integral variants of iss." *Systems & Control Letters*, vol. 34, no. 2, pp. 93-100, 1998
[11] D. Angeli, E. Sontag and Y Wang. " A characterization of integral input-to-state stability." *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 45, no. 6, pp. 1082-1096, 2000.
[12] J.L. Mancilla-Aguilar and R. García. "On converse Lyapunov theorems for ISS and iISS switched nonlinear systems." *Syst. Control Lett.*, vol. 42, no. 1, pp. 47-53, 2001.
[13] L.Vu, D. Chatterjee and D. Liberzon. "Input-to-state stability of switched systems and switching adaptive control." *Automatica*, vol.43, no. 4, pp.639-646, 2007.
[14] J.L. Mancilla-Aguilar and R. García. "Some invariance principles for constrained switched systems." *Proceedings of the 8th IFAC Symposium of Nonlinear Control*, Bologna, 2010.
[15] Y. Lin, E. Sontag and Y. Wang, "A smooth converse lyapunov theorem for robust stability." *SIAM J. Control Optim.*, vol. 34, no. 1, pp.124-160, 1996.

[16] E. Sontag and Y. Wang, "New characterizations of input to state stability." IEEE *Trans. Autom. Control*, vol. 41, no. 9, pp. 1283-1294, 1996.
[17] H. Khalil. *Nonlinear Systems, Third Edition*. Upper Saddle River, USA:Prentice-Hall, 2002.
[18] J.L. Mancilla-Aguilar and R. García. "A converse Lyapunov theorem for nonlinear switched systems." *Syst. Control Lett.*, vol. 41, no. 2, pp. 67-71, 2000.

José Luis Mancilla Aguilar received the Licenciado en Matemática degree (1994) and his Doctor's degree in Mathematics (2001) from the Universidad Nacional de Buenos Aires (UBA), Argentina. From 1993 to 1995, he received a Research Fellowship from the Argentine Atomic Energy Commission (CNEA) in the area of nonlinear control. Since 1995, he has been with the Department of Mathematics of the Facultad de Ingeniería (UBA), where he is currently a part-time Associate Professor. Since 2005, Dr. Mancilla-Aguilar has held a Professor position at the Department of Mathematics of the Instituto Tecnológico de Buenos Aires (ITBA) and currently is the head of the Centro de Sistemas y Control (CeSyC). His research interests include hybrid systems and nonlinear control

Rafael Antonio García received the Engineering degree in Electronics in 1979, the Licenciado degree in Mathematics in 1984 and the Ph.D. degree, also in Mathematics in 1993, all from the University of Buenos Aires. From 1979 to 1987, he worked in the Instituto de Investigaciones Científicas y Técnicas de las Fuerzas Armadas in the area of advanced communications systems. Since 1995 he has been Professor of Mathematics and of Control Theory at the Faculty of Engineering of the University of Buenos Aires, where he is currently a part-time Associate Professor. Since 2002 Dr. García has been the head of the Department of Mathematics of the Instituto Tecnológico de Buenos Aires (ITBA). His main research interests are in nonlinear control, hybrid systems and stochastic optimization.